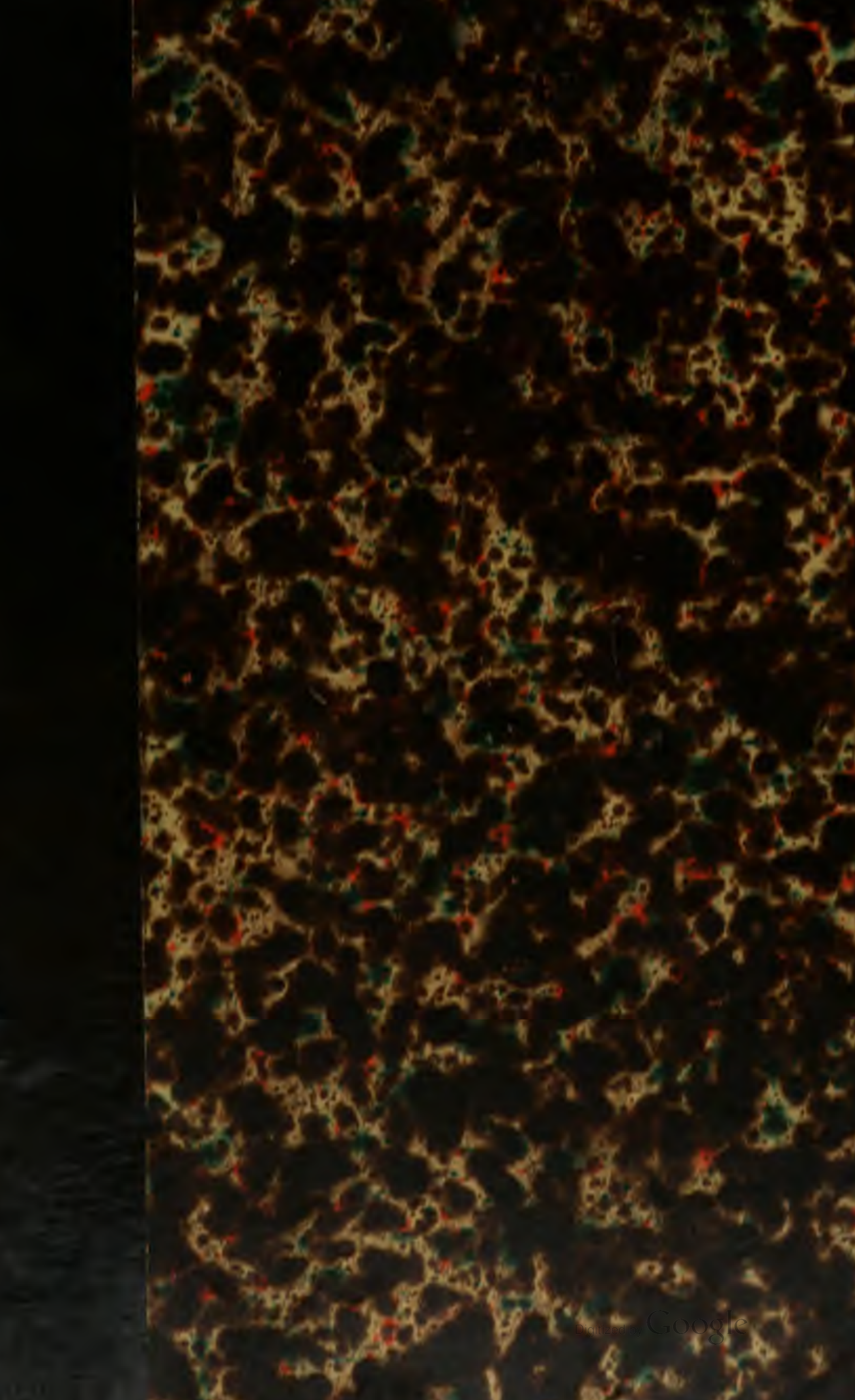






SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

FÜNFUNDSECHZIGSTER BAND.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1872.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LXV. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1872. — HEFT I BIS V.

(Mit 1 Tafel und 7 Holzschnitten.)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1872.

INHALT.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXV. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

1.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

I. SITZUNG VOM 4. JÄNNER 1872.

In Verhinderung des Präsidenten führt Herr Hofrath Freih. v. Burg den Vorsitz.

Der Secretär legt eine rechtzeitig eingelangte Concurrenzschrift für den Freiherr A. v. Baumgartner'schen Preis vor. Dieselbe führt den Titel: „Über Härtecurven an Krystallflächen" und trägt das Motto: „*...Thetisque novos detegat orbes*
Nec sit terris ultima Thule.
Seneca, Medea."

Herr Prof. L. Gegenbauer in Krems übersendet eine zweite Abhandlung über die „Auswerthung bestimmter Integrale".

Herr Prof. Dr. F. C. Schneider übersendet eine für den „Anzeiger" bestimmte Mittheilung: „Über die Entstehung einer detonirenden Jodverbindung".

Herr Schiffslieutenant K. Weyprecht übermittelt mit Schreiben ddto Triest, 28. December 1871, Proben von Treibholz und Grundproben, welche auf seiner letzten, gemeinschaftlich mit Herrn Oberlieutenant Julius Payer unternommenen Nordpolarfahrt im nördlichen Eismeere gesammelt worden sind.

Herr Jos. Schlesinger, Professor an der Forst-Hochschule zu Mariabrunn, hinterlegt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung seiner Priorität. Dasselbe führt die Aufschrift: „Nachweis, dass die bisher von der Wissenschaft für die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers aus Röhrenleitungen abgeleitete Grundformel $v = \sqrt{2gh}$ unrichtig ist, und durch die Formel $v = \sqrt{g(h+h')}$ ersetzt werden muss, wobei h die totale Druckhöhe, und h' die Druckhöhe im Reservoir ist".

Herr Director Dr. K. v. Littrow zeigt die durch Herrn Tempel in Mailand am 29. December 1871 gemachte Entdeckung eines neuen teleskopischen Kometen an.

I. SITZUNG VOM 4. JÄNNER 1872.

In Verhinderung des Präsidenten führt Herr Hofrath Freih. v. Burg den Vorsitz.

Der Secretär legt eine rechtzeitig eingelangte Concurrenzschrift für den Freiherr A. v. Baumgartner'schen Preis vor. Dieselbe führt den Titel: „Über Härtecurven an Krystallflächen" und trägt das Motto: *„... Thetisque novos detegat orbes*
Nec sit terris ultima Thule.
Seneca, Medea."

Herr Prof. L. Gegenbauer in Krems übersendet eine zweite Abhandlung über die „Auswerthung bestimmter Integrale".

Herr Prof. Dr. F. C. Schneider übersendet eine für den „Anzeiger" bestimmte Mittheilung: „Über die Entstehung einer detonirenden Jodverbindung".

Herr Schiffslieutenant K. Weyprecht übermittelt mit Schreiben ddto Triest, 28. December 1871, Proben von Treibholz und Grundproben, welche auf seiner letzten, gemeinschaftlich mit Herrn Oberlieutenant Julius Payer unternommenen Nordpolarfahrt im nördlichen Eismeere gesammelt worden sind.

Herr Jos. Schlesinger, Professor an der Forst-Hochschule zu Mariabrunn, hinterlegt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung seiner Priorität. Dasselbe führt die Aufschrift: „Nachweis, dass die bisher von der Wissenschaft für die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers aus Röhrenleitungen abgeleitete Grundformel $v = \sqrt{2gh}$ unrichtig ist, und durch die Formel $v = \sqrt{g(h+h')}$ ersetzt werden muss, wobei h die totale Druckhöhe, und h' die Druckhöhe im Reservoir ist".

Herr Director Dr. K. v. Littrow zeigt die durch Herrn Tempel in Mailand am 29. December 1871 gemachte Entdeckung eines neuen teleskopischen Kometen an.

Herr Prof. Dr. Th. Ritter v. Oppolzer übergibt eine für den „Anzeiger" bestimmte „Mittheilung über die ihm, am 20. December 1871 gelungene Wiederauffindung des verlorenen Planeten (91) Ägina".

Herr Dr. Sigm. Exner, Privatdocent und Assistent an der physiologischen Lehrkanzel der Wiener Universität, überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Weitere Studien über die Structur der Riechschleimhaut bei Wirbelthieren".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Alpen-Verein, österr.: Jahrbuch. 7. Band (IX. Jahrgang). Wien, 1871; 8°.

Annalen der Sternwarte in Leiden. II. Band. Haag, 1870; 4°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1871. (Bd. 78. 23.) Altona, 1871; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 9. Jahrgang (1871), Nr. 36; 10. Jahrgang (1872), Nr. 1. Wien; 8°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome XLII, Nr. 167. Genève, Lausanne & Paris, 1871; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIII, Nrs. 22—24. Paris, 1871; 4°.

Gesellschaft, k. physikal.-ökonomische, zu Königsberg: Schriften. XI. Jahrgang, 1870. 1. & 2. Abthlg. Königsberg, 1870 & 1871; 4°.

— Schlesische, für vaterländische Cultur. 48. Jahresbericht. Breslau, 1871; 8°.

— naturforschende, zu Bamberg: 9. Bericht. 1869—1870. Bamberg, 1870; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXII. Jahrgang (1871), Nr. 51—53; XXXIII. Jahrgang (1872), Nr. 1. Wien; 4°.

Helsingfors, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften für d. J. 1870—1871. 4° & 8°.

Instituut, K., voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch Indië: Bijdragen. III. Volgreeks. V. Deel, 3. Stuk;

VI. Deel, 1. Stuk. 'S Gravenhage, 1871; 8⁰. — Bloemlezing uit maleische Geschriften. II. Stuk. Door G. K. Niemann. 'S Gravenhage, 1871; 8⁰. — Recherches sur les monnaies des indigènes de l'archipel Indien et de la péninsule Malaie. Par H. C. Millies. La Haye, 1871; 4⁰.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie etc. Von Adolph Strecker. Für 1869. II. Heft. Giessen, 1871; 8⁰.

Landbote, Der steirische. 4. Jahrgang, Nr. 26. Graz, 1871; 4⁰.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1871, Nr. 24. Wien; 8⁰.

Lese-Verein, akadem., an der k. k. Universität und st. l. technischen Hochschule in Graz: IV. Jahresbericht (1871). Graz; 8⁰.

— — der böhmischen Studenten, zu Prag: Jahresbericht 1870—71. Prag, 1871; 8⁰. (Böhmisch.)

Leyden, Universität: *Annales academici. MDCCCLXV—MDCCCLXVI. Lugduni-Batavorum, 1870; 4⁰.*

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt 17. Band, 1871. Heft XII. Gotha; 4⁰.

Nature. Nrs. 112—113, Vol. V. London, 1871; 4⁰.

„Revue politique et littéraire" et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger. Iʳᵉ Année (2ᵉ Série), Nrs. 25—27. Paris & Bruxelles, 1871; 4⁰.

Rostock, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1870/71. 4⁰ & 8⁰.

Schaufuss, L. W., Zoologische Mittheilungen. Dresden, 1870; 8⁰.

Senarmont, Henri de, Emile Verdet et Léonor Fresnel, Oeuvres complètes d'Augustin Fresnel. Tomes II & III. Paris, 1868 & 1870; 4⁰.

Société de physique et d'histoire naturelles de Génève: Mémoires. Tome XX, 2ᵈᵉ Partie (1870); Tome XXI, 1ʳᵉ Partie (1871), et tables des Mémoires contenus dans les tomes I à XX. Génève; 4⁰.

Society, The Royal Geographical, of London: Journal. XL. Volume. 1870. London; 8⁰. — Proceedings. Vol. XV, Nrs. 1—4. London, 1871; 8⁰.

Stur, Dionys, Geologie der Steiermark. (Herausgegeben von der Direction des geog.-mont. Vereins für Steiermark.) Graz, 1871; 4°.

Upsala, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften für d. J. 1869/70; 4° & 8°.

Verein, Naturwissenschaftlicher, für Sachsen und Thüringen in Halle: Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften. N. F. 1870, Band II; 1871, Band III. Berlin; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXI. Jahrgang, Nr. 51—52. Wien, 1871; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIII. Jahrgang, 16. Heft. Wien, 1871; 4°.

II. SITZUNG VOM 11. JÄNNER 1872.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Die natürliche Familie der Schuppenthiere *(Manes)*", vom Herrn Dr. L. J. Fitzinger in Pest.

„Mathematische Demonstrationen am Domino-Spiel", vom Herrn S. Adler in Wien.

Die Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag, sowie der dortige akademische Leseverein der böhmischen Studenten danken für die ihnen im abgelaufenen Jahre übersendeten akademischen Publicationen.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academy, The Royal Irish: Proceedings. Vol. X, Parts I—III. Dublin, 1867, 1868 & 1869; 8°.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Bayer., zu München: Sitzungsberichte der philos.-philologischen und histor. Classe, 1871, Heft IV; Sitzungsberichte der mathem.-physik. Classe, 1871, Heft II. München, 8°.

Annalen der Chemie & Pharmacie von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R. Band LXXXIV, Heft 2, und VIII. Supplementband, 2. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1872 (Bd. 78. 24.). Altona, 1872; 4°.

Bern, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1869/70. 4° & 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIII, Nrs. 25—26. Paris, 1871; 4°.

Gesellschaft, geographische, in Wien: Mittheilungen. N. F. 4. 1871, Nr. 12. Wien; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VI. Band, Nr. 24. Wien, 1871; 4°.

Istituto, R., Veneto di Scienze, Lettere ed Arti: Atti. Tomo XVI°, Serie III^{a}, Disp. 10^{a}. Venezia, 1870—71; 8°.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 1. Graz, 1872; 4°.

Lund, Universität: *Acta*. 1868. Lund, 1868—69; 4°.

Nature. Nr. 114, Vol. V. London, 1872; 4°.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino Meteorologico. Vol. VI, Nr. 1. Torino, 1871; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1871, Nr. 16. Wien; 4°.

Société Linnéenne de Bordeaux: Actes. Tome XXVII. (3e Série, Tome VII) 1re Partie. Paris & Bordeaux, 1870; 8°.

Society, The Royal Dublin: Journal. Nr. XXXIX. Dublin, 1870; 8°.

Tübingen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1870. 4° & 8°.

Wiener Mediz. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 1. Wien, 1872; 4°.

Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Band, 13. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

III. SITZUNG VOM 18. JÄNNER 1872.

Herr Director Dr. K. Hornstein in Prag übersendet eine Abhandlung: „Über die Bahn der Dione (106)" vom Herrn Aug. Seydler, Assistenten an der k. k. Prager Sternwarte.

Herr Dr. F. Šofka zu Leipnik in Mähren übermittelt folgende kleinere Abhandlungen:

1. „Mathematische Begründung des Faucault'schen Versuches".
2. „Über Luftelektricität, besonders bei Gewittern".
3. „Einfluss der Sternschnuppen auf das Wetter".
4. „Meteorologisches über die Unstatthaftigkeit des Dalton'schen Gesetzes der Diffusion der Gase".
5. „Experimentelle Rechtfertigung des Princips der kosmischen Abkühlungen".
6. „Über einige Kennzeichen der Theilbarkeit jeder Zahl durch jede beliebige andere".

Herr Roblin zu Courseulles-sur-Mer (Calvados), übermittelt die Abschrift eines an das Institut de France (Section des Sciences) gerichteten Schreibens, betreffend ein von ihm entdecktes, angeblich neues astronomisches System.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Royale des Sciences à Amsterdam: Verhandelingen. Afdeel. Natuurkunde, XII. deel. 1871; Afdeel. Letterkunde, V. & VI. deel. Amsterdam, 1870 & 1871; 4⁰. — Verslagen en Mededeelingen. Afdeel. Natuurkunde, II. Reeks, IV. & V. deel. 1870 & 1871; Afdeel. Letterkunde, XII. deel, 1869 & II. Reeks, I. deel, 1871. Amsterdam; 8⁰. — Jaarboek voor 1869 & 1870. Amsterdam; 8⁰. — Processen Verbaal. 1869/70 & 1870/71. 8⁰. — Esseiva, Petrus, *Urania. Carmen didascalium. Amstelodami,* 1870; 8⁰.

Accademia, R., delle Scienze di Torino: Atti. Vol. V, Disp. 1ª— 7ª (Nov. 1869 — Giugnio 1870); Appendice al Volume IV degli „Atti". Torino; 8⁰. — Notizia storica dei lavori fatti dalla classe di scienze fisiche e matematiche negli anni 1864 e 1865. Dal prof. Ascanio Sobrero. Torino, 1869; 8⁰. — Bollettino meteorologico ed astronomico del R. Osservatorio dell' Università di Torino. Anno IV. 1869. 4⁰.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1873. (Bd. 79. 1.) Altona, 1872; 4⁰.

Bonn, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1869. 4⁰ & 8⁰.

Freiburg i. Br., Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1870/71. 4⁰ & 8⁰.

Gesellschaft, Naturforschende, in Zürich: Vierteljahrsschrift. XV. Jahrgang, 4. Heft; XVI. Jahrgang, 1. & 2. Heft. Zürich, 1870 & 1871; 8⁰.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 2—3. Wien, 1872; 4⁰.

Giessen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1869—1871. 4⁰ & 8⁰.

Grunert, Joh. Aug., Archiv der Mathematik und Physik. LIII. Theil, 4. Heft. Greifswald, 1871; 8⁰.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band IV, 9. Heft. Leipzig, 1871; 8⁰.

Lotos. XXI. Jahrg. November & December 1871. Prag; 8⁰.

Nature. Nr. 115, Vol. V. London, 1872; 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences à Harlem: Natuurkundige Verhandelingen. 3. Serie. Band I. (3 Hefte.) Harlem, 1870; 4⁰. — Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles. Tome V, 1re — 5e livraisons. (1870); Tome VI, 1re — 3e livraisons (1871). La Haye, Bruxelles, Paris, Leipzig, Londres & New-York; 8⁰.

— des Sciences naturelles de Neuchatel: Bulletin. Tome IX, 1er Cahier. Neuchatel, 1871; 8⁰.

— Botanique de France: Bulletin. Tome XVIII. (1871). Comptes rendus 1. Paris; 8⁰.

Society, The Royal, of London: Philosophical Transactions for the Year 1870. Vol. 160. Part I. London, 1870; 4⁰. —

Proceedings. Vol. XVIII. Nr. 119—122; Vol. XIX, Nr. 123. London, 1870; 8⁰. — Catalogue of Scientific Papers (1800 to 1863). Vol. IV. London, 1870; 4⁰.

Society, The Royal, of Victoria: Transactions. Part II. Vol. IX. Melbourne, 1869; 8⁰.

— The Astronomical, of London: Transactions. Vols. XXXVII & XXXVIII (1869—1871). London; 4⁰. — Monthly Notices. Vols. XXVIII—XXX. (1867—1870). — A General Index to the first XXIX Volumes of the Monthly Notices. London, 1870; 8⁰.

— The Anthropological, of London: Journal of Anthropology. 1870, Nr. I—III. 8⁰. — Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland. Vol. I, Nr. 1 (January to July 1871). London; 8⁰.

— The Royal Edinburgh: Transactions. Vol. XXVI, Part I. for the Session 1869—70. 4⁰. — Proceedings. Session 1869—1870. Vol. VII, Nrs. 80—81. 8⁰.

— The Edinburgh Geological: Transactions. Vol. I, Part 3. Edinburgh, 1870; 8⁰.

Upsala, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1871. 4⁰ & 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 2. Wien, 1872; 4⁰.

Über die Bahn der Dione (106).

Von Dr. **August Seydler,**

Assistent der k. k. Sternwarte zu Prag.

Der Planet Dione wurde am 10. October 1868 vom Herrn Prof. Watson zu Ann Arbor entdeckt, und von ihm auch die ersten Elemente desselben veröffentlicht (Berl. Jahrb. 1872). Als ich im vorigen Jahre an eine genauere Berechnung dieses Planeten ging, lagen nur Beobachtungen aus der ersten Opposition 1868—1869 vor, 23 im Ganzen, woraus zunächst die in den Astr. Nachr. Nr. 1808 mitgetheilten Elemente nebst einer Jahresephemeride, dann aber folgende genauere Elemente mit Berücksichtigung der Jupiter-Störungen abgeleitet wurden:

Berührende Ellipse für 1869, Jan. 0·0
1868, Oct. 11 0^h mittl. Berl. Zeit.

M	352°	13′	44″84	
π	27	13	24·06	Mittl. Äq. 1870·0
☊	63	15	21·12	
i	4	38	30·94	
φ	10	33	19·67	
lg a	0·5000037.			

Bei der Berechnung wurden aus den vorhandenen Beobachtungen sechs Normalorte gebildet, von den Störungen befreit, und durch den ersten und letzten Ort (1868 October 11·0 und 1869 Februar 8·0) die wahrscheinlichste Ellipse nach der Gauss'schen Methode gelegt. Die übrigbleibenden Fehler der vier übrigen Normalorte in Länge und Breite waren:

	(B—R) $d\lambda$	(B—R) $d\beta$
Nr. II. 1868, Oct. 21·0	+8″3	—2″5
„ III. 1868, Nov. 3·0	—4·1	—0·6
„ IV. 1869, Jan. 13·0	—0·8	—2·0
„ V. 1869, Jan. 17·0	+2·5	—4·6.

Aus dem Jahre 1870 (Opposition im Jänner) ist keine Beobachtung veröffentlicht worden, erst im Jahre 1871 (Opposition im März) wurde Dione am 15. März vom Herrn Stud. Wijkander zu Lund wieder aufgefunden, und von ihm sowie vom Herrn Prof. Axel Möller sieben Beobachtungen angestellt. (Astr. Nachr. 1847.) Es zeigten sich folgende Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung in Rectascension und Declination.

			(B—R) dα	(B—R) dδ
1.	März 15·54931,	m. Berl. Zt.	+6' 15"68	—2' 58·73
2.	„ 16·45810	„	6 14·72	—3 1·92
3.	„ 20·42202	„	6 16·75	—3 2·32
4.	„ 22·55235	„	6 14·60	—2 59·89
5.	„ 23·45263	„	6 17·31	—3 1·27
6.	„ 24·49454	„	6 12·54	—2 59·75
7.	April 6·48468	„	6 15·08	—3 3·18.

Es wurden nun sechs Normalorte in der Weise gebildet, dass von den früheren der zweite und dritte in einen zusammenzogen, die übrigen beibehalten wurden; der sechste Ort wurde aus den Beobachtungen von 1871 gebildet. Ihre Werthe sind in Rectascension und Declination:

		α	δ
Nr. I.	1868, Oct. 11·0	15°18' 5"76	+0°31'20"73
„ II.	1868, Oct. 25·0	12 43 39·71	—0 3 43·05
„ III.	1869, Jan. 13·0	17 13 15·35	+5 15 48·57
„ IV.	1869, Jan. 17·0	18 16 10·54	+5 48 59·72
„ V.	1869, Febr. 8·0	24 53 42·44	+9 2 42·77
„ VI.	1871, März 23·0	187 57 54·13	+2 26 13·12.

Als Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung erhalten wir:

	(B—R) dα	(B—R) dδ
Nr. I.	+ 0"10	+ 0"41
„ II.	+ 3·47	— 0·36
„ III.	+ 0·20	— 2·49
„ IV	+ 4·16	— 3·64
„ V.	+ 0·14	— 0·31
„ VI.	+375·24	—181·02

Zur Verbesserung der Elemente wurden die Differentialformeln für $d\alpha$ und $d\delta$ benützt; es ergaben sich dabei die folgenden zwölf Gleichungen [1]:

$$+2\cdot1382\,dM \; +1\cdot4606\,d\omega \; +1\cdot4944\,d\Omega \; +0\cdot5185\,di$$
$$-0\cdot6632\,d\varphi \; +0\cdot0058\,da = +0\cdot10$$

$$+2\cdot0699\,dM \; +1\cdot4126\,d\omega \; +1\cdot4480\,d\Omega \; +0\cdot4772\,di$$
$$-0\cdot6387\,d\varphi \; +0\cdot0142\,da = +3\cdot47$$

$$+1\cdot2865\,dM \; +0\cdot8673\,d\omega \; +0\cdot8980\,d\Omega \; +0\cdot1780\,di$$
$$-0\cdot0010\,d\varphi \; -0\cdot0601\,da = +0\cdot20$$

$$+1\cdot2632\,dM \; +0\cdot8518\,d\omega \; +0\cdot8820\,d\Omega \; +0\cdot1668\,di$$
$$+0\cdot0365\,d\varphi \; -0\cdot0671\,da = +4\cdot16$$

$$+1\cdot1635\,dM \; +0\cdot7880\,d\omega \; +0\cdot8158\,d\Omega \; +0\cdot1118\,di$$
$$+0\cdot2389\,d\varphi \; -0\cdot1069\,da = +0\cdot14$$

$$+0\cdot8942\,dM \; +1\cdot2352\,d\omega \; +1\cdot2567\,d\Omega \; +0\cdot5090\,di$$
$$+0\cdot8387\,d\varphi \; -1\cdot1708\,da = +375\cdot24$$

$$+1\cdot0250\,dM \; +0\cdot7022\,d\omega \; +0\cdot6200\,d\Omega \; -1\cdot0754\,di$$
$$-0\cdot3942\,d\varphi \; +0\cdot0231\,da = +0\cdot41$$

$$+0\cdot9914\,dM \; +0\cdot6775\,d\omega \; +0\cdot5922\,d\Omega \; -0\cdot9860\,di$$
$$-0\cdot3599\,d\varphi \; +0\cdot0210\,da = -0\cdot36$$

$$+0\cdot6286\,dM \; +0\cdot4248\,d\omega \; +0\cdot3537\,d\Omega \; -0\cdot3696\,di$$
$$+0\cdot0353\,d\varphi \; -0\cdot0389\,da = -2\cdot49$$

$$+0\cdot6149\,dM \; +0\cdot4158\,d\omega \; +0\cdot3456\,d\Omega \; -0\cdot3471\,di$$
$$+0\cdot0539\,d\varphi \; -0\cdot0423\,da = -3\cdot64$$

$$+0\cdot5446\,dM \; +0\cdot3704\,d\omega \; +0\cdot3047\,d\Omega \; -0\cdot2382\,di$$
$$+0\cdot1456\,d\varphi \; -0\cdot0592\,da = -0\cdot31$$

$$-0\cdot4359\,dM \; -0\cdot5989\,d\omega \; -0\cdot5443\,d\Omega \; +1\cdot0492\,di$$
$$-0\cdot4380\,d\varphi \; +0\cdot5581\,da = -181\cdot02.$$

Aus diesen Gleichungen wurden nach der Methode der kleinsten Quadrate die folgenden sechs Gleichungen abgeleitet:

---

[1] Statt der Correction $d\pi$ der Länge des Perihels wurde $d\omega$, die Verbesserung der Periheldistanz (vom Knoten) berechnet, weil dadurch die Ausdrücke für $d\Omega$ etwas einfacher werden.

$$+17\cdot5540\,dM +12\cdot6371\,d\omega +12\cdot5956\,d\Omega +0\cdot0086\,di - 2\cdot1030\,d\varphi - 1\cdot5730\,da = +423\cdot616$$

$$+12\cdot6371\,dM + 9\cdot5547\,d\omega + 9\cdot5229\,d\Omega +0\cdot0037\,di - 0\cdot7826\,d\varphi - 1\cdot9709\,da = +578\cdot148$$

$$+12\cdot5956\,dM + 9\cdot5229\,d\omega + 9\cdot5278\,d\Omega +0\cdot3586\,di - 0\cdot7795\,d\varphi - 1\cdot9658\,da = +577\cdot050$$

$$+ 0\cdot0086\,dM + 0\cdot0037\,d\omega + 0\cdot3586\,d\Omega +4\cdot3708\,di + 0\cdot0637\,d\varphi - 0\cdot0368\,da = +5\cdot699$$

$$- 2\cdot1030\,dM - 0\cdot7826\,d\omega - 0\cdot7795\,d\Omega +0\cdot0637\,di + 2\cdot1119\,d\varphi - 1\cdot2962\,da = +391\cdot180$$

$$- 1\cdot5730\,dM - 1\cdot9709\,d\omega - 1\cdot9658\,d\Omega -0\cdot0368\,di - 1\cdot2962\,d\varphi + 1\cdot7096\,da = -540\cdot324$$

Die Auflösung dieser Gleichungen führt zu folgenden an die Elemente anzubringenden Correctionen:

dM	$-\ 76''92$
$d\omega$	$+\ 12\cdot73$
$d\Omega$	$+\ 76\cdot66$
di	$-\ 6\cdot74$
$d\varphi$	$-\ 60\cdot89$
da	$-330\cdot32$.

Die verbesserten Elemente sind also:

Berührende Ellipse für 1869. Jan. 0·0.
1868, Oct. 11. 0ʰ mittl. Berl. Zeit.

M	352°	12′	27″92	
π	27	14	53·45	mittl. Äq. 1870·0.
Ω	63	16	37·78	
i	4	38	24·20	
φ	10	32	18·78	
$\lg a$	0·4997838.			

In den Normalorten bleiben folgende Fehler (in Rectascension und Declination) zurück:

	(B—R) $d\alpha$	(B—R) $d\delta$
Nr. I.	$-3''64$	$-0''90$
„ II.	$+2\cdot66$	$+0\cdot23$
„ III.	$+0\cdot54$	$+0\cdot15$
„ IV.	$+4\cdot01$	$-1\cdot17$
„ V.	$-2\cdot99$	$+1\cdot19$
„ VI.	$-0\cdot50$	$-0\cdot32$.

Mittelst der so gewonnenen Elemente wurden die Störungen in Äquatorialcoordinaten und zwar mit Rücksicht auf Jupiter, Saturnus und Mars berechnet. Die Rechnung wurde nach der von Enke (Berl. Jahrb. 1858) entwickelten Methode, und zwar von 30 zu 30 Tagen vom Jahre 1868—1872 durchgeführt. Die Resultate der Rechnung enthält die folgende Tabelle, wo ξ, η, ζ die Änderung der x, y, z-Coordinate, auf die Ebene des Äquators bezogen, in Einheiten der siebenten Decimalstelle bedeutet.

Störungen der Dione.

Datum			ξ	η	ζ
1868	Sept.	17	+ 1882	— 85	— 15
	Oct.	17	919	66	21
	Nov.	16	317	31	12
	Dec.	16	34	4	2
1869	Jän.	15	32	4	2
	Febr.	14	278	41	20
	März	16	737	116	58
	April	15	1375	224	117
	Mai	15	2156	361	194
	Juni	14	3045	529	291
	Juli	14	4008	733	411
	Aug.	13	5015	986	558
	Sept.	12	6047	1311	744
	Oct.	12	7092	1730	979
	Nov.	11	8149	2272	1278
	Dec.	11	9229	2964	1655
1870	Jän.	10	10352	3830	2124
	Febr.	9	11548	4890	2696
	März	11	12853	6157	3381
	April	10	14308	7639	4187
	Mai	10	15958	9336	5115
	Juni	9	17849	11240	6166
	Juli	9	20030	13336	7337
	Aug.	8	22545	15602	8620
	Sept.	7	25440	18010	10004
	Oct.	7	28754	20525	11477
	Nov.	6	32527	23107	13021
	Dec.	6	36790	25710	14618
1871	Jän.	5	41574	28285	16245
	Febr.	4	46899	30777	17878
	März	6	52785	33129	19490
	April	5	59243	35279	21053

Datum			ξ	η	ζ
1871	Mai	5	+ 66278	— 37165	— 22536
	Juni	4	73888	38719	23908
	Juli	4	82065	39873	25134
	Aug.	3	90792	40557	26179
	Sept.	2	100045	40698	27006
	Oct.	2	109791	40224	27579
	Nov.	1	119989	39060	27857
	Dec.	1	130585	37133	27801
	Dec.	31	141519	34370	27371
1872	Jän.	30	152717	30699	26527
	Febr.	29	164092	26051	25228
	März	30	175548	20359	23434
	April	29	186971	13560	21107
	Mai	29	198235	— 5600	18210
	Juni	28	209196	+ 3571	14707
	Juli	28	219696	13990	10568
	Aug.	27	229557	25684	5767
	Sept.	26	238586	38661	— 282
	Oct.	26	246570	52912	+ 5897
	Nov.	25	253280	68402	12774
	Dec.	25	258471	85069	20338
1873	Jän.	24	261887	102817	28564

Mit Benützung dieser Störungen wurden die Normalorte noch einmal berechnet, wobei sich folgende Abweichungen von den Beobachtungen ergaben:

	(B—R) $d\alpha$	(B—R) $d\delta$
Nr. I.	—3·72	—0·94
„ II.	+2·62	+0·19
„ III.	+0·53	+0·15
„ IV.	+4·01	—1·17
„ V.	—3·00	+1·19
„ VI.	+8·18	—4·23.

Man sieht, dass eine weitere Verbesserung der Elemente noch möglich und wünschenswerth ist. Bei der Aufstellung der diesbezüglichen Gleichungen können die früheren Coëfficienten der Unbekannten, *dM* u. s. w. ohneweiters beibehalten werden, so dass die linke Seite der Gleichungen, die oben aufgestellt wurden, unverändert bleibt; auf die rechte Seite des Gleichheits-

zeichens kommen in dem ersten System (von zwölf Gleichungen) die eben angeführten Differenzen, in dem zweiten System aber

statt	+423·616	die Zahl	+ 8·132
"	+578·148	" "	+11·903
"	+577·050	" "	+11·924
"	+ 5·699	" "	+ 0·366
"	+391·180	" "	+10·787
"	—540·324	" "	—11·946

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt nun die folgenden Correctionen der Elemente:

dM	+35"91
$d\omega$	—63·30
$d\Omega$	+ 8·21
di	— 0·88
$d\varphi$	— 4·78
da	—41·13

mit den übrig bleibenden Fehlern

	(B—R) $d\alpha$	(B—R) $d\delta$
Nr. I.	—2"78	—0"27
" II.	+3·78	+0·89
" III.	—0·45	—0·19
" IV.	+2·89	—1·55
" V.	—4·75	+0·63
" VI.	+0·26	—0·23.

Die wahrscheinlichsten Elemente der Dione sind also nach den bisher vorliegenden Beobachtungen:

Berührende Ellipse für 1869, Jan. 0·0
1868, Oct. 11 0^h mittl. Berl. Zeit.

M	352° 13′ 3"83	
π	27 13 58·36	mittl. Äq. 1870·0
Ω	63 16 45·99	mittl. Äq. 1870·0
i	4 38 23·32	mittl. Äq. 1870·0
φ	10 32 14·00	
lg a	0·4997564.	

Aus diesen Elementen berechnen sich nun die folgenden Ephemeriden:

Ephemeride für das Jahr 1872.

0^h mittl. Berl. Zeit	A. R. (106)	Decl. (106)	Log. Entfern. (106) — ♁	Log. Entfern. (106) — ☉
Jän. 11.	$15^h 30^m 43^s$	—17°29'2	0·6195	0·5696
Jän. 31.	15 49 1	18 35·1	0·5890	0·5685
Febr. 20.	16 3 6	19 22·0	0·5529	0·5672
März 11.	16 11 23	19 50·2	0·5131	0·5657
März 31.	16 12 23	20 1·4	0·4735	0·5640
April 20.	16 5 29	19 54·5	0·4397	0·5621
Mai 10.	15 52 4	19 30·9	0·4189	0·5601
Mai 30.	15 36 12	18 57·7	0·4164	0·5579
Juni 19.	15 23 3	18 29·6	0·4323	0·5555
Juli 9.	15 16 26	18 21·7	0·4611	0·5529
Juli 29.	15 17 34	18 40·5	0·4960	0·5501
Aug. 18.	15 25 56	19 23·6	0·5312	0·5472
Sept. 7.	15 40 25	20 23·9	0·5634	0·5441
Sept. 27.	15 59 56	21 32·5	0·5906	0·5408
Oct. 17.	16 23 15	22 40·9	0·6119	0·5373
Nov. 6.	16 49 44	23 41·6	0·6267	0·5336
Nov. 26.	17 18 31	24 28·4	0·6350	0·5298
Dec. 16.	17 48 51	24 56·8	0·6364	0·5258
Dec. 36.	18 19 54	25 4·3	0·6310	0·5217

Ephemeride für die Opposition 1872.

12^h mittl. Berl. Zt.	A. R. (106)	Differ.	Decl. (106)	Differ.	Log. Entfernung (106) — ♁	Aberr.-Zeit
Apr. 28.	$16^h 0^m 23^s 87$	—39·97	—19°46' 18"7	+1' 9"2	0·428830	$22^h 16^m$
29.	15 59 43·90	40·73	19 45 9·5	1 11·6	0·427736	22 13
30.	15 59 3·17	41·48	19 43 57·9	1 13·9	0·426682	22 10
Mai 1.	15 58 21·69	42·19	19 42 44·0	1 16·0	0·425670	22 7
2.	15 57 39·50	42·86	19 41 28·0	1 18·1	0·424700	22 4
3.	15 56 56·64	43·50	19 40 9·9	1 20·2	0·423773	22 1
4.	15 56 13·14	44·11	19 38 49·7	1 22·2	0·422885	21 58
5.	15 55 29·03	44·66	19 37 27·5	1 24·2	0·422047	21 56
6.	15 54 44·37	45·19	19 36 3·3	1 26·0	0·421254	21 53
7.	15 53 59·18	—45·68	19 34 37·3	+1 27·8	0·420506	21 51

12ʰ mittl. Berl. Zt.	A. R. (106)	Differ.	Decl. (106)	Differ.	Log. Entfernung (106) — ♁	Aberr.-Zeit
Mai 8.	15ʰ53ᵐ13ˢ50	—46ˢ13	—19°33′ 9″5	+1′29″5	0·419805	21ᵐ 49ˢ
9.	15 52 27·37	46·52	19 31 40·0	1 31·1	0·419151	21 47
10.	15 51 40·85	46·89	19 30 8·9	1 32·6	0·418544	21 45
11.	15 50 53·96	47·21	19 28 36·3	1 34·0	0·417984	21 43
12.	15 50 6·75	47·49	19 27 2·3	1 35·3	0·417472	21 42
13.	15 49 19·26	47·73	19 25 27·0	1 36·5	0·417008	21 40
14.	15 48 31·53	47·93	19 23 50·5	1 37·6	0·416593	21 39
15.	15 47 43·60	48·07	19 22 12·9	1 38·6	0·416227	21 38
16.	15 46 55·53	48·19	19 20 34·3	1 39·5	0·415909	21 37
17.	15 46 7·34	—48·26	19 18 54·8	+1 40·2	0·415641	21 36
18.	15 45 19·08	48·28	—19 17 14·6	1 40·8	0·415423	21 35
☍ 19.	15 44 30·80	48·27	19 15 33·8	1 41·4	0·415254	21 35
20.	15 43 42·53	48·22	19 13 52·4	1 41·8	0·415132	21 35
21.	15 42 54·31	48·13	19 12 10·6	1 42·1	0·415060	21 34
22.	15 42 6·18	48·00	19 10 28·5	1 42·4	0·415037	21 34
23.	15 41 18·18	47·83	19 8 46·1	1 42·5	0·415062	21 34
24.	15 40 30·35	47·63	19 7 3·6	1 42·4	0·415136	21 35
25.	15 39 42·72	47·36	14 5 21·2	1 42·2	0·415258	21 35
26.	15 38 55·36	47·08	19 3 39·0	1 42·0	0·415429	21 36
27.	15 38 8·28	—46·76	19 1 57·0	+1 41·7	0·415648	21 37
28.	15 37 21·52	46·39	—19 0 15·3	1 41·2	0·415915	21 38
29.	15 36 35·13	45·98	18 58 34·1	1 40·5	0·416229	21 39
30.	15 35 49·15	45·55	18 56 53·6	1 39·6	0·416590	21 40
31.	15 35 3·60	45·06	18 55 14·0	1 38·7	0·416999	21 41
Juni 1.	15 34 18·54	44·54	18 53 35·3	1 37·6	0·417454	21 42
2.	15 33 34·00	43·98	18 51 57·7	1 36·4	0·417955	21 43
3.	15 32 50·02		18 50 21·3		0·418502	21 45

Opposition, Mai 19, 13ʰ.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXV. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

2.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

IV. SITZUNG VOM 1. FEBRUAR 1872.

Herr Prof. L. Gegenbauer in Krems übersendet eine Abhandlung: „Beiträge zur Theorie der linearen Differentialgleichungen."

Herr Dr. Hermann Fritz in Zürich übermittelt das Manuscript eines von ihm zusammengestellten „Nordlicht-Kataloges".

Herr Prof. Dr. H. Hlasiwetz macht eine vorläufige Mittheilung über eine vom Herrn Prof. Weselsky entdeckte neue Säure aus der Aloë.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique: Mémoires. Tome XXXVIII. Bruxelles, 1871; 4°. — Mémoires couronnés in 4°. Tomes XXXV & XXXVI. (1870 & 1871.) — Annuaire. 1871. (XXXVII° Année.) Bruxelles; 12°. — Compte rendu des séances de la Commission R. d'histoire. III° Série. Tome XII°, 1°r à III° Bulletins. Bruxelles, 1870; 8°. Biographie Nationale. Tome III°, 1re partie. Bruxelles, 1870; gr. 8°. — Observations des phénomènes périodiques pendant l'année 1869. 4°.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. September, October & November 1871. Berlin; 8°.

Annalen der Chemie & Pharmacie, von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R. Band LXXXV, Heft 1. Leipzig & Heidelberg, 1872; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrg., Nr. 2—4. Wien, 1872; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1874 (Bd. 79. 2). Altona, 1872; 4°.

Bericht über den Handel, die Industrie und die Verkehrsverhältnisse in Nieder-Österreich während des Jahres 1870. Erstattet von der Handels- und Gewerbekammer in Wien. Wien, 1871; 8°.

Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1871 & 1872. Berlin, 1869 & 1870; 8°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome XLII. Nrs. 168. Génève, Lausanne, Paris, 1871; 8°.

Comitato, R., Geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1871, Nr. 9—12. Firenze; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nrs. 1—2. Paris 1872; 4°.

Ferdinandeum für Tirol & Vorarlberg: Zeitschrift. 3. Folge. XVI. Heft. Innsbruck, 1871; 8°.

Genootschap, Bataviaasch, van Kunsten en Wetenschappen: Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde. Deel XIX. (Zevende serie. Deel I), Aflev. 1—6. Batavia & 'sHage, 1869—1870; 8°. — Notulen. Deel VII (1869), Nr. 2—3. Batavia, 1869 & 1870; 8°.

Gesellschaft, österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VII. Band, Nr. 1—2. Wien, 1872; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrg., Nr. 4. Wien, 1872; 4°.

Istituto, R., Veneto di Scienze, Lettere ed Arti: Atti. Tomo I°, Serie IV^a, disp. 1^a. Venezia, 1871—72; 8°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band IV, 10. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 2. Graz, 1872; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 1. Wien; 8°.

Mittheilungen des k. k. technischen und administrativen Militär-Comité. Jahrgang 1872, 1. Heft. Wien; 8°.

— aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 18. Band, 1872, I. Gotha; 4°.

Nature. Nrs. 116—117, Vol. V. London, 1872; 4°.

Observatoire Royal de Bruxelles: Annales. Tome XX. Bruxelles, 1870; 4⁰.

Observatory of Trinity College, Dublin: Astronomical Observations and Researches made at Dunsink. Firt Part. Dublin, 1870; 4⁰.

Quetelet, Ad., Anthropométrie ou mesure des différentes facultés de l'homme. Bruxelles, Leipzig & Gand, 1870; gr. 8⁰.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1871, Nr. 17—18; Jahrgang 1872, Nr. 1. Wien; 4⁰.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXI. Band, Jahrg. 1871, November & December-Heft. Wien; 8⁰.

„Revue politique et littéraire", et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger". Iʳᵉ Année (2ᵉ Série), Nrs. 29—31. Paris & Bruxelles, 1872; 4⁰.

Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux: Mémoires. Tome VI, Sig. 10—29 (1868); Tome VIII, 1ᵉʳ Cahier (1870). Paris & Bordeaux; 8⁰.

— Impériale de médecine de Constantinople: Gazette médicale d'Orient. XVᵉ Année, Nrs. 2—10. Constantinople, 1871—1872; 4⁰.

— Entomologique de France: Annales. IVᵉ Série. Tome Xᵉ (1870), et Partie supplémentaire du tome Xᵉ (1871). Paris; 8⁰.

— Philomatique de Paris: Bulletin. Tome VIIᵉ, Avril—Décembre 1870. Paris; 8⁰

— des Ingénieurs civils: Mémoires et Compte rendu des travaux. 3ᵉ Série. 23ᵉ Année, 3ᵉ—4ᵉ Cahiers. Paris, 1870; 8⁰.

Society, The Asiatic, of Bengal: Journal. Part I, Nr. 4. 1870; Part I, Nr. 1. 1871; Part II, Nr. 2. 1871. Calcutta; 8⁰. — Proceedings. 1871, Nrs. II, V, VI, VII. Calcutta; 8⁰.

— The Royal Geological, of Ireland: Journal. Vol. XIII, Part 1. (Vol. III, Part. 1. New Series.) 1870—71. London & Dublin, 1871; 8⁰

— The Royal Astronomical, of London: Memoirs. Part I, Vol. XXXIX, 1870—1871. London, 1871; 4⁰; A General Index to the first 38 Volumes of the Memoirs. London, 1871; 8⁰. — Monthly Notices. Vol. XXXI. London, 1871; 8⁰. — Williams, John, Observations of Comets, from B. C. 611 to A. D.

1840. Extracted frome the Chinese Annals. London, 1871; 4°.
— Brünnow, Francis, Tables of Iris. Dublin, 1869; 4°.

Vereeniging, K. Natuurkundige in Nederlandsch Indië: Natuurkundige Tijdschrift. Deel XXIX (VI. Serie, Deel IV), Aflev. 5—6; Deel XXX (VI. Serie, Deel V), Aflev. 1—2; Deel XXXI (VII. Serie, Deel I), Aflev. 1—3. Batavia & 's Gravenhage, 1867 & 1869; 8°.

Vierteljahresschrift, österr., für wissenschaftliche Veterinärkunde. XXXVI. Band, 2. Heft. (Jahrgang 1871. IV.) Wien; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 3—4. Wien, 1872; 4°.

Zeitschrift für Chemie von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Bd., 14. Heft. Leipzig, 1871; 8°.
— des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIII. Jahrgang (1871), 17. & 18. Heft; XXIV. Jahrgang, 1. Heft. Wien, 1872; 4°.

V. SITZUNG VOM 8. FEBRUAR 1872.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Note über die Bessel'schen Functionen zweiter Art", vom Herrn Prof. L. Gegenbauer in Krems.

„Über die Temperatur Constante", vom Herrn Prof. Simon Šubić in Graz.

Herr Prof. L. Boltzmann in Graz übersendet die vorläufige Anzeige einer Abhandlung, in welcher der Beweis geliefert wird, dass die von Maxwell gefundene die einzig mögliche schliessliche Zustandsvertheilung unter einatomigen Gasmolecülen ist.

Herr Prof. Dr. Jul. Wiesner übermittelt einen Bericht über die von der Nordpolfahrt der Herren Weyprecht und Payer mitgebrachten Treibhölzer aus dem nördlichen Polarmeere, welche ihm von der k. Akademie zur Untersuchung übergeben worden sind.

Herr Dr. A. Boué legt eine Abhandlung: „Über die Mächtigkeit der Formationen und Gebilde" vor.

Herr Prof. Dr. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung: „Über das schwefelsaure Äthylendiamin".

Herr stud. phil. Herm. Frombeck übergibt eine Abhandlung, betitelt: „Die Analoga der Fourier'schen Integrale".

Herr Prof. Dr. J. Seegen überreicht eine Abhandlung: „Über eine Methode, um minimale Mengen Zucker im Harne mit grösserer Bestimmtheit nachzuweisen".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei: Atti. Anno XXV, Sess. 1ª. Roma, 1872; 4°.

Akademie, Südslavische, der Künste und Wissenschaften zu Agram: Rad. Knjiga XVII. U Zagrebu, 1871; 8°.

Anales del Museo público de Buenos-Aires. Entrega VIIª (Iª del tomo IIº). Buenos Aires, Paris & Halle, 1870; 4º.

Becker, Friedrich, Impfen oder Nichtimpfen! Berlin, 1872; 8º.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nrs. 3—4. Paris, 1872; 4º.

Gelehrten-Gesellschaft, k. k. in Krakau: Rocznik, Tom XVIII & XIX. W Krakowie, 1870 & 1871; 8º. — Sprawozdanie komisyi fizyograficznéj. Tom V. W Krakowie, 1871; 8º. — Historya wyzwolonéj rzeczypospolitéj wpadającej pod jarzmo domowe za panowania Jana Kaźmierza. (1655—1660.) Tom I. Kraków, 1870; 8º. Lud. Serya V. Krakowskie. Część I. Kraków, 1871; 8º. — Wykład Bajik Krasickiego Wraz z tekstem tychże przez G. Ehrenberga. Kraków, 1871; 8º.

Gelehrten-Verein, serbischer, zu Belgrad: Glasnik. XXX. XXXI. Band. Belgrad, 1871; 8º.

Gesellschaft, Naturforschende, in Danzig. Schriften. N. F. II. Bandes, 3. & 4. Heft. Danzig, 1871; 4º.

— — zu Freiburg i. Br.: Festschrift zur Feier ihres 50jährigen Jubiläums. Freiburg i. Br., 1871; 8º.

— der Wissenschaften, K., zu Kopenhagen: Skrifter. 5 Raekke, histor. og philos. Afd., 4. Bd. IV—VI; naturvidensk. og mathem. Afd., 8. Bd. VI—VII, 9. Bd. I—IV. Kjøbenhavn, 1869—1871; 4º. — Oversigt. 1868, Nr. 6; 1869, Nr. 3—4; 1870, Nr. 1—3; 1871, Nr. 1. Kjøbenhavn; 8º. — *Symbolae Caricologicae. Autore S. Drejer. Hafniae, 1844; folio.*

— Astronomische, in Leipzig: Vierteljahrsschrift. VI. Jahrgang, 4. Heft. Leipzig, 1871; 8º.

— Geographische, in Wien: Mittheilungen. Bd. XV (neuer Folge V), Nr. 1. Wien, 1872; 8º.

Hinrichs, Gustavus, The School Laboratory. Vol. I, Nrs. 3 & 4. Iowa City, 1871; 8º.

Instituut, K. Nederlandsch Meteorologisch: Nederlandsch Meteorologisch Jaarboek voor 1869. II. Deel; voor 1870, I. Deel. Utrecht, 1870; Quer-4º.

Jena, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Halbjahr 1871. 4º & 8º.

Königberg, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1871. 4° & 8°.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 3. Graz, 1872; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen & Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 2. Wien; 8°.

Laube, Gust. C., Die Echinoiden der österr.-ungar. oberen Tertiärablagerungen. (Abhdlgn. der k. k. geol. Reichsanstalt, Bd. V, Heft Nr. 3.) Wien, 1871; 4°.

Musée Teyler: Archives. Vol. III, fasc. 2ᵉ. Harlem, Paris & Leipzig, 1871; 4°.

Nature. Nr. 118, Vol. V. London, 1872; 4°.

Observatory, The Royal, Greenwich: Results of the Magnetical and Meteorological Observations, 1868. — Results of the Astronomical Observations, 1868. — Breen, Correction of Bouvard's Elements of Jupiter and Saturn. (Appendix I. to Greenwich Observations, 1868.) — New Seven-Year Catalogue of 2760 Stars etc. (Appendix II. to Greenwich Observations, 1868.) 4°.

Radcliffe Observatory: Results of Astronomical and Meteorological Observations, in the Year 1868. Vol. XXVIII. Oxford, 1871; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1871. XXI. Band, Nr. 4. Wien; 4°.

Report on Barraks and Hospitals with Descriptions of Military Posts. Washington, 1870; 4°.

Reports on Observations of the Total Solar Eclipse of December 22, 1870. Washington, 1871; 4°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 5. Wien, 1872; 4°.

Anales del Museo público de Buenos-Aires. Entrega VII^a (I^a del tomo II°). Buenos Aires, Paris & Halle, 1870; 4°.

Becker, Friedrich, Impfen oder Nichtimpfen! Berlin, 1872; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nrs. 3—4. Paris, 1872; 4°.

Gelehrten-Gesellschaft, k. k. in Krakau: Rocznik, Tom XVIII & XIX. W Krakowie, 1870 & 1871; 8°. — Sprawozdanie komisyi fizyograficznéj. Tom V. W Krakowie, 1871; 8°. — Historya wyzwolonéj rzeczypospolitéj wpadającej pod jarzmo domowe za panowania Jana Każmierza. (1655—1660.) Tom I. Kraków, 1870; 8°. Lud. Serya V. Krakowskie. Część I. Kraków, 1871; 8°. — Wykład Bajik Krasickiego Wraz z tekstem tychże przez G. Ehrenberga. Kraków, 1871; 8°.

Gelehrten-Verein, serbischer, zu Belgrad: Glasnik. XXX. XXXI. Band. Belgrad, 1871; 8°.

Gesellschaft, Naturforschende, in Danzig. Schriften. N. F. II. Bandes, 3. & 4. Heft. Danzig, 1871; 4°.

— — zu Freiburg i. Br.: Festschrift zur Feier ihres 50jährigen Jubiläums. Freiburg i. Br., 1871; 8°.

— der Wissenschaften, K., zu Kopenhagen: Skrifter. 5 Raekke, histor. og philos. Afd., 4. Bd. IV—VI; naturvidensk. og mathem. Afd., 8. Bd. VI—VII, 9. Bd. I—IV. Kjøbenhavn, 1869—1871; 4°. — Oversigt. 1868, Nr. 6; 1869, Nr. 3—4; 1870, Nr. 1—3; 1871, Nr. 1. Kjøbenhavn; 8°. — *Symbolae Caricologicae. Autore S. Drejer. Hafniae, 1844; folio.*

— Astronomische, in Leipzig: Vierteljahrsschrift. VI. Jahrgang, 4. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

— Geographische, in Wien: Mittheilungen. Bd. XV (neuer Folge V), Nr. 1. Wien, 1872; 8°.

Hinrichs, Gustavus, The School Laboratory. Vol. I, Nrs. 3 & 4. Iowa City, 1871; 8°.

Instituut, K. Nederlandsch Meteorologisch: Nederlandsch Meteorologisch Jaarboek voor 1869. II. Deel; voor 1870, I. Deel. Utrecht, 1870; Quer-4°.

Jena, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Halbjahr 1871. 4° & 8°.

Königberg, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1871. 4° & 8°.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 3. Graz, 1872; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen & Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 2. Wien; 8°.

Laube, Gust. C., Die Echinoiden der österr.-ungar. oberen Tertiärablagerungen. (Abhdlgn. der k. k. geol. Reichsanstalt, Bd. V, Heft Nr. 3.) Wien, 1871; 4°.

Musée Teyler: Archives. Vol. III, fasc. 2e. Harlem, Paris & Leipzig, 1871; 4°.

Nature. Nr. 118, Vol. V. London, 1872; 4°.

Observatory, The Royal, Greenwich: Results of the Magnetical and Meteorological Observations, 1868. — Results of the Astronomical Observations, 1868. — Breen, Correction of Bouvard's Elements of Jupiter and Saturn. (Appendix I. to Greenwich Observations, 1868.) — New Seven-Year Catalogue of 2760 Stars etc. (Appendix II. to Greenwich Observations, 1868.) 4°.

Radcliffe Observatory: Results of Astronomical and Meteorological Observations, in the Year 1868. Vol. XXVIII. Oxford, 1871; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1871. XXI. Band, Nr. 4. Wien; 4°.

Report on Barraks and Hospitals with Descriptions of Military Posts. Washington, 1870; 4°.

Reports on Observations of the Total Solar Eclipse of December 22, 1870. Washington, 1871; 4°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 5. Wien, 1872; 4°.

Über das schwefelsaure Äthylendiamin.

Von dem w. M. **Viktor v. Lang.**

(Mit 2 Holzschnitten.)

Vor kurzem erhielt ich durch die Güte des Herrn Prof. A. W. Hofmann in Berlin sehr schön ausgebildete Krystalle von schwefelsaurem Äthylendiamin zur Untersuchung. Dieselben gehören ins tetragonale System, zeigen aber die Erscheinungen der Circularpolarisation, ein Fall der bis jetzt blos einmal beobachtet worden war. Descloizeaux nämlich hat gefunden, dass dasjenige schwefelsaure Strychnin, welches tetragonal ist, auch circularpolarisirt, eine Eigenschaft, die dasselbe auch in der Lösung beibehält.

Das schwefelsaure Äthylendiamin gehört also auch in physikalischer Hinsicht zu den interessantesten Verbindungen.

Die krystallographische und optische Untersuchung desselben hat Folgendes ergeben:

System: tetragonal.

Elemente: $a:c = 0{\cdot}6692:1$.

Beobachtete Formen: 001, 101, 201, 111, 221.

Normalenwinkel:

	Gerechnet	Beobachtet
101.001 =	56° 12′	56° 12′
201.001	71 30	
201.101	15 18	
101.10$\bar{1}$	67 36	
201.20$\bar{1}$	37 0	

	Gerechnet	Beobachtet
111.001	64° 40′	64° 42′
221.001	76 41	76 34
111.221	12 1	
$111.11\bar{1}$	50 40	
$221.22\bar{1}$	26 38	
101.011	71 58	
101.111	39 43	
$111.1\bar{1}1$	79 26	
201.111	42 8	
201.021	84 16	
201.221	43 27	
$221.2\bar{2}1$	86 54	87 18.

Fig. 1.

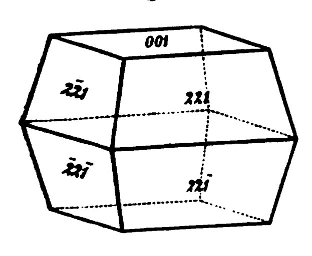
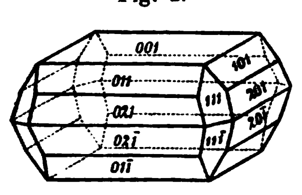


Fig. 2.



Combination: Die Krystalle haben zweierlei Habitus, wie dies in den Figuren 1 und 2 dargestellt ist. Entweder sind es blos Combinationen der zwei Formen 221 und 001 oder es sind Combinationen der Formen 111, 101, 201, 001. Gewöhnlich herrscht die Fläche 001 sehr vor, so dass die Krystalle dadurch tafelförmig werden.

Theilbarkeit ausgezeichnet parallel der Fläche 001.

Optisches Verhalten. Die Krystalle haben positiven Charakter und zeigen längs der Axe Circularpolarisation, verhalten sich also ganz so wie der Quarz. Eine beiläufig 0·89 Millimeter dicke Platte drehte beim Lichte der Natriumflamme die Polarisationsebene um

13° 45′, was für 1 Millimeter 15° 30′ gibt. Die Drehung beträgt also beiläufig drei Viertel von der des Quarzes.

Die untersuchten Krystalle waren theils rechts-, theils linksdrehend. An denselben konnten weder hemiëdrische noch hemisymmetrische Formen wahrgenommen werden.

Die Lösung scheint die Eigenschaften der Circularpolarisation nicht zu besitzen. In dieser Hinsicht unterscheidet sich also diese Verbindung von dem schwefelsauren Strychnin.

Note über die Bessel'schen Functionen zweiter Art.

Von **Leopold Gegenbauer** in Krems.

Carl Neumann hat in seinem Schriftchen: „Theorie der Bessel'schen Functionen" die Functionen $O^{(n)}_{(x)}$, welche zu den Bessel'schen Functionen $J^{(n)}_{(x)}$ in analoger Beziehung stehen, wie die Kugelfunctionen zweiter Art zu denen erster Art, als Bessel'sche Functionen zweiter Art eingeführt. Da die Bessel'schen Functionen $J^{(n)}_{(x)}$ durch die Gleichungen:

$$1)\quad 2[J^{(n)}_{(x)}]' = J^{(n-1)}_{(x)} - J^{(n+1)}_{(x)}$$

$$2)\quad \frac{2n}{x} J^{(n)}_{(x)} = J^{(n-1)}_{(x)} + J^{(n+1)}_{(x)}$$

vollkommen bestimmt sind, so liegt es nahe zu untersuchen, ob auch für die Bessel'schen Functionen zweiter Art ähnliche Relationen bestehen. Eine solche wurde schon von C. Neumann gefunden, sie ist:

$$3)\quad 2[O^{(n)}_{(x)}]' = O^{(n-1)}_{(x)} - O^{(n+1)}_{(x)}.$$

Wir werden nun in der vorliegenden Note zeigen, dass, so lange n eine gerade Zahl ist, auch für die Functionen $O^{(n)}_{(x)}$ eine Relation besteht, welche der in 2) ausgesprochenen für die Functionen $J^{(n)}_{(x)}$ geltenden ähnlich ist.

Es sei n eine gerade positive Zahl und φ und ψ seien zwei Functionen, welche den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$4)\quad \varphi'' + \frac{3}{x}\varphi' + \left(1 - \frac{n^2-1}{x^2}\right)\varphi = \frac{1}{x}$$

$$5)\quad \psi'' + \frac{3}{x}\psi' + \left(1 - \frac{n(n+2)}{x^2}\right)\psi = \frac{n+1}{x^2}$$

genügen. Benützt man die Gleichungen:

$$6)\quad \varphi = x^{n-1}.\Phi$$

$$7)\quad \psi = x^{n}.\Psi$$

zur Transformation der Gleichungen 4) und 5), so erhält man:

$$8)\quad \Phi'' + \frac{2n+1}{x}\Phi' + \Phi = \frac{1}{x^n}$$

$$9)\quad \Psi'' + \frac{2n+3}{x}\Psi' + \Psi = \frac{n+1}{x^{n+2}}.$$

Durch Differentiation der Gleichung 8) entsteht die neue Gleichung:

$$10)\quad \Phi''' + \frac{2n+1}{x}\Phi'' + \left(1 - \frac{2n+1}{x^2}\right)\Phi' = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Schreibt man die Gleichung 9) in folgender Form:

$$11)\quad (x.\Psi)'' + \frac{2n+1}{x}(x.\Psi)' + \left(1 - \frac{2n+1}{x^2}\right)(x.\Psi) = \frac{n+1}{x^{n+1}},$$

so ersieht man, dass die Function Ψ durch die Function Φ bestimmt werden kann. Die Gleichungen 10) und 11) gehen nämlich in einander über, wenn man:

$$12)\quad \Psi = -\frac{n+1}{nx}\Phi'$$

setzt. Durch Verbindung der Gleichungen 6), 7) und 12) erhält man die neue Gleichung:

$$13)\quad \psi = \frac{n+1}{n}\left[\frac{n+1}{x}\varphi - \varphi'\right].$$

Da die Functionen $O^{(n)}_{(x)}$ particuläre Integrale der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$14)\quad y'' + \frac{3}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2-1}{x^2}\right)y = g_n$$

sind, wo g_n für gerade n durch die Gleichung:

$$15)\quad g_n = \frac{1}{x},$$

für ungerade n aber durch die Gleichung:

$$16)\quad g_n = \frac{n}{x^2}$$

bestimmt wird, so sind $O_{(x)}^{(n)}$ und $O_{(x)}^{(n+1)}$, wenn n eine gerade positive Zahl ist, Functionen, welche den Gleichungen 4), 5) und also auch 13) genügen. Man hat daher:

$$17)\quad O_{(x)}^{(n+1)} = \frac{n+1}{n}\left[\frac{n-1}{x}\, O_{(x)}^{(n)} - [O_{(x)}^{(n)}]'\right].$$

Durch Vereinigung der Gleichungen 3) und 7) erhält man:

$$18)\quad \frac{2(n^2-1)}{x}\, O_{(x)}^{(n)} = (n+1)\, O_{(x)}^{(n-1)} + (n-1)\, O_{(x)}^{(n+1)}.$$

Dies ist die oben erwähnte der Gleichung 2) ähnliche für die Functionen $O_{(x)}^{(n)}$ bei geradem n giltige Relation.

VI. SITZUNG VOM 22. FEBRUAR 1872.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Über *Castanea vesca* und ihre vorweltliche Stammart", vom Herrn Prof. Dr. Freih. v. Ettingshausen in Graz.

„Untersuchungen aus dem medicinisch-chemischen Laboratorium der Universität Innsbruck: 4. Untersuchungen über die Gallenfarbstoffe (III. Abhandlung); 5. Über das Verhalten der Oxybenzoësäure und Paraoxybenzoësäure in der Blutbahn", beide vom Herrn Prof. R. Maly in Innsbruck.

„Über den Einfluss der Bewegung der Tonquelle auf die Tonhöhe", vom Herrn Prof. L. Gegenbauer in Krems.

Herr Director Dr. J. Stefan überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Untersuchungen über die Wärmeleitung in Gasen". (I. Abhandlung.)

Herr Prof. Dr. J. Petzval übergibt eine Abhandlung: „Theorie der Schwingungscurven", vom Herrn Dr. Felix Ritter v. Strzelecki, Prof. der Physik an der k. k. technischen Akademie in Lemberg.

Herr Director Dr. G. Tschermak legt eine Abhandlung: „Die Meteoriten von Shergotty und Gopalpur" vor.

Herr Dr. Sigm. Exner überreicht eine Abhandlung: „Über den Erregungsvorgang im Sehnervenapparat".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Annales des mines. VIe Série. Tome XIX. 3e Livraison de 1871; Tome XX. 4e Livraison de 1871. Paris; 8⁰.

Annuario marittimo per l'anno 1872. XXII. Annata. Trieste; 8⁰.

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrgang, Nr. 5—6. Wien, 1872; 8⁰.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1875 (Bd. 79. 5). Altona, 1872; 4⁰.

Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1874 etc. Berlin, 1872; 8°.

Beobachtungen, Schweizer. Meteorologische. August & September 1870; Januar, Februar & März 1871. Zürich; 4°.

Christiania, Universität: Schriften aus den Jahren 1869 & 1870. 8°, 4° & Folio.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nrs. 5—6. Paris, 1872; 4°.

Erlangen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1871. 4° & 8°.

Gesellschaft für Salzburgische Landeskunde: Mittheilungen. XI. Vereinsjahr 1871. Salzburg; 8°. — Die Grabdenkmäler von St. Peter und Nonnberg zu Salzburg. III. Abtheilung. Salzburg, 1871; 8°. — Schwarz, Karl Ritter v., Salzburgische Kulturgeschichte in Umrissen. Von F. V. Zillner. Salzburg, 1871; 8°.

Gesellschaft der Wissenschaften, Oberlausitzische: Neues Lausitzisches Magazin. XLVIII. Band, 2. Heft. Görlitz, 1871; 8°.

— Österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VII. Band, Nr. 3—4. Wien, 1872; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 6—8. Wien, 1872; 4°.

Istituto, R., Veneto di Scienze, Lettere ed Arti: Atti. Tomo I°, Serie IV^{a}, Disp. 2da. Venezia, 1871—72; 8°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. Gratis-Beilage: Virchow's Schrift „Nach dem Kriege". Leipzig; 8°.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 4. Graz, 1872; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 3—4. Wien; 8°.

Lotos. XXII. Jahrgang, Jänner 1872. Prag; 8°.

Marburg, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften seit dem Winter 1870/1. 4° & 8°.

Mittheilungen, Mineralogische, von G. Tschermak. Jahrgang 1871, Heft 2. Wien, 1872; kl. 4°.

Moniteur scientifique. Par Quesneville. 361e Livraison. (IIIe Serie, Tome II.) Paris, 1872; 4°.

Nature. Nrs. 119—120. Vol. V. London, 1872; 4°.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. VI, Nr. 2. Torino, 1872; 4°.

Plantamour, E., R. Wolf et A. Hirsch, Détermination télégraphique de la différence de longitude entre la station astronomique du Righi-Kulm et les observatoires de Zürich et de Neuchatel. Génève et Bale, 1871; 4°.

Programm der k. k. Forst-Akademie in Mariabrunn für das Studienjahr 1871/72. Wien, 1872; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1872, Nr. 2. Wien; 4°.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXII. Band, Jahrgang 1872, Jänner-Heft. Wien; 8°.

„Revue politique et littéraire“ et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger“. Ire Année. (2e Serie.) Nrs. 28, 32—34. Paris & Bruxelles, 1872; 4°.

Société Botanique de France: Bulletin. Tome XVII, Revue bibliographique D. Paris, 1870; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 6—7. Wien, 1872; 4°.

Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Band, 15. & 16. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

Über das Verhalten der Oxybenzoësäure und Paraoxybenzoësäure in der Blutbahn.

Von **Richard Maly.**

Zu den Säuren, von denen man weiss, dass sie sich im kreisenden Blute glycolliren, gehört auch nach einem Versuche von C. Bertagnini (Nuovo cimento I. 363) die Salicylsäure, sie gibt die Salicylursäure. Ich habe es mir bei dem nach dem neuesten Stande der Chemie so vorzüglich den aromatischen Isomeren zugewendeten Studium interessant gedacht, auch das Verhalten im Blute nach Einverleibung in den Magen an einer Reihe isomerer Säuren zu prüfen. Hiezu schienen sich die Säuren

$$\Theta_7H_6\Theta_3 \begin{cases} \text{Salicylsäure} \\ \text{Oxybenzoësäure} \\ \text{Paraoxybenzoësäure} \end{cases}$$

zu eignen, da von der erstgenannten die Eigenschaft, einen hippursäureartigen Abkömmlung zu bilden, schon im positiven Sinne erledigt war.

Man führt die Isomerie dieser 3 Säuren auf die verschiedene gegenseitige Stellung der Hydroxyl- und Carboxylgruppe zurück, und für den Fall als alle 3 Säuren Glycocoll unter Wasseraustritt aufnehmen würden, war zu erwarten, dass wieder zwar gleich zusammengesetzte, aber durch die Verschiedenheit der vom Glycocollrest eingenommenen Stellungen verschiedene Säuren von der Zusammensetzung der Salicylursäure $\Theta_9H_9N\Theta_4$ entstehen werden.

Ich habe den früheren Assistenten Hr. Dr. Löbisch für diesen Gegenstand zu interessiren vermocht; derselbe hat an sich selbst die Reaction mit den beiden Säuren vorgenommen, und sich auch theilweise an den Analysen betheiliget. Die beiden zu prüfenden Säuren verdanke ich meinem Freunde von Barth;

die Paraoxybenzoësäure war durch Schmelzen von Anissäure mit Kali und die Oxybenzoësäure durch gleiche Behandlung aus Sulfobenzoësäure erhalten worden.

Die zuerst geprüfte Säure war die Oxybenzoësäure, die in Wasser vertheilt getrunken wurde. Der während mehrerer Tage nach Einnahme von etwa 15—20 Grm. gesammelte Harn wurde im Wasserbade zum Syrup verdampft und nach dem Ansäuern mit Salzsäure mit Äther ausgeschüttelt. Aus den vermischten Ätherrückständen wurde nach Umkrystallisiren aus Weingeist und Wasser und Reinigung mit Thierkohle eine Portion zarter, feiner, weisser, seidenglänzender Nadeln erhalten, die von ganz gleichartigem Aussehen waren und unter dem Mikroskop keine Verunreinigung mit einem zweiten Körper erkennen liessen. Sie waren in Wasser und Alkohol löslich, ohne Reaction auf Eisensalze, blieben bei 100° unverändert, und schmolzen unter gleichzeitiger Braunfärbung zwischen 189—191°.

Da die ersten Verbrennungen einen, für die zu erwartende Oxybenzoësäure viel zu hohen Kohlenstoff- und detto Wasserstoffgehalt ergaben, wurde eine grössere Partie der Säure der Behandlung mit kochender conc. Salzsäure unterworfen. Dabei trat unter Braunfärbung eine körnig-krystallinische Ausscheidung auf, die von der sauren braunen Lösung abfiltrirt, gewaschen und aus kochendem Wasser umkrystallisirt wurde. Der Schmelzpunkt 196—200° und die Sublimirbarkeit dieses Körpers in feinen Nadeln und Warzen sprachen schon für abgespaltene Oxybenzoësäure. Um für die Analyse davon recht reine Substanz zu erhalten, wurde das ganze sublimirt, und da das Sublimat noch nicht ganz weiss war, endlich wieder aus Wasser und unter Zusatz von Thierkohle umkrystallisirt. Der Theil, der jetzt davon zur Analyse verwendet werden konnte, war schon sehr klein (0·165 Grm.), so dass dies einen kleinen Ausfall an Kohlenstoff bei den erhaltenen Zahlen wohl erklärt: es wurde gefunden 60·1% C und 4·8% H gegenüber der Berechnung für Oxybenzoësäure, welche verlangt: 60·8% C und 4.35% H. Demungeachtet konnte ein Zweifel, dass das ausgeschiedene Product des Organismus beim Kochen mit Salzsäure die eingenommene Substanz nach Art der Hippursäuren wieder gab, nicht mehr bestehen.

Ebenso vollständig war es möglich, bei dieser Zerlegung aus dem braunen Filtrat von der rohen Oxybenzoësäure Glycocoll zu gewinnen; es gab nach der Entfärbung grosse zerfliessliche Krystalle, die mit überschüssigem Silberoxyd gekocht wurden. Das Filtrat mit Schwefelwasserstoff entsilbert, gab bald eine krystallinische Ausscheidung, und erstarrte auf Zusatz von absolutem Alkohol zu einem Brei von harten Krystallkörnern. Diese schmeckten süss, lösten Kupferoxyd, gaben die schöne Reaction mit Alloxan und wurden noch einmal in Wasser gelöst und mit Alkohol gefällt. Ein Theil ist dann durch Kochen mit Kupferoxyd in die Kupferverbindung übergeführt worden, die hellblaue lange glänzende Nadeln darstellte mit dem verlangten Kupfergehalt, und der Rest wurde noch verbrannt, wobei erhalten wurde:

C	31·3%	Glycocoll verlangt { C	32·0%
H	6·5%	H	6·6%

Nachdem so die Zersetzungsproducte einer erwarteten, mit Glycocoll gepaarten Oxybenzoësäure unzweideutig erhalten waren, wurde nochmals die Aufmerksamkeit auf die Reindarstellung der Säure gerichtet, die, wie oben erwähnt, viel mehr Kohlenstoff und Wasserstoff gegeben hatte als einem Isomeren der Salicylursäure entsprechen würde. Während letztere Säure verlangt:

C_9	55·38%
H_9	4·61 „
N	7·17 „
O_4	—

wurde gefunden:

	I	II	III	IV	V	VI
C	59·10	59·39	58·51	58·3	59·69	58·4
H	5·48	5·40	5·11	5·32	5·64	5·2
N	—	6·93	—	—	—	—

Und zwar war I und II von der zuerst gewonnenen, mehrmals umkrystallisirten Partie; III von einer neuen Darstellung. Substanz IV wurde gewonnen, als die ganze Säure durch Kochen mit Silberoxyd in das Silbersalz verwandelt, heiss filtrirt und das sich ausscheidende flockige Silbersalz mit Schwefelwasser-

stoff wieder zerlegt worden war. Substanz V und VI ist so erhalten, dass die ganze noch vorräthige Säure in kaltem Wasser vertheilt, und nun mit Äther geschüttelt wurde. Jede Schichte wurde abgedunstet und die bleibende Säure noch einmal aus heissem Wasser umkrystallisirt; N V ist von der in den Äther übergegangenen Säure und VI von der in der wässrigen Schichte gebliebenen.

Obwohl die Differenzen obiger Analysen (ich theilte alle mit) grösser sind als sie bei einer reinen Substanz vorkommen dürfen, so ist doch auf alle Fälle zu ersehen, dass an die Zusammensetzung einer Säure $C_9H_9NO_4$ wie sie die Salicylsäure im Organismus gibt, nicht zu denken ist.

Noch ein Moment musste ich berücksichtigen, nämlich die Verunreinigung mit einem C und H reichen Körper des Harns, der beim Ausschütteln mit Äther vielleicht in diesen überging und hartnäckig allen Krystallisationen beigemischt war.

Normaler (eigener) Harn wurde in grosser Menge verdampft bis zum Syrup und wie oben nach dem Ansäuern mit Salzsäure mit Äther geschüttelt. Die ätherischen Destillatsrückstände durch Kochen mit Wasser von riechenden Körpern und mit Thierkohle von Farbstoff befreit, gaben aus Wasser umkrystallisirt eine nicht grosse Menge von weissen, wenig glänzenden Kryställchen, die sich als Hippursäure zu erkennen gaben. Auf ihre Reinheit geprüft durch die Analyse wurde erhalten:

C.......	60·57	Hippursäure will	C.......	60·74
H.......	5·06		H.......	4·96

Diese Zahlen, welche nebenbei zeigen, wie leicht man aus Menschenharn Hippursäure rein erhält, beweisen auch, dass eine Verunreinigung meiner hypothetischen Oxybenzursäure durch einen aus dem ätherischen Harnextract mit übergegangenen Körper nicht die Ursache der hohen erhaltenen Kohlenstoff- und Wasserstoffwerthe sein kann, da man nur Hippursäure erhält, deren Menge weitaus zu klein ist, um den Kohlenstoff meiner nicht unbeträchtlichen Quantität Substanz von 55 auf 59% zu heben, und anderseits der Wasserstoff immer höher als bei Hippursäure war.

Die analytischen Zahlen stehen somit in einem Widerspruch mit den Zersetzungsproducten bei der Einwirkung von Salzsäure, obwohl bei der Analyse der Gesammtsubstanz an Reinigungsversuchen nicht gespart wurde. Und ganz dasselbe war der Fall bei den Versuchen mit Paraoxybenzoësäure. Der Harn wurde nach deren Einnahme wie früher behandelt, und die ätherischen Schüttelanzüge mit Thierkohle etc. gereinigt. Die erhaltenen weissen, stark glänzenden feinen Nadeln schmolzen bei 205—208 und erstarrten nach dem Abkühlen krystallinisch. Bei der Analyse wurde erhalten:

C	58·1%
H	5·2

Indem ich so die erhaltenen Resultate mittheile, bleibt mir noch die Vorstellung wiederzugeben, die ich mir über diesen Widerspruch gemacht habe. In den gefundenen Zahlen ist der C und H in dem Verhältnisse höher, als den höheren Homologen der Salicylursäure entsprechen würde. Da für die genossenen Säuren eine Homologie ausgeschlossen ist, so wäre nur der im Organismus zugepaarte Rest ins Auge zu fassen. Ich habe an Alanin gedacht, aber eine genauere Untersuchung des Spaltungsproductes schloss auch dieses aus. Methylirtes und äthylirtes Glycocoll aber in Verbindung mit Oxybenzoësäure würden Zahlen verlangen, sehr ähnlich den gefundenen, und das Auftreten von nicht substituirtem Glycocoll würde nicht mit dieser Annahme im Widerspruche stehen, denn von dem Äthylglycocoll das Schilling (Annal. d. Chemie Bd. 127) dargestellt hat, ist bekannt, dass es sich beim Kochen der wässrigen Lösung mit Silberoxyd, ja schon beim Verdunsten seiner Lösung in der Wärme in Glycocoll und Alkohol wieder spaltet.

Die Zusammensetzung einer methylirten Oxybenzoësäure verlangt die Zahlen von A, die einer äthylirten jene von B:

A		B	
$C_{20}H_{11}NO_4$		$C_{22}H_{13}NO_4$	
C	57·41%	C	59·19%
H	5·26 „	H	5·82 „

und zwischen beiden namentlich B nahe liegen die gefundenen Werthe.

Es ist dies die einzige plausible Vorstellung, mit der ich die Analysen in Einklang bringen kann, wobei ich den letzten Beweisgrund, nämlich die Nachweisung der Äthylgruppe wenigstens vorläufig wegen Mangels des nur schwierig und aufopfernd zu gewinnenden Materials unterlassen muss. Vielleicht finden Andere einen passenden Anhaltspunkt, den angeregten Gesichtspunkt näher zu beleuchten, und ich will nur noch erwähnen, dass das Methylguanidin, ein einfaches Zerlegungsproduct des Kreatins und daher auch dieses selbst das Radical Methyl in sich birgt, dass das Tyrosin eine Äthylverbindung ist und das Cholin der Galle 3mal Methyl im Molecül enthält etc., so dass also an diesen einfachen Radicalen im Organismus, zumal in der Leber und Galle, kein Mangel ist.

In Bezug auf die Hippursäurebildung der aromatischen Säuren überhaupt liess sich erwarten, dass die in neuester Zeit von Strecker (Zeitschrift für Chemie 1868, 215) aufgefundene interessante Zerlegung der Harnsäure durch Jodwasserstoffsäure bei 160—170° in Glycocoll, Kohlensäure und Ammoniak einen Aufschluss geben würde. Bei den älteren Untersuchungen hierüber ist meist nur an das Glycocoll der Gallensäure gedacht worden.

Einen zunächst liegenden Versuch habe ich vorläufig gemacht, von dem Gedanken ausgehend, dass wenn etwa die nascirende Harnsäure des Organismus Glycocoll an Benzoësäure abgeben würde, man dann nach Einnahme der letzteren Säure weniger, resp. keine Harnsäure im Harn finden müsste. Dies hat sich jedoch nicht bewährt; ich habe bei gleicher Lebensweise im Morgenharn (10 Uhr Abends bis 7 Uhr Früh) 0·063—0·132 Grm. Harnsäure, nach Benzoësäuregenuss ($^1/_2$ Grm.) sogar mehr, nämlich 0·140 Grm. gefunden.

Auch einige Versuche ausserhalb des Organismus, Harnsäure und Benzoësäure unter verschiedenen Verhältnissen, z. B. höherem Druck, aufeinander einwirken zu lassen, haben nichts positives ergeben.

Untersuchungen über die Wärmeleitung in Gasen.

Erste Abhandlung.

Von dem w. M. **J. Stefan.**

Durch die dynamische Theorie der Gase wurde zuerst der Druck erklärt als Effect der Stösse der rasch bewegten Molecüle. Aus der bekannten Grösse des Druckes und der Dichte hat Clausius eine der Constanten, welche die Natur jedes Gases charakterisiren, bestimmt, nämlich die Geschwindigkeit der progressiven Bewegung der Gasmolecüle.

Durch dieselbe Theorie ist von Maxwell das Wesen der inneren Reibung in Gasen erklärt worden als Effect des Austausches der Geschwindigkeiten zwischen den in verschiedenen Schichten verschieden schnell bewegten Molecülen. Aus den durch die Ausflussversuche von Graham, durch die Schwingungsversuche von O. L. Meyer und Maxwell gegebenen Werthen der inneren Reibung konnte Maxwell eine zweite, die Natur der Gase bestimmende Constante ableiten, nämlich die Anzahl der Zusammenstösse, welche zwischen den Molecülen eines Gases in der Zeiteinheit stattfinden, oder die mittlere Länge des Weges, den ein Molecül von einem bis zum nächsten Zusammenstosse macht.

Aus derselben Theorie folgt aber weiter, dass durch die zwei für jedes Gas gefundenen Constanten auch die Geschwindigkeit der Diffusion verschiedener Gase und die Grösse der Wärmeleitung bestimmt ist. Es sind von Loschmidt eine Reihe von Bestimmungen der Diffusionsgeschwindigkeiten für verschiedene Gascombinationen ausgeführt worden und ich habe gefunden, dass man mit Hilfe der bekannten Constanten der Gase die Ergebnisse dieser Versuche hätte vorausberechnen können.

Wirklich vorausberechnet wurden aber solche Zahlen von Maxwell und Clausius für das Wärmeleitungsvermögen der Gase. Für die Begründung der dynamischen Gastheorie ist daher die experimentelle Bestimmung dieses Leitungsvermögens von der grössten Wichtigkeit.

Es gehören aber schon die Bestimmungen des Leitungsvermögens der Metalle zu den schwierigsten. Die Fehler, welche bei solchen Untersuchungen unterlaufen, sind ganz ungewöhnlich gross, so dass z. B. Despretz finden konnte, Platin leite die Wärme besser als Kupfer, während Wiedemann und Franz das Leitungsvermögen des Kupfers dreimal grösser fanden als das des Platin. Und dabei handelt es sich nur um relative Bestimmungen. Allerdings ist durch die Methoden von Forbes, Neumann und Angström nun ein grosser Fortschritt gemacht, und wird ein solcher, hoffe ich, aus den in den vorliegenden Untersuchungen angeregten Methoden auch für dieses Gebiet noch erwachsen.

Noch schwieriger wird die Aufgabe, wenn es sich um Flüssigkeiten handelt. Es treten hier neue Fehlerquellen auf, welche aus den Strömungen innerhalb der Flüssigkeit und aus dem Wärmeaustausch zwischen der Flüssigkeit und den sie einschliessenden Gefässwänden entspringen. Es sind nur wenige Versuche in dieser Richtung gemacht worden von Despretz, dann von Paalzow, welche relative Bestimmungen zum Ziele haben, von Lundquist, welcher, die Angström'sche Methode anwendend, absolute Bestimmungen lieferte. Auch auf diesem Felde werden sich, wie ich erwarte, meine Methoden und Apparate als die einfachsten und sichersten von allen bisher angewandten erweisen.

Die Schwierigkeiten, mit welchen man bei Untersuchungen über das Leitungsvermögen von Flüssigkeiten zu kämpfen hat, treten, wenn es sich um Gase handelt, noch in vergrössertem Massstabe auf. Der geringe Wärmeinhalt der Gase hat zur Folge, dass der Einfluss der Wände, der Einfluss eingeführter Thermometer so gewaltig wird, dass die Grösse, welche man sucht, verschwindet gegen die Störungen, die sie erleidet. So war Magnus nur für Wasserstoffgas die Existenz des Leitungs-

vermögens zu beweisen im Stande, für die übrigen Gase gaben seine Versuche sogar ein negatives Resultat.

Die verschiedenen Versuche, welche ich ausgeführt habe, zerfallen in zwei Arten. Nach der ersten Art wurde die in Cylindern eingeschlossene Luft einseitig entweder von oben erwärmt oder von unten abgekühlt. Die eingeschlossene Luft selbst bildete die thermometrische Substanz und konnte für jeden Zeitpunkt ihre mittlere Temperatur manometrisch bestimmt werden. Die aus dieser mittleren Temperatur für das Leitungsvermögen abgeleitete Zahl fällt zu klein oder zu gross aus, je nachdem in den Seitenwänden des Cylinders die Wärme langsamer oder schneller sich verbreitet, als in der Luft. Der erste Fall trat ein, wenn die Wände aus Glas waren, er trat auch noch ein bei Wänden aus Eisen, hingegen stellte sich der zweite Fall her bei Wänden aus Zink. Es steht also die Luft als Temperaturleiter zwischen Eisen und Zink.

Bei den Versuchen nach der zweiten Art wurde eine abgeschlossene Luftmenge von allen Seiten gleichmässig erwärmt oder abgekühlt und wieder konnte für jeden Zeitpunkt ihre Mitteltemperatur manometrisch bestimmt werden. Die ersten Apparate waren kugelförmige Luftthermometer aus Kupferblech. Die aus diesen Versuchen berechneten Werthe des Leitungsvermögens sind wegen des Einflusses der Strömungen zu gross. Ganz befriedigende Resultate lieferten erst die nach der letzten in dieser Abhandlung beschriebenen Methode ausgeführten Versuche, bei denen doppelwandige Luftthermometer aus Kupfer oder Messingblech angewendet wurden, derart, dass das auf das Leitungsvermögen zu untersuchende Gas den Raum zwischen den beiden Metallhüllen ausfüllt.

Diesen Apparat möchte ich wegen seiner vorzüglichen Eignung zur Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens nicht nur der Luft, sondern auch anderer Substanzen, Diathermometer nennen. Die mit ihm gefundenen Werthe des Leitungsvermögens der Luft stehen nun in einer wirklich unerwarteten Übereinstimmung mit der von Maxwell vorausberechneten Grösse desselben. Meine Versuche liefern, Centimeter, Secunde und Gramm als Einheiten angenommen, die Zahl 0·0000558, das Leitungsvermögen der Luft also nahe 20000mal kleiner als das des Kupfers,

nahe 3400mal kleiner als das des Eisens. Maxwell sagte vorher, die Luft müsse nahe 3500mal schlechter leiten als Eisen und nach der von ihm aufgestellten Formel finde ich, in obigen Einheiten ausgedrückt, das Leitungsvermögen der Luft = 0·000054.

Wenige von den physikalischen Theorien haben solche glänzend bewährte Vorherbestimmungen aufzuweisen und muss nun wohl die dynamische Theorie der Gase als eine der am besten begründeten physikalischen Theorien angesehen werden.

Auch ein anderes Gesetz, das durch diese Theorie gegeben wurde, nämlich die Unabhängigkeit des Leitungsvermögens der Luft von ihrer Dichte, haben die Versuche in ganz unzweifelhafter Weise als richtig bewiesen.

Ebenso stimmen die relativen Verhältnisse der Leitungsvermögen der verschiedenen Gase mit den Formeln von Maxwell. Die darauf sich beziehenden Versuche, sowie die noch anzustellenden, über die Abhängigkeit des Leitungsvermögens von der Temperatur werden den Inhalt der zweiten Abhandlung bilden. Ich will nur ein Factum voraus nehmen, nämlich dass Wasserstoffgas, sowie Maxwell es vorhergesagt, siebenmal besser die Wärme leitet als die Luft.

Meine ersten Versuche schliessen sich an die von Despretz und Paalzow über die Wärmeleitung von Flüssigkeiten, von Magnus über die Wärmeleitung in Gasen angestellten insoferne an, als bei denselben auch eine cylindrische Luftsäule von oben nach ihrem ganzen Querschnitte erwärmt wurde. Sie unterscheiden sich aber von den citirten wesentlich dadurch, dass erstens nicht der Beharrungszustand abgewartet, und zweitens dadurch, dass nicht durch eingeführte Thermometer die Temperatur an bestimmten Stellen der Luftmasse bestimmt, sondern letztere selbst als thermometrische Substanz verwendet wurde, der ganze Apparat also ein Luftthermometer darstellte. Zu dem Behufe wurde ihm folgende Einrichtung gegeben.

In einen Glascylinder wurde an dem oberen Ende eine cylindrische Büchse aus dünnem Kupferblech eingekittet. Durch sie wurde der Luft im Cylinder Wärme zugeführt. Ihre äussere Basis war deshalb mit drei Röhrenansätzen versehen; durch den

einen konnte Wasserdampf eingeleitet, durch den andern abgeleitet werden, durch den dritten ging ein Thermometer in die Büchse. Den Boden des Glascylinders bildete eine Metallplatte, in welche in der Mitte ein Manometerrohr und daneben ein Hahn eingekittet war.

Die Versuche wurden in folgender Weise gemacht. Zu einem bestimmten Zeitpunkte wurde ein Rohr, durch welches aus einem geschlossenen Siedegefässe reichlicher Dampf strömte, in die Kupferbüchse eingeführt, die Schläge einer Secundenuhr gezählt und jene Zeiten notirt, in welchen die Flüssigkeit im Manometerrohr bestimmte Standänderungen erfuhr.

Direct beobachtet wurden also die Druckzunahmen der eingeschlossenen Luftsäule und die dazu erforderlichen Zeiten. Die Zunahme des Druckes bildet das Mass für die Zunahme der mittleren Temperatur der im Cylinder befindlichen Luft. Wird die Temperatur der Luft vor dem Versuche, welche auch gleich ist der Temperatur der Umgebung, zum Nullpunkt der Scala gewählt, und steht dabei die Luft im Gefässe unter dem Drucke p_0, so ist die mittlere Temperatur U der Luft, wenn der Druck auf p gestiegen ist, gegeben durch die Gleichung

$$p = p_0(1+\alpha U),$$

worin $\alpha = 0\cdot00366$ den Ausdehnungscoëfficienten der Luft darstellt. Die Zunahme des Druckes

$$\Delta p = p - p_0$$

ist also mit U verbunden durch die Gleichung

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \alpha U.$$

Zur Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens der Luft aus U wurde vorausgesetzt, dass sich auf die Fortpflanzung der Wärme in der gegebenen Luftsäule die Fundamentalgleichung der Theorie der Wärmeleitung anwenden lasse, nämlich die Gleichung

$$\frac{du}{dt} = k\frac{d^2u}{dx^2}, \qquad (1)$$

welche die Gesetze der Wärmevertheilung in einem prismatischen oder cylindrischen Körper gibt, wenn in demselben die Temperatur in allen Punkten eines und des nämlichen Querschnittes sich in gleicher Weise ändert, auch kein Verlust an Wärme nach der Seite stattfindet. In der citirten Gleichung bedeutet u die Temperatur des Querschnittes in der Tiefe x zur Zeit t, k ist der Quotient aus dem Wärmeleitungsvermögen K, und der specifischen Wärme der Volumseinheit der leitenden Substanz, welche, wenn c die specifische Wärme, s das specifische Gewicht derselben auf Wasser als Einheit bezogen sind, durch cs ausgedrückt ist, so dass

$$k = \frac{K}{cs}. \tag{2}$$

Hat die Luftsäule ursprünglich überall die Temperatur Null und wird zu Beginn der Zeit t die Temperatur der oberen Basis plötzlich auf den Werth a gebracht und bei diesem Werthe fortan erhalten, so hat die mittlere Temperatur zur Zeit t den Werth

$$U = \frac{2a}{l}\sqrt{\frac{kt}{\pi}},$$

wenn l, die Länge des Cylinders, so gross ist, dass die während der Zeit t durch die untere Endfläche entwichene Wärme vernachlässigt werden kann.

Ist diese Voraussetzung nicht erlaubt, dann hat U einen andern Werth und zwar wird, wenn z. B. die untere Endfläche fortwährend bei der Temperatur Null erhalten wird,

$$U = \frac{a}{2}\left[1 - \frac{8}{\pi^2}\left(e^{-mt} + \frac{1}{9}e^{-9mt} + \frac{1}{25}e^{-25mt} + \ldots\ .\right)\right],$$

worin m abkürzend für $\frac{k\pi^2}{l^2}$ gesetzt ist. Beide Gleichungen werden leicht aus den diesen Fällen entsprechenden Integralen der obigen Differentialgleichung gewonnen.

Die Zunahme des Druckes ist also im ersten Falle gegeben durch die Formel

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{2\alpha a}{l}\sqrt{\frac{kt}{\pi}}$$

und folgt aus dieser Gleichung

$$k = \frac{\pi l^2}{4\alpha^2 a^2 t}\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2. \tag{3}$$

Die Voraussetzung, dass bei diesen Versuchen die eingeschlossene Luft keine Wärme an die Wände abgebe, oder keine von ihnen erhalte, muss allerdings schon von vorneherein als unzulässig erscheinen. Da jedoch bisher noch gar keine Versuche vorlagen, welche einen Schluss auf die Art und Grösse des Einflusses der Wände erlaubten, so mussten zuerst solche gemacht werden, um die möglichen Abweichungen von den aufgestellten Formeln kennen zu lernen.

Von den vielen Versuchen, die ich in der angegebenen Weise ausgeführt habe, will ich nur zwei als Beispiele anführen.

Der erste wurde mit einem Glascylinder von 15 Cm. Länge, 5·8 Cm. Durchmesser, nahe 2 Mm. Wanddicke gemacht. Die Länge des eingeschlossenen Luftcylinders ist 13·8 Cm. Die Manometerflüssigkeit war Wasser und sank die Wassersäule nach Einführung des Wasserdampfes um

Theilstriche	in Secunden
25	4
35	8
45	14
55	24
65	49
75	76
85	107
95	142
105	184
115	237
125	299.

Die Temperatur der äusseren Luft war 21°, das Thermometer in der Büchse zeigte 100°. Die an der Manometerscala angebrachten Theilstriche stehen um 1·45 Mm. von einander ab.

Der zweite Versuch wurde mit einem Glascylinder von 15·5 Cm. Länge, 11·1 Cm. Durchmesser und auch nahe 2 Mm. Wand-

dicke gemacht. Die Länge des eingeschlossenen Luftcylinders ist 14·5 Cm. Die Temperaturen, wie vorhin. Die Wassersäule sank um

Theilstriche	in Secunden
25	4
35	9
45	15
55	22
65	32
75	41
85	56
95	77
105	100
115	124
125	150.

Aus diesen beiden Versuchen wird der Einfluss der Gefässwände schon ersichtlich. Die Mitteltemperatur steigt anfänglich in beiden Gefässen um gleiche Beträge in nahe gleichen Zeiten, nach 24 Secunden aber wird das Wachsthum derselben im engen Gefässe sehr bedeutend verzögert gegen das Wachsthum im zweiten Gefässe, also jedenfalls im ersten relativ mehr Wärme an die Wand abgegeben als im zweiten.

Wurde dasselbe Gefäss mit Wasserstoffgas gefüllt und der Versuch wie vorhin gemacht, so sank die Wassersäule um

Theilstriche	in Secunden
50	4
70	8
90	14
110	23
130	33
150	60
170	98
190	140.

Auch hier zeigt sich der Einfluss des Wärmeverlustes an die Wände. Während in den ersten 30 Secunden bei diesem Versuch

die Wassersäule um dieselbe Zahl von Theilstrichen wie bei dem Versuche mit der Luft, in einer 4·5—4·9mal kleineren Zeit sinkt, sinkt dann diese Verhältnisszahl gleich auf 2·7 herab zum Beweise, dass das Wasserstoffgas einen grösseren Verlust an Wärme erleidet als die Luft. Geben nun diese Versuche das Leitungsvermögen des Wasserstoffgases mindestens 4·5—4·9mal grösser, als das der Luft, so muss geschlossen werden, dass dasselbe noch bedeutender jenes der Luft überwiegt, da das Wasserstoffgas jedenfalls auch schon während der ersten 30 Secunden stärkere Wärmeverluste erleidet, als die Luft.

Nach der oben entwickelten Formel müssen, wenigstens für die ersten Beobachtungen, die Höhen, um welche die Wassersäule sinkt, sich verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Zeiten. Dividirt man nun die Höhen durch die Wurzeln der Zeiten, wie dieselben der zweite Versuch ergeben, so erhält man die Quotienten

12·5, 11·7, 11·7, 11·8, 11·5, 11·7, 11·3 u. s. w.,

deren nahe gleiche Werthe eine merkwürdige Übereinstimmung mit der aufgestellten Formel zeigen.

Und doch ist diese Übereinstimmung nur eine zufällige. Es wurde zwar auch für andere Versuche der gedachte Quotient nahezu constant gefunden, doch variirte diese Constante von einem Versuch zum andern. Nachdem ich sehr viele Versuche mit verschiedenen Apparaten und verschiedenen Manometerflüssigkeiten gemacht, um der Sache auf den Grund zu kommen, gab endlich folgende Abänderung der Versuche den Beweis für ihre Bedeutungslosigkeit.

Die Erscheinungen verliefen nämlich ganz anders, als nicht mehr Wasserdampf, sondern siedendes Wasser als Erwärmungsmittel angewendet wurde. Zu diesem Behufe wurde aus der kupfernen Büchse der obere Boden herausgenommen und zu Beginn des Versuches heisses Wasser in die Büchse geschüttet und zugleich der Deckel mit dem Dampfrohr aufgesetzt, so dass das Wasser fortwährend im Sieden blieb. Die Wassersäule sank jetzt schon während der ersten 3 Secunden um 83 Theilstriche, sie sank dann noch um zwei Theilstriche, kehrte aber dann um und stieg langsam zurück in die Höhe um 6 Theilstriche. Von da an sank sie wieder, erreichte wieder

Theilstriche	nach Secunden
85	21
95	39
105	57
115	82
125	108
135	136.

Ebenso verliefen die übrigen auf diese Art angestellten Versuche.

Nach diesem Resultate ist nicht zu zweifeln, dass die Anwendung des Wasserdampfes als Erwärmer einer der gemachten Voraussetzungen nicht entspricht, dass er der Bodenplatte der Kupferbüchse nicht plötzlich oder wenigstens in sehr kurzer Zeit die Siedetemperatur des Wassers gibt, sondern dies erst nach längerer Zeit zu Stande bringt. Die oben gefundene Übereinstimmung der Versuchsresultate mit der aufgestellten Formel hat also darin ihren Grund, dass mit der allmälig steigenden Temperatur der Bodenplatte der Büchse die ebenfalls steigende Wärmezufuhr die fortwährenden Wärmeverlüste der eingeschlossenen Luft bei dem weiteren Gefässe nahe compensirt, während bei dem engeren Gefässe die Verluste überwiegen.

Der Verlauf der Erscheinung bei den Versuchen mit siedendem Wasser lehrt, dass, wenn diese zur Bestimmung des Leitungsvermögens verwendet werden sollten, nur Beobachtungen innerhalb der drei ersten Secunden in Betracht kommen können. Abgesehen von der Schwierigkeit, in einer so kurzen it Zegenaue Bestimmungen zu machen, ist aber noch das Verfahren deshalb wenig Erfolg versprechend, weil durch die Operation des Einschüttens des Wassers Fehlerquellen geschaffen werden, deren Einfluss gerade in der ersten Zeit am störendsten ist.

Ich suchte diese Fehlerquelle zu vermindern, indem ich die Versuche dahin abänderte, dass der im Cylinder eingeschlossenen Luft nicht Wärme zugeführt, sondern entzogen wurde. Der Apparat erhielt folgende Umgestaltung. Auf das untere Ende eines Glascylinders wurde eine dünne Kupferplatte aufgekittet; auf das andere Ende eine Messingplatte, in die wieder in der Mitte ein Manometerrohr und daneben ein Hahn eingekittet waren.

Zu einem bestimmten Zeitpunkte wurde der Glascylinder auf eine sorgfältig geebnete Schneefläche aufgesetzt und dann die Zeiten notirt, in welchen die Flüssigkeit im Manometerrohr bestimmte Standänderungen erfuhr. Es erwiesen sich jedoch auch bei dieser Versuchsreihe die ersten Bestimmungen als sehr wenig verlässlich.

Benützt man die mitgetheilte Beobachtung, nach welcher in 3 Secunden die Wassersäule um 83 Theilstriche = 12 Cm. fiel, um nach der Formel (3) k zu berechnen, so hat man in derselben

$$l = 14{\cdot}5,\ \Delta p = 12,\ p_0 = 1000$$
$$\alpha = 0{\cdot}00366,\ a = 79,\ t = 3$$

einzuführen und erhält

$$k = 0{\cdot}094.$$

Da die Wärmecapacität der Luft bei constantem Volumen gegen die des Wassers als Einheit = 0·1686 ist und ein Kubikcentimeter Luft 0·001293 Gramm wiegt, so ist das Wärmeleitungsvermögen der Luft nach der Formel (2)

$$K = 0{\cdot}094 \times 0{\cdot}1686 \times 0{\cdot}001293 = 0{\cdot}00002,$$

eine Zahl, die als unterer Grenzwerth zu betrachten ist. Sie ist nämlich jedenfalls zu klein, weil auch schon innerhalb der ersten drei Secunden Wärmeverluste eintreten, namentlich aber auch deshalb, weil die Temperatur der Kupferplatte auch bei Anwendung des heissen Wassers auf der inneren Seite nicht alsogleich die Temperatur 100° annimmt.

War so nun eine untere Grenze für das Leitungsvermögen gefunden, so lag es nahe, auch eine obere zu suchen. Dazu konnte dieselbe Versuchsmethode führen, wenn die Gefässwand aus einem solchen Material gewählt wird, dass die Luft während der Erwärmung von oben nicht Wärme an die Wand verliert, sondern vielmehr Wärme von ihr gewinnt. Dies wird der Fall sein, wenn die Wand ein besserer Temperaturleiter ist, als die Luft. Die Geschwindigkeit, mit der sich eine bestimmte Temperaturerhöhung in einem Körper unter gegebenen Verhältnissen fortpflanzt, ist nicht abhängig von der Grösse des Wärmeleitungs-

vermögens K des Körpers, sondern von der Grösse des Coëfficienten k. Dieser ist nun z. B. für Eisen nach den Bestimmungen von Angström in den obigen Massen ausgedrückt $= 0 \cdot 18$, für Wismuth berechne ich ihn mit Hilfe der relativen Messungen von Franz und Wiedemann zu 0·07. Was also die Güte der Temperaturleitung anbetrifft, so lehrt schon der oben für Luft gefundene Werth von k, dass die Luft unter die Metalle sich einreiht. Sollen also bei den anzustellenden Versuchen die Gefässwände der Luft nicht Wärme entziehen, sondern ihr solche zuführen, so müssen Metallgefässe angewendet werden.

Ich wählte zuerst Cylinder aus Eisenblech, dann Cylinder aus Zinkblech, welche oben und unten mit Kupferplatten geschlossen und mit Manometern versehen wurden.

Die mit diesen Apparaten angestellten Versuche lehrten nun, dass auch in den Eisencylindern die Luft noch Wärme an die Wände verliere, dass also die Luft ein besserer Temperaturleiter sei, als das Eisen. Hingegen trat bei den Apparaten aus dickerem Zinkblech der umgekehrte Fall ein. Zu einer sicheren Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens der Luft konnten aber auch diese Versuche nicht verwendet werden, obwohl die Bewegungen des Manometers mit den aufgestellten Formeln in Übereinstimmung standen. Der Querschnitt der Cylinder — die benützten hatten 6—7 Cm. im Durchmesser — hätte viel grösser gewählt werden müssen, denn es stellte sich heraus, dass sich die Vertheilung der Wärme in der Luft nach sehr kurzer Zeit der in den Wänden accomodirt hat, diese Versuchsmethode also sich besser zur Bestimmung des Leitungsvermögens der Wände verwerthen lässt, als zur Bestimmung des Leitungsvermögens der Luft. Ich werde deshalb in einer anderen Abhandlung auf diese Versuche und ihre bezeichnete Anwendung zurückkommen und will jetzt zu einer anderen Versuchsmethode übergehen, welche in überzeugenderer Weise einen oberen Grenzwerth für das Leitungsvermögen liefert.

Bei dieser Methode kommt nämlich der Einfluss der Gefässwände ausser Spiel, dadurch, dass einer gegebenen Luftmasse die Wärme nicht mehr einseitig zugeführt oder entzogen wird, sondern die Zufuhr oder Abfuhr an der ganzen Begrenzung in gleicher Weise geschieht.

Allerdings tritt bei dieser Methode eine andere mächtige Fehlerquelle auf, nämlich der Einfluss der Strömungen. Diese bewirken, dass die in dem Gefässe eingeschlossene Luft sich viel rascher erwärmt oder abkühlt, als sie es in Folge der Leitung allein thun könnte. Es erscheint jedoch wieder annehmbar, dass wenigstens zu Beginn des Versuches die Strömungen noch nicht so gewaltig die Erscheinungen gestört haben werden, dass das Resultat des Versuches zu weit von dem beabsichtigten entfernt würde.

Unter den Gefässformen, welche sich einer Berechnung unterziehen lassen, ist die Kugel die einfachste. Es wurde also in eine Kugel aus dünnem Kupferblech von 8 Cm. Durchmesser eine zweimal gebogene Glasröhre eingekittet, welche eine Quecksilbersäule zur Bestimmung des Druckes der eingeschlossenen Luft enthielt, so dass dieser Apparat wieder ein Luftthermometer darstellt.

Die Kugel wurde zu einem bestimmten Zeitpunkte in Eiswasser getaucht und wieder die Zeit notirt, zu welcher das Quecksilber um bestimmte Grössen in der Röhre sank. Es sank dasselbe

um 10 Mm. in 2 Secunden
„ 15 „ „ 4 „

und blieb endlich bei dem Stande von 19 Mm. stationär.

Hat eine Kugel anfänglich durchwegs die Temperatur Null und wird ihre Oberfläche zu Beginn der Zeit plötzlich auf die Temperatur a gebracht und bei dieser auch fortan erhalten, so hat die mittlere Temperatur der Kugel zur Zeit t den Werth

$$U = a\left[1 - \frac{6}{\pi^2}\left(e^{-mt} + \frac{1}{4}e^{-4mt} + \frac{1}{9}e^{-9mt} + \ldots\right)\right],$$

worin m für $\frac{k\pi^2}{r^2}$ gesetzt ist, unter r den Radius der Kugel verstanden.

Ist der anfängliche Druck p_0, die in der Zeit t eingetretene Druckänderung Δp, so ist

$$\Delta p = 0{\cdot}00366 p_0 U.$$

Die am Ende des Versuches sich einstellende bleibende Druckänderung sei Δp_1, so ist

$$\Delta p_1 = 0{\cdot}00366 p_0 a,$$

also hat man

$$\frac{\Delta p}{\Delta p_1} = \frac{U}{a} = 1 - \frac{6}{\pi^2}\left(e^{-mt} + \frac{1}{4}e^{-4mt} + \ldots\right).$$

Berechnet man aus den obigen Daten m, was mit Hilfe einer für die Exponentialreihe entworfenen Tafel geschehen kann, so folgt aus der ersten Beobachtung $m = 0{\cdot}173$, aus der zweiten $m = 0{\cdot}267$, und aus diesen Werthen folgt, wenn $r = 4$ Cm. eingeführt wird, $k = 0{\cdot}28$ aus der ersten, $k = 0{\cdot}43$ aus der zweiten Beobachtung.

Der viel grössere letztere Werth zeigt, wie bedeutend mit wachsender Zeit der Einfluss der Strömungen sich gestaltet.

Der erste der beiden Werthe steht jedoch in Übereinstimmung mit dem vorhin gefundenen Resultate, dass die Luft als Temperaturleiter zwischen Eisen und Zink falle; es ist nämlich, wie schon oben bemerkt wurde, für Eisen $k = 0{\cdot}18$, für Zink hingegen berechnet sich nach der Bestimmung von Neumann $k = 0{\cdot}45$. Auch bei wiederholten Versuchen haben sich für k aus der anfänglichen Beobachtung nur wenig von diesem verschiedene Werthe gegeben. Es ist aber wegen der Kürze der Zeit diese anfängliche Beobachtung sehr unsicher. Ich suchte deshalb diese Zeit zu verlängern dadurch, dass ich eine grössere Kugel von 32 Cm. Durchmesser zu einem Luftthermometer einrichtete und mit derselben ähnliche Versuche wie mit der kleinen ausführte.

Die Quecksilbersäule sank um

5	Mm.	in 6	Secunden
10	„	„ 11	„
15	„	„ 17	„

und blieb beim Stande von 20 Mm. stehen, und zwar war dieser Stand nach 30 Secunden schon erreicht. Aus der ersten Beobachtung erhält man $k = 0{\cdot}32$, die folgenden geben ebenfalls viel grössere Werthe. Die Strömungen sind in der grossen Kugel noch bedeutender und gab sich ihr Einfluss auch durch die hüpfende Bewegung des Quecksilbers im Manometer kund.

Die Zahl 0·30 kann also als ein genäherter und zwar wahrscheinlich zu grosser Werth der Grösse k betrachtet werden und ihm entsprechend folgt das Leitungsvermögen der Luft

$$K = 0·000065.$$

Soll das Princip der allseitigen Erwärmung zu genaueren Resultaten führen, so müssen die beiden grossen Übelstände beseitigt werden, an denen diese Methode leidet, nämlich erstens der Einfluss der Strömungen, und zweitens die grosse Geschwindigkeit, mit der sich der Endzustand, auch abgesehen von den Strömungen, in einer Luftmasse von beschränkten Dimensionen herstellt. Es gelang mir dies mit dem folgenden Apparate.

Ein Cylinder aus dünnem Messing- oder Kupferblech ist als Luftthermometer eingerichtet. Er ist also hermetisch geschlossen, an die obere Platte ist ein kleines Röhrchen aus demselben Metall gelöthet, so dass das Röhrchen in das innere des Cylinders hineinragt. In dieses Röhrchen ist eine Glasröhre eingekittet, welche als Manometerrohr zu fungiren hat. Das Glasrohr geht luftdicht durch einen Kork, der ebenfalls luftdicht in ein Schüsselchen aus dem gleichen Metall eingepresst ist. Dieses Schüsselchen hat in der Mitte des Bodens eine kreisförmige Öffnung, durch welche das Glasrohr hindurchgeht, jedoch so, dass es mit dem Metall nicht in Berührung steht. Die Öffnung hat deshalb einen nahe um 2 Mm. grösseren Durchmesser als das Glasrohr. Diese ganze Vorrichtung steckt nun in einem zweiten Cylinder aus demselben Metall, welcher weiter und höher ist als der erste und zwar derart, dass der innere Abstand der beiden Cylindermäntel ebenso gross ist, als der Abstand der beiden Bodenflächen von einander und als der Abstand der oberen Bodenfläche des inneren Cylinders vom Boden des aufgesteckten Schüsselchens, dessen Boden eben nach Einführung in den weiteren Cylinder als obere Basis diesen Cylinder schliesst.

Das in den inneren Cylinder eingekittete Glasrohr steigt erst vertikal auf, ist dann nach abwärts gebogen und mündet in eine kurze mit Quecksilber gefüllte Eprouvette. Um nun vor dem Versuch das Quecksilber auf die gewünschte Höhe im Manometerrohr bringen zu können, ist folgende Einrichtung getroffen. Die

Eprouvette ist durch einen Kork geschlossen, der zwei Bohrungen hat, durch die eine geht das Manometerrohr, welches unter Quecksilber, durch die andere ein Glasröhrchen, das nicht ins Quecksilber taucht. Durch dieses Röhrchen kann Luft aus der Eprouvette und somit auch aus dem inneren Cylinder gesaugt und in diesem zur geeigneten Verdünnung gebracht werden. Soll nach dem Versuche das Quecksilber aus dem Manometer wieder entfernt werden, so wird zuerst die Eprouvette weggenommen, entleert, dann wieder auf den Kork aufgesteckt, und kann jetzt das Quecksilber aus dem Manometer wieder mit Hilfe des kleinen Röhrchens herausgesaugt werden.

Der Versuch wird in folgender Weise gemacht. Der Apparat, der durch seine ganze Masse dieselbe Temperatur, die des Zimmers hat, wird in ein mit Schnee und Wasser ausgefülltes Gefäss getaucht. Der äussere Mantel nimmt die Temperatur Null in einer sehr kurzen Zeit an, entzieht der Luft, welche den Zwischenraum ausfüllt, Wärme, diese entzieht wieder Wärme dem inneren Cylinder, dessen Temperatur nun allmälig sinkt, wie das im Manometerrohr aufsteigende Quecksilber zeigt.

Der Nullpunkt der am Manometer verschiebbaren Scala wird so gestellt, dass das Quecksilber vor dem Versuche etwa 3 Mm. unter diesem Nullpunkte steht. Die Zeit wird von dem Augenblicke an gezählt, in welchem das Quecksilber den Nullpunkt erreicht, und die Secunden, in welchen das Quecksilber um je 5 Mm. höher gekommen ist, notirt. Ebenso wird auch der Stand, welchen das Quecksilber zum Schlusse bleibend beibehält, angemerkt.

Vom inneren gegen den äusseren Cylinder findet eine continuirliche Wärmeströmung statt und die Menge der in einer bestimmten Zeit von innen nach aussen übergeführten Wärme ist abhängig von der Temperaturdifferenz zwischen innerem und äusserem Mantel, von der Grösse ihrer Oberflächen, von dem Abstande dieser beiden von einander und von der Grösse des Leitungsvermögens der den Zwischenraum ausfüllenden Substanz, in diesem Falle der Luft.

Ich setze voraus, dass die in einem Zeitelemente dt vom inneren zum äusseren Cylinder übergehende Wärmemenge der Temperaturdifferenz der beiden, welche sie zu dieser Zeit haben

dem arithmetischen Mittel der beiden Oberflächen direct, dem Abstande der beiden Oberflächen verkehrt proportional ist, also ausgedrückt werden kann durch

$$\frac{KF\vartheta dt}{\Delta}.$$

Darin bedeutet ϑ die Temperaturdifferenz der beiden Cylinder, also in unserem Falle, in welchem der äussere Cylinder die Temperatur Null hat, die Temperatur des inneren Cylinders. F stellt das Mittel der beiden Oberflächen, Δ ihre Distanz dar. K ist dann das Leitungsvermögen der den Zwischenraum ausfüllenden Substanz.

Dieser Ausdruck für die in der Zeit dt durchgehende Wärme ist demjenigen nachgebildet, welchen man in der Theorie der Wärmeleitung für den Fall des Durchgangs der Wärme durch einen von zwei parallelen Wänden begrenzten Körper aufstellt, welche Wände fortan bei constanten um ϑ verschiedenen Temperaturen gehalten werden. Die Vertheilung der Temperaturen innerhalb des Körpers ist nach dem Gesetze der geraden Linie bestimmt, wenn K von der Temperatur selbst unabhängig ist. Derselbe Ausdruck gilt auch für den stationären Übergang der Wärme von einer isothermen Fläche zu einer sehr nahen andern, wenn die Temperaturen in beiden Flächen constant bleiben. Bei nicht sehr kleiner Distanz ist allerdings für die cylindrischen Theile der Oberfläche ein von den Logarithmen der Radien abhängiger Ausdruck theoretisch richtiger.

In unserem Falle ändert sich aber die Temperatur der einen isothermen Fläche fortwährend. Wenn daher obiger Ausdruck auch für diesen Fall angewendet wird, so ist dabei vorausgesetzt, dass die mit der Änderung der Temperatur des inneren Cylinders nöthige Änderung der Vertheilung der Temperatur im Zwischenraum mit ersterer gleichmässig erfolge.

Die in der Zeit dt dem inneren Cylinder entführte Wärmemenge lässt sich aber noch ausdrücken durch

$$-PCd\vartheta.$$

Darin ist $-d\vartheta$ die in der Zeit dt erfolgte Temperaturabnahme, C die specifische Wärme, P das Gewicht des Cylinders. Die

Wärmemenge, welche die im Cylinder eingeschlossene Luft verliert, kann vernachlässigt werden, ebenso auch die Störung, welche das Glasröhrchen veranlasst. Zur Bestimmung von θ als Function der Zeit haben wir also die Gleichung

$$PCd\theta = -\frac{KF\theta dt}{\Delta} \tag{4}$$

deren Auflösung

$$\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \tag{5}$$

ist, worin θ_0 den Werth von θ zur Zeit $t = 0$, also die Anfangstemperatur des Cylinders bedeutet, und abkürzend

$$\beta = \frac{KF}{PC\Delta} \tag{6}$$

gesetzt ist.

Zur Prüfung dieser Formel ist es nothwendig, die Temperatur des inneren Cylinders für bestimmte Zeiten zu kennen. Es wird wieder vorausgesetzt, dass die Temperatur des Cylinders der Temperatur der in ihm eingeschlossenen Luft gleich, also durch den Druck dieser Luft bestimmbar sei.

Ist p_0 Druck zu Beginn der Zeit, p zur Zeit t, und p_1 am Ende des Versuches, nachdem die Luft im inneren Cylinder die Temperatur 0° angenommen hat, so ist

$$p_0 = (1+\alpha\theta_0)p_1, \quad p = (1+\alpha\theta)p_1,$$

woraus

$$\frac{\theta_0}{\theta} = \frac{p_0 - p_1}{p - p_1}$$

sich ergibt. Es ist also

$$\frac{p_0 - p_1}{p - p_1} = e^{\beta t}$$

oder, für die numerische Berechnung eingerichtet,

$$\frac{\log(p_0 - p_1) - \log(p - p_1)}{t} = \beta \log e. \tag{7}$$

Sind die gemachten Voraussetzungen zulässig, so muss sich aus den Versuchen der Quotient auf der ersten Seite dieser Gleichung als constante Zahl ergeben.

Was die Drücke anbetrifft, so können dieselben, da nur ihre Verhältnisse in Betracht kommen, nach beliebigem Masse gemessen werden. Es ist daher auch nicht nothwendig, die Correction wegen des mit dem Steigen des Quecksilbers im Manometerrohr verbundenen Sinkens des Niveau's im Quecksilberreservoir anzubringen.

Ich will nun die Versuche, welche ich mit verschiedenen in der beschriebenen Weise construirten Apparaten ausgeführt habe, der Reihe nach folgen lassen.

I. Versuch.

Apparat aus Kupfer.

Innerer Radius des äusseren Cylinders = 2·089 Cm., Höhe des inneren Cylinders = 6·88 Cm., Abstand der beiden Mantelflächen Δ = 0·2346 Cm., Gewicht des inneren Cylinders = 59·65 Gramm.

Der innere Radius des äusseren Cylinders wurde aus dem Gewichte des Wassers, welches er fasst, bestimmt, ebenso Δ aus dem Gewichte des Wassers, welches der Zwischenraum der beiden Cylinder fasst.

Die Zahlen in der ersten Columne der folgenden Tafel bedeuten die Höhen der Quecksilbersäule im Manometer, ausgedrückt in Millimetern, die Zahlen in der zweiten Columne die Zeiten, in welchen diese Höhen erreicht wurden, in Secunden, die Zahlen in der dritten Columne sind die nach der Formel (7) berechneten Werthe von $\beta \log e$.

h	t	$\beta \log e$
5	27	0·00204
10	58	205
15	94	205
20	137	206
25	192	206
30	263	209
41·8	∞	

II. Versuch.

Apparat derselbe, wie beim ersten Versuche.

h	t	$\beta \log e$
5	29	0·00204
10	62	207
15	101	208
20	147	212
25	210	212
30	304	209
39	∞	

III. Versuch.

Apparat derselbe, wie beim ersten und zweiten Versuch.

h	t	$\beta \log e$
5	27	0·00206
10	58	205
15	95	204
20	139	205
25	194	206
30	269	206
41·6	∞	

Die Abweichungen, welche die aus einem und demselben, und die aus den verschiedenen Versuchen abgeleiteten Werthe von $\beta \log e$ zeigen, sind so klein, dass sie durch die Fehler der Zeitbeobachtungen allein schon erklärt werden können. Es kann daher die Anwendbarkeit der obigen Betrachtungen und Rechnungen auf diese Versuche als hinreichend begründet angesehen werden.

Aus diesen Versuchen findet man nun K nach der Formel

$$K = \frac{PC\Delta\beta \log e}{F \log e}.$$

Es ist nun $P = 59{\cdot}65$; wird die specifische Wärme des Kupfers $C = 0{\cdot}0935$ genommen, so folgt $PC = 5{\cdot}577$. Die innere Oberfläche des äusseren Cylinders ist $= 123{\cdot}9$ Quadratcentimeter, die äussere Oberfläche des inneren Cylinders ist $= 101{\cdot}8$, also

$F = 112 \cdot 85$ und $F \log e = 49 \cdot 01$. Führt man noch $\Delta = 0 \cdot 2346$ ein, so wird

$$K = 0 \cdot 02732\, \beta \log e.$$

Nimmt man aus den Zahlen des ersten Versuches für $\beta \log e$ das Mittel $= 0 \cdot 00206$, so folgt

$$K = 0 \cdot 0000561.$$

Nimmt man aus dem zweiten Versuche $\beta \log e = 0 \cdot 00208$, so folgt

$$K = 0 \cdot 0000568.$$

Der dritte Versuch gibt im Mittel $\beta \log e = 0 \cdot 00205$, also

$$K = 0 \cdot 0000560.$$

IV. Versuch.

Apparat aus Kupfer.

Äusserer Cylinder derselbe, wie bei den drei ersten Versuchen. Höhe des inneren Cylinders $= 6 \cdot 36$ Cm., Abstand der beiden Mantelflächen $\Delta = 0 \cdot 512$ Cm., Gewicht des inneren Cylinders $= 52 \cdot 6$ Gramm.

h	t	$\beta \log e$
5	59	0·00097
10	126	98
15	209	96
20	304	98
25	431	97
30	606	97
40·4	∞	

V. Versuch.

Apparat derselbe, wie beim vierten Versuch.

h	t	$\beta \log e$
5	64	0·00099
10	140	98
15	232	98
20	348	98
25	504	98
36·8	∞	

Es tritt auch bei diesem zweiten Apparat, in welchem der Abstand der beiden Mantelflächen mehr als doppelt so gross ist als im ersten, die Anwendbarkeit der obigen Formeln in unzweifelhafter Weise hervor.

Da nun $P = 52{\cdot}6$, so folgt $PC = 4{\cdot}918$. Die innere Oberfläche des äusseren Cylinders ist jetzt $= 124{\cdot}3$, die äussere Oberfläche des inneren Cylinders $= 78{\cdot}65$, daher $F = 101{\cdot}5$ und $F \log e = 44{\cdot}08$. Ferner ist $\Delta = 0{\cdot}512$ und ergibt sich

$$K = 0{\cdot}05711 \beta \log e.$$

Nimmt man aus dem vierten Versuche $\beta \log e = 0{\cdot}00097$, so folgt

$$K = 0{\cdot}0000554.$$

Für $\beta \log e = 0{\cdot}00098$ nach dem fünften Versuche folgt

$$K = 0{\cdot}0000560.$$

VI. Versuch.

Apparat aus Messing.

Innerer Radius des äusseren Cylinders $= 1{\cdot}939$ Cm., Höhe des inneren Cylinders $= 6$ Cm., Abstand der beiden Mantelflächen $\Delta = 0{\cdot}239$ Cm., Gewicht des inneren Cylinders $= 30{\cdot}38$ Gramm.

Dieser Apparat unterscheidet sich von den zwei vorhergehenden noch dadurch, dass er mit zwei Hähnen versehen ist, von denen der eine im Boden des äusseren Cylinders eingekittet ist, der andere neben dem Manometerrohr durch den Kork hindurchgeht.

h	t	$\beta \log e$
5	16	0·00327
10	34	329
15	55	329
20	81	325
25	113	323
30	155	321
35	214	322
44	∞	

VII. Versuch.

Apparat derselbe, wie beim sechsten Versuch.

h	t	$\beta \log e$
5	21	0·00334
10	47	325
15	79	326
20	122	323
25	185	322
33·5	∞	

Nimmt man die specifische Wärme des Messings $= 0·0939$, so ist, da $P = 30·38$, $PC = 2·853$. Die innere Oberfläche des äusseren Cylinders ist $= 102·5$, die äussere des inneren $= 82·25$ also $F = 92·38$, $F \log e = 40·12$, und da $\Delta = 0·239$, so ergibt sich

$$K = 0·016996 \beta \log e.$$

Wird aus dem sechsten Versuche $\beta \log e = 0·00325$ genommen, so folgt

$$K = 0·0000552.$$

Der siebente Versuch gibt $\beta \log e = 0·00326$, somit

$$K = 0·0000554.$$

VIII. Versuch.

Bei diesem wurde derselbe Apparat benützt, wie bei den zwei vorhergehenden Versuchen. Es wurde jedoch die Luft in dem Zwischenraume zwischen den beiden Cylindern verdünnt. An einem an der Stelle des oberen Hahns angebrachten Manometer wurde der Druck der eingeschlossenen Luft bestimmt. Die Höhe der Quecksilbersäule im Manometer war 320 Mm., der Barometerstand während des Versuches 748, bleibt also für den Druck der eingeschlossenen Luft 428 Mm. oder 0·56 Atmosphäre.

h	t	$\beta \log e$
5	20	0·00325
10	43	329
15	72	325
20	109	323
25	160	322
36	∞	

Für $\beta \log e$ ergeben sich also aus diesem Versuche dieselben Zahlen, wie aus den beiden vorhergehenden Versuchen, bei welchen die leitende Luft unter dem gewöhnlichen Drucke stand. Damit ist zugleich auf das schlagendste bewiesen, dass die Grösse des Wärmeleitungsvermögens der Luft unabhängig ist von ihrer Dichte.

Nimmt man $\beta \log e = 0{\cdot}00325$, so folgt wieder

$$K = 0{\cdot}0000552.$$

Die aus diesen acht Versuchen resultirenden Werthe von K sind demnach

$$\begin{array}{rr} & K = 0{\cdot}0000561 \\ & 568 \\ & 560 \\ & 554 \\ & 560 \\ & 552 \\ & 554 \\ & 552 \\ \hline \text{im Mittel} & K = 0{\cdot}0000558 \text{ und} \\ & k = 0{\cdot}256. \end{array}$$

Das Wärmeleitungsvermögen des Kupfers ist in den hier angenommenen Massen nach der Bestimmung von Neumann $= 1{\cdot}108$, nach der Bestimmung von Angström $= 0{\cdot}91$; es leitet also die Luft nahe 20000mal schlechter als das Kupfer.

Nach Forbes ist das Leitungsvermögen des Eisens bei $25^\circ = 0{\cdot}1875$, das gefundene Leitungsvermögen der Luft also 3360mal kleiner als das des Eisens; Maxwell berechnete es aus seiner Theorie mit Zuhilfenahme seiner, über die innere Reibung der Luft gemachten Versuche als 3500mal kleiner.

Es ist im vorhergehenden vorausgesetzt worden, dass die Wärme von dem inneren Cylinder zum äussern nur durch Leitung gelange, die Strahlung wurde ganz vernachlässigt. Um zu erfahren, wie gross der durch diese Vernachlässigung begangene Fehler sei, machte ich einen Versuch mit dem ersten Apparate in der Abänderung, dass die innere Oberfläche des äusseren Cylinders berusst, die äussere Oberfläche des inneren Cylinders

aber mit Tusche bedeckt wurde. Der Versuch lieferte folgende Daten:

h	t	$\beta \log e$
5	26	0·00209
10	55	212
15	88	215
20	129	214
25	180	214
30	249	213
42·2	∞	

Die Werthe von $\beta \log e$, welche dieser Versuch liefert, sind so wenig grösser, als die aus den drei ersten Versuchen gefundenen, dass diese Abweichungen auch durch andere Ursachen, als durch die vermehrte Strahlung bedingt sein können, so durch die in Folge der Bedeckung der Flächen eingetretene Verminderung ihres Abstandes. Es beweist also dieser Versuch, dass die gefundenen Werthe von K wirklich das Leitungsvermögen der Luft für die Wärme darstellen, insofern die Strahlung einen die Grenzen der Beobachtungsfehler kaum übersteigenden Beitrag zu diesen Werthen von K liefert, namentlich bei polirten Oberflächen, wie bei den vorhergehenden Versuchen.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXV. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

3.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

VII. SITZUNG VOM 7. MÄRZ 1872.

In Verhinderung des Präsidenten führt Herr Hofrath Freih. v. Burg den Vorsitz.

Herr Director Dr. G. Tschermak dankt mit Schreiben vom 7. März für die ihm, zum Zwecke der Untersuchung der Structur des Meteoreisens bewilligte Subvention von 300 fl.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Untersuchungen über die Zwischensubstanz im Hoden der Säugethiere", vom Herrn *med. stud.* Franz Hofmeister, übermittelt durch Herrn Prof. Dr. Ew. Hering in Prag.

„Vorläufiger Bericht über den propulsatorischen Apparat der Insecten und über das Vorkommen eines echten elastischen Fasernetzes bei Hymenopteren", vom Herrn Prof. Dr. V. Graber in Graz.

„Das verallgemeinerte Dirichlet'sche Integral", von Herrn Prof. Dr. L. Gegenbauer in Krems.

Herr Dr. A. Boué legt eine Abhandlung: „Über geologische Chronologie" vor.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia Pontificia de' nuovi Lincei: Atti. Anno XXV, Sess. 2da. Roma, 1872; 4°.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. December 1871. Berlin; 8°.

— — Königl. Bayer., zu München: Sitzungsberichte der math.-physik. Classe. 1871. Heft 3. München; 8°.

Annalen der Chemie & Pharmacie, von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R., Band LXXXIV, Heft 3, und VIII. Supplementband. 3. Heft. Leipzig und Heidelberg, 1871 & 1872; 8°.

Annuario marittimo per l'anno 1872, compilato per cura dell' i. r. governo marittimo in Trieste e del r. governo marittimo in Fiume. XXII. Annata. Trieste, 1872; 8°.

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrgang, Nr. 7. Wien, 1872; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1876—1877. (Bd. 79. 4—5.) Altona, 1872; 4°.

Beck, Friedr. Leop. Ritter, Über die Naturkräfte, welche neben der Gravitation die Bewegungen der Himmelskörper vermitteln, und anderes Einschlägige. Berlin; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nrs. 7—8. Paris, 1872; 4°.

Genootschap, Provinciaal Utrechtsch, van Kunsten en Wetenschapen: Verslag, 1870 & 1871. Utrecht; 8°. — Aanteekeningen. 1870. Utrecht; 8°. — Leven en werken van Willem Jansz. Blaeu, door P.J.H. Baudet. Utrecht, 1871: 8°. — *Memoria Ludovici Caspari Valckenarii. Scripsit* Jo. Theod. Bergman. *Rheno-Trajecti,* 1871; 8°. — Asman, P. H., Proeve eener geneeskundige plaatsbeschrijving van de gemeente Leeuwarden. Utrecht, 1870; 4°. — Harting, P., Mémoire sur le genre Potérion. Utrecht, 1870; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 9—10. Wien, 1872; 4°.

Grunert, Joh. Aug., Archiv der Mathematik & Physik. LIV. Theil 1. Heft. Greifswald, 1872; 8°.

Halle, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1871. 4° & 8°.

Instituut, k. Nederlandsch meteorologisch: Nederlandsch meteorologisch Jaarboek voor 1871. I. Deel. Utrecht, 1871; Quer-4°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band V, 1. & 2. Heft. Leipzig, 1872; 8°.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 5. Graz, 1872; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 5. Wien; 8°.

Michl, F., Schlesiens Bodenproduction und Industrie im Vergleiche mit den anderen Kronländern der österr.-ungar. Monarchie. Troppau, 1872; 8°.

Mittheilungen des k. k. techn. & administr. Militär-Comité. Jahrgang 1872, 2. & 3. Heft. Wien; 8°.

— aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 18. Band, 1872, Heft II, nebst Ergänzungsheft Nr. 31. Gotha; 4°.

Nature. Nrs. 121—122, Vol. V. London, 1872; 4°.

Owen, Richard, A Cuvierian Principle in Palaeontology tested by Evidences of an Extinct Leonine Marsupial *(Thylacoleo carnifex.)* London, 1871; 4°. — On the Dodo (Part. II.) Notes on the Articulated Skeleton of the Dodo *(Didus ineptus)* in the British Museum. London, 1871; 4°. — Pterodactyles of the Liassic Formations. London, 1869; 4°.

Peschka, Gust. Ad. V., Der Indicator und dessen Anwendung. Brünn, 1871; Kl. 4°. — Popper's Anti-Incrustator. Berlin, 1869; 8°, — Über Wartung der Dampfkessel etc. Brünn, 1870; Kl. 4°. — Über die Wirksamkeit der Patent-Kesseleinlagen. Berlin, 1870; 8°. — Über die Priorität der Erfindung der Patent-Kesseleinlagen. Brünn, 1870; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1872, Nr. 3. Wien; 4°.

Report of Surgical Cases treated in the Army of the United States from 1865 to 1871. Washington, 1871; 4°.

„Revue politique et littéraire" et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger". Ier Année (2e Série), Nrs. 35—36. Paris & Bruxelles, 1872; 4°.

Societät, physicalisch-medicinische, zu Erlangen: Sitzungsberichte. 3. Heft. Mai 1870 bis August 1871. Erlangen, 1871; 8°.

Société Hollandaise des Sciences à Harlem: Natuurkundige Verhandelingen. III. verzameling. Deel I, Heft 4. Haarlem, 1872; 4°. — Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome VI, 4e—5e livraisons. La Haye, Bruxelles, Paris, Leipzig, Londres & New-York, 1871; 8°.

— Impériale de médecine de Constantinople: Gazette médicale d'orient. XIVe Année, Nrs. 11—12; XVe Année, Nr. 1. Constantinople, 1871; 4°.

Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux: Mémoires. Tome VIII, 2e Cahier. Paris & Bordeaux, 1872; 8°.

— géologique de France: Bulletin. 2e série, tome XVIII. 1871. Nr. 3. Paris; 8°.

— d'histoire naturelle de Colmar: Bulletin. 11e Année. 1870. Colmar; 8°.

Society, The Asiatic, of Bengal: Journal. Part I, Nr. 2. 1871; Part II, Nr. 3. 1871. Calcutta; 8°. — Proceedings. 1871. Nrs. VIII—XI. Calcutta; 8°.

Verein, naturwissenschaftlicher, von Neu-Vorpommern und Rügen: Mittheilungen. III. Jahrgang. Berlin, 1871; 8°.

— naturwissenschaftl., zu Bremen: Beilage Nr. 1 zu den Abhandlungen: Tabellen über den Flächeninhalt des Bremischen Staats etc. Bremen, 1871; 4°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 8—9. Wien, 1872; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIV. Jahrgang, 2. Heft. Wien, 1872; 4°.

VIII. SITZUNG VOM 14. MÄRZ 1872.

In Verhinderung des Präsidenten führt Herr Hofrath Freiherr v. Burg den Vorsitz.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Über die Reihenentwicklung von Functionen und deren Anwendung in der algebraischen Analysis sowohl wie bei der Integration der Differentialgleichungen", vom Herrn Dr. Franz Wallentin, Prof. an der Realschule im VI. Bezirke Wiens.

„Über bestimmte Integrale", vom Herrn Prof. L. Gegenbauer in Krems.

Herr Hofrath Dr. E. Brücke legt eine im physiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Arbeit des *Cand. med.* Herrn Friedr. Schauta vor, betitelt: „Zerstörung des *Nervus facialis* und deren Folgen".

Herr Prof. Dr. V. v. Lang übergibt eine „Notiz über absolute Intensität und Absorption des Lichtes", vom Herrn Prof. Dr. Al. Handl in Lemberg.

Herr E. Priwoznik, Hauptmünzamtschemiker, überreicht folgende zwei Mittheilungen:

1. „Chemische Untersuchung eines auf einer antiken Haue aus Bronze gebildeten Überzuges".
2. „Versuche über die Bildung der Schwefelmetalle von Kupfer, Silber, Zinn, Nickel und Eisen".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

d'Achiardi, Antonio, Su di alcuni minerali della Toscana non menzionati da altri o incompletamente descritti. Firenze, 1871; 8°. — Sui Granati della Toscana. Firenze, 1871; 8°. — Sui Feldispati della Toscana. Firenze, 1872; 8°.

Agassiz, Louis, A Letter concerning Deep-Sea Dredgings, addressed to Prof. Benj. Peirce, Cambridge, Mss. 1871; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrgang, Nr. 8. Wien, 1872; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1878. (Bd. 79. 6.) Altona, 1872; 4°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome XLIII, Nr. 169. Génève, Lausanne, Paris, 1872; 8°.

Frauenfeld, G. R. v. Die Pflege der Jungen bei den Thieren. Wien, 1871; 8°. — Die Wirbelthierfauna Niederösterreichs. Wien, 1871; 8°. — Die Grundlagen des Vogelschutzgesetzes. Wien, 1871; 8°. — Der Vogelschutz. Wien, 1871; 8°.

Gesellschaft, österr., für Meteorologie; Zeitschrift. VIII. Band, Nr. 5. Wien, 1872; 4°.

— Senckenbergische naturforschende: Abhandlungen. VII. Bandes 3. & 4. Heft. Frankfurt a. M., 1870; 4°. — Bericht. 1869—1870. Frankfurt a. M., 1870; 8°.

— geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XV. (N. F. V.) Nr. 2. Wien, 1872; 8°.

— gelehrte estnische, zu Dorpat: Verhandlungen. VI. Band, 3. & 4. Heft; VII. Band, 1. Heft. Dorpat, 1871; 8°. — Sitzungsberichte, 1870. Dorpat; 8°. — Meteorologische Beobachtungen, angestellt in Dorpat im Jahre 1866 bis 1870. IV. & V. Jahrgang. Dorpat, 1871; gr. 8°.

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie und verwandte Fächer, von Vorwerk. Band XXXVI, Heft 5 & 6 (1871); Band XXXVII, Heft I (1872). Speyer; 8°.

Jenzsch, Gustav, Über die am Quarze vorkommenden Gesetze regelmässiger Verwachsung mit gekreuzten Hauptaxen. Erfurt, 1870; 8°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 6. Wien; 8°.

Lippich, Ferdinand, Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnittes etc. Wien, 1871; 4°. — Fundamentalpunkte eines Systems centrirter brechender Kugelflächen. Graz, 1871; 8°.

Lipschitz, R., Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten

ist. (Aus dem Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik. Bd. 74.) 4°.

Loomis, William Isaacs, The American and the Englishman: or Sir William Isaacs Loomis *versus* Sir Isaac Newton. Martindale Depot, Columbia County, 1871; 8°.

Mayr, Gust. L., Die mitteleuropäischen Eichengallen in Wort und Bild. 2. Hälfte. Wien, 1871; 8°. — Neue Formiciden. (Verhdlgn. der k. k. zool.-bot. Ges. in Wien 1870.) 8°. — Die Belostomiden. *(Ibidem.)* 8°.

Moniteur scientifique. Année 1871. 337—360° Livraisons. Année 1872. 362° Livraison. Paris; 4°.

Nature. Nr. 123, Vol. V. London, 1872; 4°.

Pollichia: XXVIII & XXIX. Jahresbericht. Dürckheim a d. H., 1871; 8°.

Plantamour, E., Résumé météorologique des années 1869 & 1870 pour Génève et le Grand Saint-Bernard. Génève; 8°.

Prestel, Das Regenwasser als Trinkwasser der Marschbewohner etc. Emden, 1871; gr. 8°.

Pulkowa, Sternwarte: Observations de Poulkova, publiées par Otto Struve. Vol. III. St. Pétersbourg, 1870; 4°. — Jahresbericht. 1870. St. Petersburg; 8°. — *Tabulae refractionum in usum Speculae Pulcovensis congestae. Petropoli, 1870; 4°.* — Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie. Von H. Gyldén. (Mém. de l'Acad. Imp. d. sc. de St. Pétersbourg. VII° Série, Tome XVI, Nr. 10.) 4°. — Détermination du coéfficient constant de la précession au moyen d'étoiles de faible éclat, par M. M. Nyren. St. Pétersbourg, 1870; 4°. — Von den Durchgängen der Venus durch die Sonnenscheibe. Von V. Dellen. Petersburg, 1870; 8°. (Russisch.)

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1872, Nr. 4. Wien; 4°.

„Revue politique et littéraire“ et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger“. Ire Année (2° série) Nr. 37. Paris & Bruxelles, 1872; 4°.

Società Italiana di antropologia e di etnologia: Archivio per l'antropologia e la etnologia. II° Vol., fasc. 1°. Firenze, 1872; gr. 8°.

Societas Scientiarum Fennica: Acta. Tomus IX. Helsingforsiae, 1871; 4⁰. Öfversigt. XIII. 1870—1871. Helsingfors, 1871; 8⁰. — Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk. 17. Häftet. Helsingfors, 1871; 8⁰. — Bidrag till Finlands officiela Statistik. V. 1. Häftet. Helsingfors, 1869; 4⁰.

— *Regia, Scientiarum Upsalensis: Nova acta. Seriei tertiae. Vol. VII. Fasc. II. 1870. Upsaliae; 4⁰*. — Bulletin météorologique mensuel de l'Observatoire de l'Université d'Upsal. Vol. II, Nrs. 1—6. Upsal, 1870; 4⁰.

Société Impériale des naturalistes de Moscou: Bulletin. Année 1871. Tome XLIV, Nrs. 3 & 4. Moscou, 1872; 8⁰.

Westphal-Castelnau, Alfred, Catalogue de la collection de reptiles de feu M. Alexandre Westphal-Castelnau. 1869. Montpellier, 1870; gr. 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 10. Wien, 1872; 4⁰.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins. XXIV. Jahrgang, 3 Heft. Wien, 1872; 4⁰.

Über die Veränderung einer Bronze durch langes Liegen in der Erde.

Von **E. Priwoznik,**

Chemiker am k. k. Hauptmünzamte.

Unter den vom Herrn Ministerialrathe v. Schrötter in den alten Kelten-Gräbern am Salzberge bei Halstatt aufgefundenen antiken Gegenständen, von welchen der grösste Theil bereits wissenschaftlich untersucht ist, befanden sich auch einige Stücke, welche schon ihres auffallenden Aussehens wegen geeignet erschienen, einige Aufmerksamkeit zu erregen und mir von demselben zur chemischen Untersuchung gütigst überlassen wurden.

Es sind dies Bruchstücke eines nieren- oder traubenförmigen Überzuges einer Haue oder Streitaxt aus Bronze, von vorherrschend indigblauer Farbe, im Gewichte von nahe 100 Grammen und einer Dicke von 5—7 Mm.; nur an den Enden der Haue beträgt dieselbe gegen 2 Cm.

Die Bruchstücke sind an nur wenigen Stellen der inneren Seite mit einem schwachen, hellgrünen Überzuge von basisch-kohlensaurem Kupferoxyd bedeckt und zeigen, genau besehen, an mehreren Stellen eine ungleichartige Schichtung.

Die erste, äussere und zugleich dickste Schichte ist sehr spröde und besitzt eine am Bruche, der im frischen Zustande unvollkommen metallglänzend ist, deutlich erkennbare, strahlige Textur. Der Strich ist tief dunkelblau, beinahe schwarz.

Eine Probe hievon gibt beim Erwärmen etwas Wasser ab, welches sauer reagirt; später entweichen geringe Mengen empyreumatisch riechender Dämpfe und endlich entweicht Schwefel. Bei rascher Erhitzung entwickelt sich auch Schwefelwasserstoffgas, eine Erscheinung, welche schon bei vielen Schwefelmetallen beobachtet wurde.

Wie das durch Fällung dargestellte Schwefelkupfer, oxydirt sich auch diese Schichte, theilweise mit Wasser bedeckt, und gibt an dasselbe beständig geringe Mengen von schwefelsaurem Kupferoxyd ab, nur geschieht dies wegen der Dichte der Masse langsamer als bei jenem. Es ist dies ein Umstand, welchen man mit dem verhältnissmässig seltenen Vorkommen von Einfach-Schwefelkupfer in der Natur in Zusammenhang gebracht hat.

Bei der quantitativen Analyse geschah die Auflösung der möglichst gereinigten Substanz in schwach verdünnter Salpetersäure und zur Bestimmung des Schwefels, wie üblich, unter öfterem Zusatz von Salzsäure und chlorsaurem Kali.

I. 0·5718 Grm. Substanz gaben 1·3388 Grm. schwefelsauren Baryt oder 0·1838 Grm. Schwefel und 0·461 Grm. Kupferoxyd entsprechend 0·368 Grm. Kupfer.

Bei vorsichtigem Erwärmen in einem Glasröhrchen über der kleinsten Flamme des Gasbrennens verloren 0·5405 Grm. Substanz 0·0165 Grm. Wasser.

II. 0·4995 Grm. Substanz gaben 0·4055 Grm. Kupferoxyd oder 0·3239 Grm. Kupfer und 0·0029 Grm. Eisenoxyd, d. i. 0·002 Grm. Eisen.

0·4655 Grm. Substanz verloren beim Erwärmen 0·014 Grm. Wasser.

100 Theile dieser Verbindung enthalten daher:

	I.	II.
Schwefel	32·14	—
Kupfer	64·35	64·84
Eisen	—	0·40
Wasser	3·05	3·00

oder nach Abzug der unwesentlichen Beimengungen vom Mittel aus I und II

	Gefunden	Die Formel CuS verlangt
Schwefel	33·22	33·54
Kupfer	66·77	66·46.

Die Verbindung ist daher Kupferindig oder Covellin, mit welchen sie in allen Eigenschaften übereinstimmt. Bekanntlich

findet sich derselbe meistens als höchst lockerer, poröser und dünner Überzug auf Kupferglanz, Kupferkies oder Buntkupfererz und nur selten in derben Massen.

Berechnet man aus der Analyse des krystallisirten Covellins von Leogang in Salzburg die von C. v. Hauer[1] gefundenen Zahlen, nach Abzug des, von der Substanz nicht entfernbaren Chalkopyrites, auf 100, so erhält man die, mit den letztangeführten gleichfalls hinreichend genau stimmenden Zahlen: 34·38 für Schwefel und 65·72 für Kupfer.

Die Bestimmung der Dichte, welche an den schönsten und reinsten Stücken mittelst des Piknometers vorgenommen wurde, ergab bei 28° C. 4·675. Zepharovich[2] fand die des krystallisirten Covellin's vom letztgenannten Fundorte, gleich 4·636.

Die zweite Schichte findet sich nur an wenigen Stellen des Überzuges und lässt sich nur schwer von der äusseren Schichte trennen. Sie ist von schwarzgrauer Farbe, nur 0·5 Mm. dick und gibt beim Erwärmen weder Wasser noch Schwefel ab. Sie besteht, der Hauptmasse nach, aus Halbschwefelkupfer (Kupferglanz, Cu_2S) und enthält 15 Pct. Zinn beigemengt, welches auffallender Weise in der ersten Schichte nicht vorkommt

Die dritte Schichte endlich, welche ebenfalls nur an wenigen Stellen und in sehr kleiner Menge vorhanden war, liess sich, da sie aus einem feinen schwarzen Pulver bestand, leicht von der zweiten trennen. Sie gab beim Erwärmen anfangs Wasser, später Spuren von Arsen und gleichfalls keinen Schwefel ab. Diese Schichte enthält 59·8 Pct. Halbschwefelkupfer, 23·2 Pct. Zinn, 3·4 Pct. Wasser, Spuren von Antimon und Nickel, und überdies noch, was gewiss nur zufällig ist, nicht unbedeutende Mengen von schwefelsaurem Kalk und etwas Magnesia.

Blei, Zink und Silber, von welchen sich zuweilen geringe Mengen in alten Bronzen finden, waren in keinem Theile der Kruste enthalten. Wegen den, einzelnen Bruchstücken anhaftenden Knochenresten, musste auch auf Phosphorsäure besondere

---

[1] Sitzungsb. d. kais. Akad. d. Wissensch. math.-naturw. Bd. XII, p. 23.

[2] Dieselbe Abhandlung.

Rücksicht genommen werden; es waren indess nur geringe Spuren von derselben nachzuweisen.

Nach den von A. v. Schrötter [1] veröffentlichten Analysen der, in den alten Gräbern bei Halstatt gefundenen Bronze enthalten dieselben:

Kupfer	90·0—92 Pct.
Zinn	6·5— 9 „

und noch überdies in kleinen Mengen Eisen, Arsen, Nickel, Silber, Kobalt, Blei und Schwefel.

Wie aus den soeben angeführten Untersuchungen ersichtlich ist, enthält die in Rede stehende Kruste nicht blos die wesentlichen Bestandtheile der antiken Bronze, sondern auch noch von den zufälligen Beimengungen derselben, in kleinen Mengen: Eisen, Arsen, Antimon und Nickel.

Aus diesem Umstande muss man schliessen, dass die Kruste durch eine directe chemische Veränderung, nicht aber durch Ablagerung von aussen entstanden ist. Offenbar fand eine Wanderung des Zinnes und der Nebenbestandtheile von aussen nach innen statt, da es nicht wahrscheinlich ist, dass umgekehrt, das Kupfer nach aussen gedrängt wurde, um sich mit dem Schwefel zu verbinden.

Es unterliegt daher keinem Zweifel, dass die Umwandlung der antiken Bronze durch den directen Einfluss von löslichen Sulfiden oder schwefelwasserstoffhältigen Gasen bewirkt wurde, mithin auch die Bildung des Covellins hier auf einem anderen Wege erfolgte, als in den Erzlagerstätten.

Diese Ansicht ist auch durch das häufige Auftreten von Schwefelwasserstoff unter der Erdoberfläche gerechtfertigt. Es entwickelt sich aus faulenden, schwefelhältigen organischen Substanzen und dort, wo diese mit schwefelsauren Salzen vorkommen, entstehen auch lösliche Sulfide. Diese umwandeln metallisches Kupfer, auch wenn sie direct auf dasselbe einwirken, in Schwefelkupfer, welches, wenn die übrigen Umstände hiezu günstig sind, auch in der blauen Modification erscheinen kann. Versuche, welche ich hierüber angestellt habe, ergaben, dass

[1] Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. phil. hist. Cl. Bd. XXXVII, p. 177.

kupferreiche, der antiken Bronze ähnlich zusammengesetzte Legirungen, bei andauernder Berührung mit gelbem Schwefelammon sich mit indigblau gefärbten Einfach-Schwefelkupfer überziehen.

Auch hat sich hiebei gezeigt, dass die Legirungen des Kupfers widerstandsfähiger gegen dieses Reagens sind, wenn sie Zink enthalten und dass die Widerstandsfähigkeit mit dem Gehalte an diesem Metalle zunimmt. Gelbes Messing, z. B., das viel Zink enthält, erleidet, selbst wenn es lange Zeit mit den Lösungen der alkalischen Supersulfurete in Berührung bleibt, keine wesentliche Veränderung.

Nähere Angaben über das Verhalten des Kupfers und mehrerer anderer Metalle, in genannter Hinsicht, finden sich in der nächsten Abhandlung.

Bisher lag nur die von Knop gegebene Erklärung vor, über die Bildung von Covellin. Nach dieser bildet er sich in Erzlagerstätten aus dem Kupferkiese, welchen sauerstoff- und kohlensäurehältiges Wasser etc. in kohlensaures Eisenoxydul und Kupferglanz umwandeln, von welchen der letztere unter dem weiteren Einflusse der genannten Agentien in Covellin und Kupferoxydul zerfällt.

Die Erklärung über die Bildung von Covellin an der Bronze, steht daher mit jener von Knop in keiner Beziehung.

Ähnliche Beobachtungen, wie an der Bronze, hat man auch an den antiken Silbergeräthen, die im Jahre 1868 bei Hildesheim aufgefunden wurden, gemacht. Auch sie waren mit dreifach geschichteten Krusten bedeckt, von welchen Schertel, die äussere als Hornsilber, die mittlere als Halbchlorsilber, und die letzte als aus einer geringen Menge Gold bestehend, erkannte.

Wir finden also auch hier den, gegen die einwirkenden Stoffe den grössten Widerstand leistenden Bestandtheil der Legirung, von dem anderen, dem Silber, getrennt und in die innerste Schichte des Überzuges gedrängt, indem das Gold, wie bei der hier besprochenen antiken Bronze das Zinn, eine Orts-

[1] Journ. f. prakt. Chem. Bd. III, p. 317.

veränderung erfuhr. Church[1] gibt an, dass ein in alten Gräbern auf der Insel Cypern gefundener Gegenstand aus Silber nur mit einer dünnen Schichte überzogen war, in welcher er Schwefelsilber, Chlorsilber und Jodsilber nachwies. Brüel[2] fand in alten Münzen von verschiedenen Fundorten neben Chlorsilber auch Bromsilber.

---

[1] Polytechn. Centralbl. 1871, Nr. 14.

[2] Bischof, Chem. Geologie. Bd. II, p. 9.

Ein Beitrag zur Bildung von Schwefelmetallen.

Von **E. Priwoznik**,

Chemiker am k. k. Hauptmünzamte.

Durch die soeben beschriebene Untersuchung über die chemische Veränderung einer antiken Bronze fand ich mich veranlasst, das Verhalten mehrerer Metalle gegen lösliche alkalische Schwefelverbindungen genauer zu untersuchen. Vornehmlich trug auch der Umstand hiezu bei, dass die Fachliteratur nur einige ganz kurze Angaben hierüber enthält, welche sich blos auf Silber und Quecksilber beschränken.

Die meisten Metalle erleiden im blanken Zustande, selbst nach mehrmonatlicher Berührung mit den Lösungen der alkalischen Supersulfurete, nur so unbedeutende Veränderungen, dass sie keiner besonderen Beachtung werth sind; so werden Cadmium, Blei, Wismuth, Antimon, Zink, Kobalt und Aluminium durch eine Lösung von gelbem Schwefelammon äusserst wenig angegriffen und nur einige davon bedecken sich mit ganz schwachen Anlauffarben.

Andere Metalle geben aber Reactionen, welche wohl einige Aufmerksamkeit verdienen.

Im Folgenden finden sich die mit Kupfer, Silber Zinn, Nickel und Eisen angestellten Versuche beschrieben, bei welchen einige Erscheinungen beobachtet wurden, die meines Wissens bisher unbeachtet geblieben sind.

1. Kupfer. Auf galvanoplastischem Wege dargestelltes und daher sehr reines Kupfer färbte sich in gelbem Schwefelammon, dem noch eine beträchtliche Menge Schwefel zugesetzt war, sofort dunkel, und schon nach kurzer Zeit bildete sich an der ganzen Oberfläche eine Kruste, welche an der, dem Metalle zugekehrten inneren Seite mehr oder weniger braunschwarz, an

der äusseren jedoch blauschwarz war; sie trennte sich bald vom Kupfer, um einer neuen Platz zu machen. Man erhält in verhältnissmässig kurzer Zeit nicht unbeträchtliche Mengen von dieser Substanz, welche bald der ganzen Masse nach eine blaue Farbe annimmt.

Der Körper ist Einfach-Schwefelkupfer, denn eine ungewogene Quantität gab 1·794 Grm. schwefelsauren Baryt, entsprechend 0·246 Grm. Schwefel und 0·493 Grm. Kupfer. Hieraus berechnen sich auf 16 Theile Schwefel 32 Theile Kupfer; die Rechnung verlangt davon 31·7.

Von blauer Farbe erhielt man dieses Schwefelkupfer bisher nur auf trockenem Wege, und zwar entweder durch vorsichtiges Erwärmen eines Gemenges von fein zertheiltem, metallischem Kupfer mit Schwefelblumen, oder durch Schmelzen von Kupfer mit Schwefelleber. Lässt man die Einwirkung des Schwefelammons auf das Kupfer längere Zeit dauern, wobei es zweckmässig ist, eine gut verschlossene Flasche anzuwenden, so verschwindet auffallender Weise nach Verlauf von einigen Tagen die blaue Farbe des Kupfersulfuretes und geht in Schwarz über.

0·471 Grm. von der so gebildeten Substanz gaben 0·7026 Grm. schwefelsauren Baryt oder 0·0965 Grm. Schwefel, d. i. in 100 Theilen 20·48; die Formel Cu_2S verlangt 20·25.

Die Verbindung ist daher Halbschwefelkupfer.

In diesem Stadium ist die Reaction zu Ende und es erscheint die über dem Niederschlage befindliche Flüssigkeit wasserhell; Salzsäure scheidet aus derselben keinen Schwefel ab und mit schwefelsaurer Magnesia entsteht kein Niederschlag von Magnesiahydrat. Sie ist also, womit auch ihre übrigen Eigenschaften übereinstimmen, nichts anderes, als eine Lösung von Einfach-Schwefelammon.

Der Vorgang zerfällt demnach in zwei Perioden, welche, wenn man von dem Zweifach-Schwefelammon ausgeht, sich durch die folgenden Gleichungen darstellen lassen:

$$1.\ H_8N_2S_2 + Cu = H_8N_2S + CuS$$
$$2.\ CuS + Cu = Cu_2S$$ [1].

---

[1] Cu = 63·4.

Gelbes Schwefelammon wandelt daher metallisches Kupfer in blaues Einfach-Schwefelkupfer um, welches bei einem Überschuss an Kupfer und sobald die Entfärbung des Schwefelammons eingetreten ist, weiter in Halb-Schwefelkupfer übergeht.

Um zu erfahren, ob das auf diese Weise erhaltene Einfach-Schwefelammon bei fortdauernder Berührung mit Kupfer und bei Abschluss von Luft noch eine weitere Veränderung erleidet, wurde eine Probe davon über Kupfer in einer zugeschmolzenen Glasröhre, welche damit bis oben gefüllt war, aufbewahrt. In der ersten Zeit war keine Veränderung eingetreten, später wurde das Kupfer matt und nahm erst nach Monaten eine grauschwarze Färbung an.

Befindet sich die Flüssigkeit über Kupfer in einer Flasche, so nimmt das, durch letzteres vollständig entfärbte Schwefelammon kurze Zeit nach dem Lüften des Stöpsels abermals die gelbe Farbe an; nach einigen Tagen verschwindet dieselbe wieder u. s. f. Wird dieses Verfahren hinreichend oft wiederholt, so findet man endlich die Flüssigkeit in ätzendes Ammon umgewandelt, welches von einem Gehalte an Kupfer blau gefärbt ist. Es hat sich hiebei der früher an das Ammonium gebundene Schwefel, seiner ganzen Menge nach, mit dem Kupfer verbunden, ohne Schwefel abzuscheiden, wie dies bei Schwefelammon allein, wenn es der Luft ausgesetzt wird, immer geschieht.

Auch die gelben Lösungen von Schwefelkalium und Schwefelnatrium geben an Kupfer den Überschuss des Schwefels ab und werden wasserhell.

Es ist damit ein Mittel gegeben, die durch Einleiten von Schwefelwasserstoffgas erhaltenen und in der Regel gelblich gefärbten Lösungen von Ammonium-Kalium und Natriumsulfuret vollkommen farblos zu erhalten. Die Entfärbung geschieht, wie begreiflich, um so schneller, je feiner das Kupfer zertheilt ist, feine Drehspäne und Draht wirken rascher als Blech; mittelst Zink gefälltes oder aus Kupferoxyd durch Wasserstoffgas dargestelltes Kupfer entfärbt auch hochgelbe Lösungen der genannten Sulfurete nach einmaligem Schütteln.

Allerdings liegt ein Übelstand darin, dass in gewissen Fällen Spuren von Kupfer in Lösung gehen; indess dürfte sich dies vermeiden lassen, denn es ist mir öfters gelungen, auf diesem

Wege Lösungen der Einfach-Schwefelalkalien darzustellen, welche frei von jeder fremden Beimengung waren [1].

Bemerkenswerth ist, dass auch unterschwefligsaures Natron, ein doch ziemlich constantes Salz, wenn es sich in Lösung befindet, an regulinisches Kupfer einen Theil seines Schwefels abgibt. Bei gewöhnlicher Temperatur dauert es wohl lange Zeit, bis überhaupt eine Reaction bemerkbar wird; aber nach wochenlanger Berührung färbt sich das Kupfer schwarz.

In der Kochhitze hingegen und mit feinvertheiltem, durch Fällung mittelst Zink oder durch Reduction mit Wasserstoffgas dargestellten Kupfer erfolgt die Einwirkung weit rascher. Die vom Schwefelkupfer abfiltrirte Lösung scheidet bei Zusatz von Essigsäure keinen Schwefel ab und gibt mit Nitroprussidnatrium eine rothe Färbung, wenn man sie in eine Lösung von Zinkvitriol giesst. Setzt man ausserdem noch etwas Ferrocyankaliumlösung hinzu, so entsteht ein purpurrother Niederschlag. Dies sind Reactionen, welche bekanntlich die Gegenwart von schwefeliger Säure ausser allen Zweifel setzen. Der Process ist daher folgender:

$$Na_2S_2O_3 + Cu_2 = Cu_2S + Na_2SO_3,$$

wenn man annimmt, dass Halb-Schwefelkupfer gebildet wird. 1·7215 Grm. des so erhaltenen röthlichschwarzen Pulvers gaben 0·657 Grm. schwefelsauren Baryt, entsprechend 0·0901 Grm. Schwefel.

Aus diesen Zahlen ergibt sich, dass 20·73 Pct. von dem zum Versuche verwendeten Kupfer in Schwefelkupfer (Sulfür) umgewandelt worden sind.

Die Einwirkung fand in der Kochhitze durch 24 Stunden und bei einem Überschuss von unterschwefligsaurem Natron statt.

---

[1] Eine solche Lösung wurde im trockenen Wasserstoffgas zur Trockniss gebracht. Die so erhaltene Masse ist ungefärbt, reagirt alkalisch, zieht an der Luft begierig Feuchtigkeit an, löst sich im Wasser unter bedeutender Wärmeentwicklung und gibt alle Reactionen des gewöhnlichen Einfach-Schwefelkaliums.

Die Analysen und weiteren Untersuchungen dieses Körpers, welche mich noch beschäftigen, werden indess den Gegenstand einer weiteren Mittheilung bilden



2. Silber. Das Verhalten dieses Metalles gegen alkalische Sulfurete ist bekanntlich seit langer Zeit im praktischen Leben angewendet. Man ertheilt nämlich manchen Silberwaaren eine verschieden dunkle Färbung durch Erwärmen derselben mit einer Lösung von Schwefelleber. Hiebei bildet sich Silbersulfuret.

Chemisch reines Silber färbt sich in gelbem Schwefelammon bei gewöhnlicher Temperatur bleigrau. Diese Färbung haftet ebenfalls so fest, dass sie durch heftiges Reiben mit Tuch einen matten Glanz annimmt und nicht entfernt werden kann.

Bei längerem Liegen in genannter Flüssigkeit wird diese Schichte allmälig dicker und bildet nach etwa sechs Wochen eine Kruste von krystallinischer Beschaffenheit, welche beim Biegen leicht abspringt. 0·3395 Grm. dieses Überzuges gaben 0·39 Grm. Chlorsilber, entsprechend 0·2935 Grm. oder 86·45 Pct. Silber; die Formel AgS [1] verlangt 87·09. Es findet sich daher in den Incrustationen antiker Silbergeräthe, welche in der Erde vergraben und dem Einflusse schwefelwasserstoffhältiger Gase und löslicher Schwefelmetalle ausgesetzt waren, zuweilen Schwefelsilber [2].

Beim Kochen mit einer Lösung von unterschwefligsaurem Natron färbt sich das Silber schwarz vom gebildeten Schwefelsilber.

1·0775 Grm. von dem so behandelten pulverförmigen Silber erlitten beim Erhitzen in einem Strome von trockenem Wasserstoffgas unter Entwickelung von Schwefelwasserstoff einen Gewichtsverlust von 0·0275 Grm.

Es haben sich daher 17·22 Pct. des zum Versuche verwendeten Silbers in Schwefelsilber umgewandelt.

3. Zinn verbindet sich unter den in Rede stehenden Verhältnissen auch mit Schwefel, ohne jedoch eine Incrustation zu bilden, was in der Löslichkeit der Schwefelverbindungen desselben in den Sulfureten der Alkalien und des Ammons begründet ist.

9·2 Grm. Bancazinn in Stangenform in etwa 50 Kub. C. Mehrfach-Schwefelammon wurde hingestellt und durch 8 Tage

---

[1] S = 32.

[2] Church, Polytechn. Centralbl. 1871, Nr. 14.

sich selbst überlassen, hierauf die darüber stehende noch gelb gefärbte Flüssigkeit abgegossen und das darin gelöste Schwefelzinn als Zinnsäure bestimmt. Es wurden 0·801 Grm. Zinnsäure oder 0·63 Grm. Zinn erhalten.

Demnach hatte sich in diesem Falle die nicht unbedeutende Menge von 6·84 Pct. Zinn gelöst.

4. Nickel verhält sich gegen dieses Reagens dem Zinn ähnlich. Gewöhnliches Würfelnickel gab gelbem Schwefelammon eine dunkle Färbung, welche durch Braun in ein tiefes Schwarz überging. Dieses Verhalten kann als Merkmal dienen, um Nickel von Kobalt zu unterscheiden.

5. Eisen. Ein Eisendraht von der Dicke eines Millimeters überzog sich in Mehrfach-Schwefelammon nur allmälig mit einem äusserst dünnen und leicht abreibbaren sammtschwarzen Anfluge.

Die genannten Metalle verhalten sich daher gegen Mehrfach-Schwefelammon und unter den hier beschriebenen Umständen ebenso, wie gegen die Supersulfurete der Alkalien in der Glühhitze [1]. Ein Unterschied liegt nur in der Zeit, welche hiezu erforderlich ist.

---

[1] Berzelius, Gmelin's Handb. d. Chem. Aufl. IV, Bd. II, p. 34.

IX. SITZUNG VOM 21. MÄRZ 1872.

In Verhinderung des Präsidenten führt Herr Hofrath Freiherr von Burg den Vorsitz.

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter übermittelt mit h. Erlass vom 12. März einen Auszug aus dem Berichte des k. & k. Gesandten in Washington, die Cundurango-Pflanze und deren Heilkraft betreffend.

Herr Prof. Dr. H. Hlasiwetz überreicht eine Abhandlung des Herrn Hauptmanns A. Exner: „Über die Untersalpetersäure."

Herr Prof. E. Suess übergibt eine vorläufige Mittheilung: „Über den Bau der Italienischen Halbinsel".

Herr Prof. Dr. Edm. Weiss legt eine Abhandlung vor, betitelt: „Bestimmung der Längendifferenz Wiener-Neustadt—Wien".

Herr Dr. H. W. Reichardt überreicht eine Abhandlung: „Über die botanische Ausbeute der Polar-Expedition des Jahres 1871".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia Real das Sciencias de Lisboa: Memorias. Classe de Sciencias mathem., phys. e naturaes. Nova Serie. Tomo IV, Parte 2. Lisboa, 1870; 4⁰. Classe de Sciencias moraes, polit. e bellas-lettras. Nova Serie. Tomo IV, Parte 1. Lisboa, 1871; 4⁰. — Jornal de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes. Tom. I & II. Lisboa, 1866—1870; 8⁰. — *Portugaliae monumenta historica. Leges: Vol. I. Fasc. 1—6; Diplomata et Chartae: Vol. I. Fasc. 1—3; Scriptores: Vol. I. Fasc. 1—3, Olisipone, 1856—1870; folio.*

Annalen der Chemie und Pharmacie von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R. Band LXXXV, Heft 2 & 3. Leipzig & Heidelberg, 1872; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1879—1880. (Bd. 79. 7—8.) Altona, 1872; 4°.

d'Ancona, Cesare, Malacologia pliocenica Italiana. Fascicolo I. Firenze, 1871; 4°. — Sulle Neritine fossili dei terreni terziari superiori dell'Italia centrale. Pisa, 1869; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV. Nrs. 9—10. Paris, 1872; 4°.

Czyrniański, Emil, Chemische Theorie auf der rotirenden Bewegung der Atome basirt. (3. vermehrte Auflage.) Krakau, 1872; 8°.

Delesse et de Lapparent, Extrait de Géologie. IIe Partie: Lithologie. 8°. — Lithologie der Meere der alten Welt. (Übersetzt von Herrn Hauchecorne in Berlin.) 8°.

Ecker, Alexander, Über die verschiedene Krümmung des Schädelrohres und über die Stellung des Schädels auf der Wirbelsäule beim Neger und beim Europäer. (Gratulationsschrift.) Braunschweig, 1871; 4°.

Gesellschaft, Berliner Medicinische: Verhandlungen aus den Jahren 1867 und 1868. Berlin, 1871; 8°.

— der Wissenschaften, k. sächs., zu Leipzig: Abhandlungen der mathem.-phys. Classe. IX. Band, Nr. 6. X. Band, Nr. 1—2. Leipzig, 1871; 4°. — Berichte derselben Classe. XXII. Band, Nr. 3—4; XXIII. Band, Nr. 1—3. Leipzig, 1871; 8°.

— königl. bayer. botan., in Regensburg. Flora. N. R. 29. Jahrgang. 1871. — Repertorium der periodischen botan. Literatur. VII. Jahrgang. 1870. Regensburg, 1871; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 11. Wien, 1872; 4°.

Grad, A. Charles, Examen de la théorie des systêmes de montagnes dans ses rapports avec les progrès de la stratigraphie. Paris, 1871; 8°.

Henwood, William Jory, Address delivered at the Spring Meeting of the Royal Institution of Cornwall; on the 23rd May, 1871. Truro; 8°.

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie & verwandte Fächer, von Vorwerk. Band XXXVII, Heft 2. Speyer, 1872; 8°.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 6. Graz, 1872; 4°.

Landau, L. R., Versuch einer neuen Theorie über die Bestandtheile der Materie und die Ableitung der Naturkräfte aus einer einzigen Quelle. Pest & Leipzig, 1871; 8°.

Leseverein, Akademischer, in Prag: Bericht für die Jahre 1868—69 und 1869—70. Prag; 8°. (Böhmisch.)

Marignac, C., De l'influence prétendue de la calcination sur la chaleur de dissolution des oxydes metalliques. (Arch. d. sc. de la Biblioth. Univ. 1871.) 8°.

Mills, Edmund J., Researches on Elective Attraction. London, 1871; 4°.

Morren, Édouard, Notice sur le *Cytisus X-purpureo-Laburnum* ou *Cytisus Adami* Poit., suivie de quelques considérations sur l'hybridité. Gand, 1871; 8°.

Nature. Nr. 124, Vol. V. London, 1872; 4°.

Pacini, Filippo, Sull' ultimo stadio del Colera asiatico o stadio di morte apparente dei colerosi e sul modo di farli risorgere. Firenze, 1871; 8°.

Patruban, C. v., Zur Lehre von den Geschwülsten der *Orbita*. (Allgem. Wiener medizin. Zeitung. Nr. 41.) gr. 8°.

Regel, E., Reisen in den Süden von Ostsibirien, ausgeführt in den Jahren 1855—1859 durch G. Radde. Botanische Abtheilung. *Monopetalae*. Bd. IV, Heft 3. Moskau, 1870; 8°. — *Supplementum II. ad enumerationem plantarum a cl. Semonovio 1857 collectarum*. Fasc. I. Moskau, 1870; 8°. — *Revisio speciarum Crataegorum, Dracaenarum, Horkeliarum, Laricum et Azalearum*. 8°. — *Animadversiones de plantis vivis nonnullis horti botanici imperialis Petrepolitani*. 8°. — Die Arten der Gattung *Dracaena*. Gr. 8°. — Einfluss des Wildlings auf das Edelreis. Gr. 8°. — Formen der Entwicklung der höheren Pflanzen und deren Einfluss auf unsere Culturen. Gr. 8°.

„Revue politique et littéraire“ et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger.“ Ire Année (2e Série), Nr. 38. Paris & Bruxelles, 1872; 4°.

Riccardi, P., Biblioteca matematica Italiana. Fasc. 3°. Modena, 1871; 4°.

Tessari, Domenico, Sopra la costruzione degli ingranaggi ad assi non concorrenti. (Ann. del R. Museo Industr. Italiano.) Torino, 1871; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 11. Wien, 1872; 4°.

Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Band, 17. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

Bestimmung der Längendifferenz Wien—Wiener-Neustadt durch Chronometer-Übertragungen.

Von dem c. M. Prof. Dr. **Edmund Weiss.**

Im September vorigen Jahres wurde von Herrn Major Th. Andres, Professor der Geodäsie und Astronomie an der Militärakademie zu Wiener-Neustadt, der Wunsch ausgesprochen, die Längendifferenz des Observatoriums jener Anstalt mit der Sternwarte von Wien astronomisch zu bestimmen, und die Ausführung der hiefür von Seite der Wiener Sternwarte erforderlichen Beobachtungen von mir übernommen. Wegen Mangel einer directen telegraphischen Verbindung beider Observatorien konnte die Längendifferenz nur aus Chronometerübertragungen ermittelt werden; doch dürfte diese Operation trotzdem einiges Interesse gewähren, weil bei der geringen gegenseitigen Entfernung beider Orte — sie beträgt etwa 6 geographische Meilen — die Hin- und Rückreise nur wenige Stunden beansprucht, und deshalb die vorhergehenden und nachfolgenden Vergleichungen der Chronometer mit der Hauptuhr der Sternwarte unmittelbar erkennen lassen, wie weit der mehrstündige Eisenbahntransport den Gang derselben beeinflusst hat.

Die zur Vergleichung der Hauptuhren beider Observatorien verwendeten, halbe Secunden schlagenden Boxchronometer, Molyneux Nr. 1980 und Kessels Nr. 1443, welche schon vielfach als vorzügliche Uhren erprobt wurden, gehören der k. k. Sternwarte, und gehen nach Sternzeit. Zur Ermittlung der Uhrcorrectionen sollten an beiden Orten dieselben Sterne aus dem von der Redaction des Berliner Jahrbuches herausgegebenen Verzeichnisse der scheinbaren Örter von 529 Sternen beobachtet

werden, um dadurch die Unsicherheit der Sternpositionen zu eliminiren. Ferner sollten Chronometerübertragungen nur an solchen Tagen ausgeführt werden, an denen Nachts vorher beiderseits Zeitbestimmungen gelangen, um vom Gange der Hauptuhr möglichst frei zu sein. Die persönliche Gleichung endlich wollten wir um die Mitte der ganzen Operation bestimmen.

Von den drei Punkten dieses Programmes konnte nur der zweite ziemlich vollständig eingehalten werden; denn beim ersten ergab sich die Schwierigkeit, dass die Nächte selten beiderseits vollständig heiter waren, indem hauptsächlich in den früheren Abendstunden oft partielle Bewölkungen eintraten, welche das Beobachten der festgesetzten Sterne hinderten. Um daher die Operation nicht allzusehr in die Länge zu ziehen, standen wir von der strengen Erfüllung der Forderung, an beiden Orten nur dieselben Sterne zur Ermittlung der Uhrcorrection zu verwenden, ab, da sie bei Chronometerübertragungen ohnehin von geringer Bedeutung ist. Doch wurde die Vorsicht gebraucht, das Azimuth der Instrumente an beiden Orten womöglich aus demselben Polar-Sterne zu suchen. Auch die persönliche Gleichung konnte erst Anfangs December bestimmt werden, da im October die Berufsgeschäfte uns daran hinderten und im November die Witterung sich nie dazu eignete.

Die Chronometervergleichungen wurden sämmtlich von mir ausgeführt; ebenso übernahm ich deren Berechnung und die Ableitung des Schlussresultates, während die Zeitbestimmungen jeder Beobachter selbst reducirte.

a) Zeitbestimmungen in Wien.

Die Zeitbestimmungen wurden von mir am vierzölligen Meridiankreise der Sternwarte ausgeführt. Als Collimationsfehler des Rohres, mit Einschluss der täglichen Aberration, fand ich durch Umlegen des Instrumentes am 18. October:

Kreis West: $c = +0{\cdot}351$
Kreis Ost: $c = -0{\cdot}379$

Die Neigung wurde am 15. October und 3. December corrigirt, da sie nach und nach zu einer unbequemen Grösse

angewachsen war. Jeden Abend wurde mehrmals nivellirt, und der Berechnung das jedem Tage beigeschriebene Mittel aller so erhaltenen Werthe zu Grunde gelegt, weil deren Differenzen keinen regelmässigen Gang zeigten, und innerhalb der Beobachtungsfehler lagen.

Die Berechnung der Zeitbestimmungen ist nach der Mayer'schen Formel ausgeführt, und die aus den Polarsternen folgende Uhrcorrection beim Mittelnehmen selbstverständlich ausgelassen, was durch Einklammern derselben ersichtlich gemacht ist. Übrigens theile ich im folgenden Kürze halber nur jene Zeitbestimmungen im Detail mit, zwischen denen Chronometerübertragungen vorkommen, füge aber zum Schlusse das Resultat der übrigen bei, um ein vollständiges Bild über den Gang der Uhr innerhalb der ganzen Epoche zu gewinnen.

1871 October 14 (♄) Kreis Ost.

$i = -0^s\!\cdot\!425 \qquad c = -0^s\!\cdot\!379$

$a = +1\cdot185$ (aus γ Cephei und h Draconis).

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	$c \sec \delta$	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
κ Piscium	10	23h 21m 42s·52	−0s·286	−0s·379	+0s·877	42s·73	23h 20m 21s·54	−1m 21s·19
γ Cephei	12	35 36·31	−1·646	−1·675	−2·515	30·47	34 9·75	(20·72)
ω Piscium	10	23 54 4·78	−0·317	−0·381	+0·800	4·88	23 52 43·67	21·21
h Draconis	12	0 7 16·30	+1·251	+1·873	+4·707	24·13	12 6 3·40	(20·73)
12 Ceti	9	24 50·60	−0·257	−0·380	+0·948	50·91	0 23 29·86	21·05
α Cassiopejae	11	0 34 38·46	−0·750	−0·675	−0·280	36·75	0 33 15·48	21·27
						Im Mittel um 0	4 :	−1 21·18

1871 October 16 (☾) Kreis Ost.

$i = +0^s045 \quad c = -0^s379$

$a = +1\cdot201$ (aus γ Cephei und h Camel.)

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	$c \sec \delta$	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
α Aquarii	10	22h 0m 32s72	+0s029	− 0s379	+ 0s908	33s28	21h 59m 11s50	−1m 21s78
h Camelop.	6	16 15·30	−0·252	+ 8·205	+ 7·614	25·87	10 15 4·43	(21·44)
η Aquarii	11	30 7·06	+0·029	− 0·379	+ 0·907	7·62	22 28 45·76	21·86
ζ Pegasi	11	36 25·00	+0·036	− 0·385	+ 0·752	25·40	35 3·83	21·57
λ Pegasi	11	41 42·72	+0·043	− 0·411	+ 0·557	42·91	40 31·29	21·62
λ Aquarii	11	22 47 16·34	+0·025	− 0·385	+ 1·011	16·99	22 45 55·25	21·74
κ Piscium	11	23 21 42·61	+0·030	− 0·379	+ 0·889	43·15	23 20 21·52	21·63
γ Cephei	13	35 35·16	+0·174	− 1·675	− 2·549	31·11	34 9·68	(21·43)
ω Piscium	10	23 54 4·93	+0·034	− 0·381	+ 0·811	5·39	23 52 43·67	21·72

Im Mittel um 22 50: −1 21·70

1871 October 17 (♂) Kreis Ost.

$i = -0^s094 \quad c = -0^s379$

$a = +0\cdot966$ (aus α Ursae min. und ι Ceti.)

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	$c \sec \delta$	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
ι Ceti	11	0 14 18·76	−0·051	− 0·386	+ 0·829	15·59	0 12 53·80	−1 21·79
ε Piscium	10	0 57 39·41	−0·072	− 0·382	+ 0·639	39·60	0 56 17·55	22·05
α Ursae min.	5	1 13 101·67	−2·982	−15·791	−26·094	56·80	1 12 35·03	(21·77)
θ Ceti	9	18 58·62	−0·052	− 0·384	+ 0·820	59·00	17 37·11	21·89
η Piscium	10	1 25 59·56	−0·081	− 0·392	+ 0·552	59·64	1 24 37·60	22·04

Im Mittel um 0 59: −1 21·94

1871 October 18 (☿) Kreis Ost.

$i = -0^s 042$ $c = -0^s 879$

$a = +1 \cdot 846$ (aus γ Cephei und ι Ceti).

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	c sec δ	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
γ Cephei	13	23h 35m 36s91	—0s163	— 1s675	— 2s856	32s22	23h 34m 9s59	—1m(22s63)
ω Piscium	10	23 54 5·71	—0·031	— 0·381	+ 0.909	6·21	23 52 43·66	22·55
α Androm.	10	0 3 8·54	—0·045	— 0·431	+ 0·518	8·58	0 1 45·95	22·63
γ Pegasi	11	8 0·66	—0·036	— 0·392	+ 0·771	1·00	6 38·18	·22·82
ι Ceti	7	14 15·68	—0·023	— 0·386	+ 1·155	16·43	12 53·80	22·63
12 Ceti	11	24 51·92	—0·025	— 0·380	+ 1·077	52·59	23 29·85	22·74
ε Piscium	11	0 57 39·81	—0·032	— 0·382	+ 0·891	40·29	0 56 17·55	22·74
α Ursae min.	7	1 13 111·01	—1·332	—15·792	—36·362	57·52	1 12 35·09	(22·43)

Im Mittel um 0 17 : —1 22·68

1871 October 19 (♃) Kreis West.

$i = -0^s 303$ $c = +0^s 351$

$a = +1 \cdot 231$ (aus *h* Camel. und γ Cephei).

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	c sec δ	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
θ Pegasi	7	22 5 5·69	—0·224	+ 0·353	+ 0·838	6·66	22 3 43·56	—1 23·10
h Camel.	13	16 21·19	+1·695	— 2·967	+ 7·805	27·72	10 15 4·93	(22·79)
λ Pegasi	9	41 43·65	—0·297	+ 0·381	+ 0·571	44·31	22 40 21·26	23·05
λ Aquarii	4	22 47 17·14	—0·169	+ 0·355	+ 1·037	18·36	22 45 55·01	23·35
κ Piscium	7	23 21 43·61	—0·204	+ 0·351	+ 0·911	44·67	23 20 21·51	23·16
γ Cephei	13	35 34·58	—1·175	+ 1·551	— 2·613	32·34	34 9·55	(22·79)
ω Piscium	10	23 54 5·82	—0·226	+ 0·353	+ 0·831	6·78	23 52 43·66	23·12

Im Mittel um 22 58 : —1 23·16

1871 October 21 (♄) Kreis West.

$i = -0^s\!.447 \qquad c = +0^s\!.351$

$a = +1\cdot423$ (aus α Ursae min. und ι Ceti).

Stern	Zahl d. Fd.	*t*	*ni*	*c* sec δ	*ma*	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
υ Pegasi	10	23ʰ 20ᵐ 22ˢ52	− 0ˢ437	+ 0ˢ380	+ 0ˢ665	23ˢ13	23ʰ 18ᵐ 58ˢ91	−1ᵐ 24ˢ22
γ Cephei	12	35 36·39	− 1·732	+ 1·551	− 3·021	33·19	34 9·46	(23·73)
ω Piscium	11	23 54 6·84	− 0·333	+ 0·353	+ 0·961	7·82	23 52 43·65	24·17
α Androm.	10	0 3 9·67	− 0·480	+ 0·399	+ 0·548	10·14	0 1 45·94	24·20
γ Pegasi	11	8 1·49	− 0·384	+ 0·363	+ 0·815	2·28	6 38·18	24·10
ι Ceti	11	14 16·58	− 0·242	+ 0·356	+ 1·221	17·92	12 53·79	24·13
ε Piscium	10	0 57 40·86	− 0·340	+ 0·354	+ 0·942	41·82	0 56 17·56	24·26
α Ursae min.	7	1 13 97·02	−14·184	+14·630	−38·452	59·01	1 12 34·91	(24·10)
						Im Mittel um 0 6:		−1 24·18

1811 October 31 (♂) Kreis West.

$i = -0^s\!.308 \qquad c = +0^s\!.351$

$a = +2\cdot159$ (aus γ Cephei und *h* Drac.)

Stern	Zahl d. Fd.	*t*	*ni*	*c* sec δ	*ma*	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
γ Piscium	11	23 12 1·51	− 0·216	+ 0·351	+1·546	3·19	23 10 30·89	−1 32·30
κ Piscium	11	21 52·07	− 0·207	+ 0·351	+1·598	53·81	21 21·43	32·38
γ Cephei	13	35 45·02	− 1·193	+ 1·551	−4·584	40·79	34 8·93	(31·86)
ω Piscium	8	23 54 14·35	− 0·230	+ 0·353	+1·457	15·93	23 52 43·61	32·32
h Draconis	18	0 7 28·44	+ 0·906	− 1·735	+8·573	36·18	12 6 4·32	(31·86)
						Im Mittel um 23 29:		−1 32·33

1871 December 5 (♂).

$i = +0.075 \quad c = +0.351$

$a = +3.050$ (aus γ Cephei und γ Piscium).

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	$c \sec \delta$	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
α Pegasi	11	23ʰ 0ᵐ 19·16	+0·064	+0·363	+1·748	21·34	22ʰ 58ᵐ 21·88	—1ᵐ 59·46
γ Piscium	11	12 27·25	+0·053	+0·351	+2·184	29·84	23 10 30·53	59·31
τ Pegasi	11	16 14·52	+0·074	+0·381	+1·409	16·38	14 17·04	59·34
υ Pegasi	7	20 55·92	+0·074	+0·380	+1·424	57·80	18 58·41	59·39
γ Cephei	8	23 36 10·25	+0·291	+1·551	—6·475	5·62	23 34 6·31	(59·31)
							Im Mittel um 23 12:	—1 59·38

υ Pegasi und γ Cephei nur mehr durch Wolken sichtbar; später ganz trüb.

1871 December 11 (☾).

$i = +0.110 \quad c = +0.351$

$a = +3.121$ (aus γ Cephei und γ Piscium).

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	$c \sec \delta$	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
α Pegasi	11	23 0 22·52	+0·095	+0·363	+1·788	24·77	22 58 21·81	—2 2·96
γ Piscium	11	12 30·83	+0·077	+0·351	+2·235	33·49	23 10 30·47	3·02
τ Pegasi	11	16 17·99	+0·108	+0·381	+1·442	19·92	14 16·96	2·96
υ Pegasi	11	20 59·47	+0·108	+0·380	+1·458	61·42	18 58·33	3·09
70 Pegasi	11	24 40·36	+0·091	+0·359	+1·882	22·69	22 39·70	2·99
γ Cephei	8	23 36 13·45	+0·427	+1·551	—6·626	8·80	23 34 5·78	(3·02)
							Im Mittel um 23 15:	—2 8·00

1871 October 16 (☾) Kreis Ost.

$i = +0^s 045 \qquad c = -0^s 379$

$a = +1 \cdot 201$ (aus γ Cephei und *h* Camel.)

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	c sec δ	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
α Aquarii	10	22ʰ 0ᵐ 32ˢ72	+0ˢ029	− 0ˢ379	+ 0ˢ908	33ˢ28	21ʰ 59ᵐ 11ˢ50	−1ᵐ 21ˢ78
h Camelop.	6	16 15·30	−0·252	+ 3·205	+ 7·614	25·87	10 15 4·43	(21·44)
η Aquarii	11	30 7·06	+0·029	− 0·379	+ 0·907	7·62	22 28 45·76	21·86
ζ Pegasi	11	36 25·00	+0·036	− 0·385	+ 0·752	25·40	35 3·83	21·57
λ Pegasi	11	41 42·72	+0·043	− 0·411	+ 0·557	42·91	40 31·29	21·62
λ Aquarii	11	22 47 16·34	+0·025	− 0·385	+ 1·011	16·99	22 45 55·25	21·74
χ Piscium	11	23 21 42·61	+0·030	− 0·379	+ 0·889	43·15	23 20 21·52	21·63
γ Cephei	13	35 35·16	+0·174	− 1·675	− 2·549	31·11	34 9·68	(21·43)
ω Piscium	10	23 54 4·93	+0·034	− 0·381	+ 0·811	5·39	23 52 43·67	21·72

Im Mittel um 22 50 : −1 21·70

1871 October 17 (♂) Kreis Ost.

$i = -0^s 094 \qquad c = -0^s 379$

$a = +0 \cdot 966$ (aus α Ursae min. und ι Ceti.)

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	c sec δ	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
ι Ceti	11	0 14 18·76	−0·051	− 0·386	+ 0·829	15·59	0 12 53·80	−1 21·79
ε Piscium	10	0 57 39·41	−0·072	− 0·382	+ 0·639	39·60	0 56 17·55	22·05
α Ursae min.	5	1 13 101·67	−2·982	−15·791	−26·094	56·80	1 12 35·03	(21·77)
θ Ceti	9	18 58·62	−0·052	− 0·384	+ 0·820	59·00	17 37·11	21·89
η Piscium	10	1 25 59·56	−0·081	− 0·392	+ 0·552	59·64	1 24 37·60	22·04

Im Mittel um 0 59 : −1 21·94

1871 October 18 (☿) Kreis Ost.

$i = -0^s042 \quad c = -0^s379$

$a = +1{\cdot}346$ (aus γ Cephei und ι Ceti).

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	c sec δ	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
γ Cephei	13	23ʰ 35ᵐ 36ˢ91	−0ˢ163	− 1ˢ675	− 2ˢ856	32ˢ22	23ʰ 34ᵐ 9ˢ59	−1ᵐ(22ˢ63)
ω Piscium	10	23 54 5·71	−0·031	− 0·381	+ 0.909	6·21	23 52 43·66	22·55
α Androm.	10	0 3 8·54	−0·045	− 0·431	+ 0·518	8·58	0 1 45·95	22·68
γ Pegasi	11	8 0·66	−0·036	− 0·392	+ 0·771	1·00	6 38·18	22·82
ι Ceti	7	14 15·68	−0·023	− 0·386	+ 1·155	16·43	12 53·80	22·63
12 Ceti	11	24 51·92	−0·025	− 0·380	+ 1·077	52·59	23 29·85	22·74
ε Piscium	11	0 57 39·81	−0·032	− 0·382	+ 0·891	40·29	0 56 17·55	22·74
α Ursae min.	7	1 13 111·01	−1·332	−15·792	−36·362	57·52	1 12 35·09	(22·43)

Im Mittel um 0 17 : −1 22·68

1871 October 19 (♃) Kreis West.

$i = -0^s303 \quad c = +0^s351$

$a = +1{\cdot}231$ (aus *h* Camel. und γ Cephei).

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	c sec δ	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
Θ Pegasi	7	22 5 5·69	−0·224	+ 0·353	+ 0·838	6·66	22 3 43·56	−1 23·10
h Camel.	13	16 21·19	+1·695	− 2·967	+ 7·805	27·72	10 15 4·93	(22·79)
λ Pegasi	9	41 43·65	−0·297	+ 0·381	+ 0·571	44·31	22 40 21·26	23·05
λ Aquarii	4	22 47 17·14	−0·169	+ 0·355	+ 1·037	18·36	22 45 55·01	23·35
κ Piscium	7	23 21 43·61	−0·204	+ 0·351	+ 0·911	44·67	23 20 21·51	23·16
γ Cephei	13	35 34·58	−1·175	+ 1·551	− 2·613	32·34	34 9·55	(22·79)
ω Piscium	10	23 54 5·82	−0·226	+ 0·353	+ 0·831	6·78	23 52 43·66	23·12

Im Mittel um 22 58 : −1 23·16

1871 October 21 (♄) Kreis West.

$i = -0^s447 \qquad c = +0^s351$

$a = +1\cdot423$ (aus α Ursae min. und ι Ceti).

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	c sec δ	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
υ Pegasi	10	23h 20m 22s52	− 0s437	+ 0s380	+ 0s665	23s13	23h 18m 58s91	−1m 24s22
γ Cephei	12	35 36·39	− 1·732	+ 1·551	− 3·021	33·19	34 9·46	(23·73)
ω Piscium	11	23 54 6·84	− 0·333	+ 0·353	+ 0·961	7·82	23 52 43·65	24·17
α Androm.	10	0 3 9·67	− 0·480	+ 0·399	+ 0·548	10·14	0 1 45·94	24·20
γ Pegasi	11	8 1·49	− 0·384	+ 0·363	+ 0·815	2·28	6 38·18	24·10
ι Ceti	11	14 16·58	− 0·242	+ 0·356	+ 1·221	17·92	12 53·79	24·13
ε Piscium	10	0 57 40·86	− 0·340	+ 0·354	+ 0·942	41·82	0 56 17·56	24·26
α Ursae min.	7	1 13 97·02	−14·184	+14·630	−38·452	59·01	1 12 34·91	(24·10)

Im Mittel um 0 6: −1 24·18

1811 October 31 (♂) Kreis West.

$i = -0^s308 \qquad c = +0^s351$

$a = +2\cdot159$ (aus γ Cephei und h Drac.)

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	c sec δ	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
γ Piscium	11	23 12 1·51	− 0·216	+ 0·351	+1·546	3·19	23 10 30·89	−1 32·30
κ Piscium	11	21 52·07	− 0·207	+ 0·351	+1·598	53·81	21 21·43	32·38
γ Cephei	13	35 45·02	− 1·193	+ 1·551	−4·584	40·79	34 8·93	(31·86)
ω Piscium	8	23 54 14·35	− 0·230	+ 0·353	+1·457	15·93	23 52 43·61	32·32
h Draconis	13	0 7 28·44	+ 0·906	− 1·735	+8·573	36·18	12 6 4·32	(31·86)

Im Mittel um 23 29: −1 32·33

1871 December 5 (♂).

$i = +0^s075 \qquad c = +0^s351$

$a = +3{\cdot}050$ (aus γ Cephei und γ Piscium).

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	$c \sec \delta$	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
α Pegasi	11	23h 0m19s16	+0s064	+0s363	+1s748	21s34	22h58m21s88	—1m 59s46
γ Piscium	11	12 27·25	+0·053	+0·351	+2·184	29·84	23 10 30·53	59·31
τ Pegasi	11	16 14·52	+0·074	+0·381	+1·409	16·38	14 17·04	59·34
υ Pegasi	7	20 55·92	+0·074	+0·380	+1·424	57·80	18 58·41	59·39
γ Cephei	8	23 36 10·25	+0·291	+1·551	—6·475	5·62	23 34 6·31	(59·31)
						Im Mittel um 23 12:		—1 59·38

υ Pegasi und γ Cephei nur mehr durch Wolken sichtbar; später ganz trüb.

1871 December 11 (☾).

$i = +0^s110 \qquad c = +0^s351$

$a = +3{\cdot}121$ (aus γ Cephei und γ Piscium).

Stern	Zahl d. Fd.	t	ni	$c \sec \delta$	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
α Pegasi	11	23 0 22·52	+0·095	+0·363	+1·788	24·77	22 58 21·81	—2 2·96
γ Piscium	11	12 30·83	+0·077	+0·351	+2·235	33·49	23 10 30·47	3·02
τ Pegasi	11	16 17·99	+0·108	+0·381	+1·442	19·92	14 16·96	2·96
υ Pegasi	11	20 59·47	+0·108	+0·380	+1·458	61·42	18 58·33	3·09
70 Pegasi	11	24 40·36	+0·091	+0·359	+1·882	22·69	22 39·70	2·99
γ Cephei	8	23 36 13·45	+0·427	+1·551	—6·626	8·80	23 34 5·78	(3·02)
						Im Mittel um 23 15:		—2 3·00

Stellt man der Übersicht halber die Resultate dieser Beobachtungen zusammen und fügt man noch die Resultate der übrigen im Laufe dieses Zeitraumes ausgeführten Zeitbestimmungen hinzu, so erhält man für die Stände und Gänge der Wiener Hauptuhr das nachstehende Tableau:

1871		Uhrzeit	Stand	Tgl. Gang
October	9	$0^{h}\,21^{m}$	$-1^{m}18^{s}78$	
				$-0^{s}48$
„	14	0 4	−1 21·18	
				−0·27
„	16	22 50	−1 21·70	
				−0·22
„	17	0 59	−1 21·94	
				−0·74
„	18	0 17	−1 22·68	
				−0·50
„	19	22 58	−1 23·16	
				−0·50
„	21	0 6	−1 24·18	
				−0·81
„	31	23 29	−1 32·33	
				−0·65
November	5	1 37	−1 35·66	
				−0·86
„	10	1 28	−1 39·95	
				−0·81
„	24	0 58	−1 51·33	
				−0·73
December	5	23 12	−1 59·38	
				−0·60
„	11	23 15	−2 3·00	

b) Zeitbestimmungen in Wiener-Neustadt.

In Wiener-Neustadt führte Major Andres die Zeitbestimmungen an einem portativen Mittagsrohre mit gebrochenem Fernrohre von 30‴ Objectivöffnung und 30″ Brennweite aus, das nach dem Muster der jetzt bei der europäischen Gradmessung allgemein angewendeten Instrumente dieser Art von Starke gebaut ist. Die Beobachtungsuhr, eine Pendeluhr mit Quecksilbercompensation, ist von Vorauer verfertigt.

Nivellirt wurde allabendlich in jeder Kreislage, so oft es die Zeit zuliess, schliesslich aber das Mittel aus allen Nivellirungen jeder Kreislage gebildet, da in den Neigungen kein irgend regelmässiger Gang sich zeigte, sondern die Unterschiede ganz den Charakter von Beobachtungsfehlern trugen. Die dadurch erhaltenen Mittelwerthe der Neigung sind die folgenden:

October	14	K.W.	$i = -0^{s}002$;	K.O.	$i = -0^{s}181$;
				K.W.	$i = -0{\cdot}123$.
„	16	K.O.	$i = +0{\cdot}034$;	K.W.	$i = -0{\cdot}069$;
		K.O.	$i = +0{\cdot}030$;	K.W.	$i = -0{\cdot}070$.
„	17	K.W.	$i = +0{\cdot}018$;	K.O.	$i = -0{\cdot}123$.
„	18	K.O.	$i = +0{\cdot}022$;	K.W.	$i = +0{\cdot}039$.

October	21	K. W.	$i = -0{\cdot}023$;	K. O.	$i = +0{\cdot}057$.
„	24	K. O.	$i = +0{\cdot}158$;	K. W.	$i = -0{\cdot}074$.
December	3	K. W.	$i = -0{\cdot}080$;	K. O.	$i = -0{\cdot}076$.
„	9	K. W.	$i = +0{\cdot}085$;	K. O.	$i = -0{\cdot}031$.
„	11	K. W.	$i = -0{\cdot}184$;	K. O.	$i = -0{\cdot}352$.

Der Collimationsfehler wurde jeden Abend durch Umlegen bestimmt, und ergab sich an den einzelnen Tagen folgendermassen, wobei das Zeichen für K. O. obere Culmination gilt:

October	14	aus *h*	Camelopardi	$c = +0{\cdot}211$
„	16	„ *h*	„	$+0{\cdot}134$
		„ γ	Cephei	$+0{\cdot}380$
„	17	„ γ	„	$+0{\cdot}376$
„	18	„ γ	„	$+0{\cdot}374$
„	21	„ γ	„	$+0{\cdot}253$
„	24	„ γ	„	$+0{\cdot}251$
December	3	„ γ	„	$+0{\cdot}366$
„	9	„ γ	„	$+0{\cdot}226$
„	11	„ γ	„	$+0{\cdot}164$

Die in diesen Werthen sich zeigende Variation ist, wie die Doppelbestimmung des Collimationsfehlers am 16. October zu erkennen gibt, dem bei weitem grössten Theile nach gewiss nicht reell, sondern nur scheinbar durch die Beobachtungsfehler verursacht. Noch deutlicher tritt dies hervor, wenn man je drei Tage zu einem Mittel zusammenfasst. Man erhält dadurch:

October	14, 16, 17	$c = +0{\cdot}275$
„	18, 21, 24	$c = +0{\cdot}293$
December	3, 9, 11	$c = +0{\cdot}252$
	Im Mittel..	$c = +0{\cdot}273$

Diese Werthe weichen so wenig von einander ab, dass man es für das beste hielt, das zuletzt gezogene Mittel als Werth des Collimationsfehlers für die ganze Epoche gelten zu lassen, was um so unbedenklicher schien, als im Mittel der Beobachtungen bei K. O. und K. W. der Collimationsfehler ohnehin so gut wie völlig einflusslos wird. Es sind daher alle Beobachtungen reducirt mit:

$c = +0{\cdot}259$ für K. O.
$c = -0{\cdot}287$ „ K. W.

Für das Azimuth ergaben sich die folgenden Werthe:

October	14	aus γ	Cephei	λ	Aquarii:	$a = -0.211$
„	16	„ γ	„	η	„ :	$a = +0.066$
„	17	„ γ	„	ι	Ceti :	$a = -0.310$
„	18	„ γ	„	ι	„ :	$a = -0.326$
„	21	„ γ	„	ω	Piscium:	$a = -0.103$
„	24	„ γ	„	ω	„ :	$a = -0.074$
November	5	„ γ	„	ι	Ceti :	$a = +0.146$
December	3	„ γ	„	ι	„ :	$a = -0.296$
„	9	„ γ	„	ι	„ :	$a = -0.363$
„	11	„ γ	„	ι	„ :	$a = +0.050$

Nach diesen Auseinandersetzungen bedarf die folgende Zusammenstellung der Zeitbestimmungen wohl keiner weiteren Erklärung. Es sei daher nur noch hinzugefügt, dass auch hier nur jene Beobachtungsabende im Detail mitgetheilt werden, zwischen welche eine Chronometerübertragung fiel, und dass von den übrigen wieder blos das Resultat in die am Schlusse gegebene Übersichtstabelle aufgenommen wurde.

Stern	Kreis-lage	Zahl d. Fd.	t	ni	$c \sec \delta$	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
			1871 October 14 (♄).						
α Aquarii	W	9	21ʰ 58ᵐ 15ˢ515	−0ˢ001	−0ˢ287	−0ˢ158	15ˢ07	21ʰ 59ᵐ 11ˢ52	+0ᵐ 56ˢ45
η Aquarii	O	8	22 27 49·261	−0·120	+0·259	−0·158	49·24	22 28 45·78	56·54
ζ Pegasi	O	9	34 7·414	−0·145	+0·263	−0·131	7·40	35 3·85	56·45
λ Pegasi	O	9	39 24·911	−0·178	+0·281	−0·096	24·92	40 21·31	56·39
λ Aquarii	O	7	22 44 58·818	−0·102	+0·262	−0·177	58·80	22 45 55·29	36·49
γ Cephei	W	9	23 33 14·548	−0·475	−1·268	+0·454	13·26	23 34 9·75	(56·49)
								m IMittel um 22 47:	+0 56·46

1871 October 16 (☾).

α Aquarii	O	9	21ʰ 58ᵐ 14ˢ906	+0ˢ022	+0ˢ259	+0ˢ050	15ˢ24	21ʰ 59ᵐ 11ˢ50	+0ᵐ 56ˢ26
Θ Pegasi	O	9	22 2 47·267	+0·025	+0·260	+0·045	47·60	22 3 43·60	56·00
η Aquarii	W	8	27 49·749	−0·046	−0·287	+0·050	49·47	28 45·76	56·29
ζ Pegasi	W	9	34 7·943	−0·056	−0·291	+0·041	7·64	35 3·83	56·19
λ Pegasi	W	8	22 39 25·304	−0·069	−0·310	+0·030	24·96	22 40 21·29	56·33
γ Cephei	W	3	23 33 15·533	−0·266	−1·268	−0·142	13·38	23 34 9·68	(56·30)
γ Cephei	O	4	33 11·792	+0·116	+1·144				
ω Piscium	W	9	23 51 47·880	−0·053	−0·289	+0·044	47·58	23 52 43·67	56·09

Im Mittel um 22 56: +0 56·19

1871 October 17 (♂).

γ Piscium	W	9	23 9 35·268	+0·013	−0·287	−0·220	34·77	23 10 31·00	+0 56·23
υ Pegasi	W	7	18 3·380	+0·017	−0·311	−0·143	2·94	18 58·94	56·00
70 Pegasi	W	9	21 44·516	+0·014	−0·293	−0·185	44·05	22 40·24	56·19
γ Cephei	W	4	33 14·327	+0·069	−1·268	+0·666	13·34	34 9·64	(56·30)
γ Cephei	O	4	33 11·550	−0·475	+1·144				
ω Piscium	O	8	23 51 47·504	−0·092	+0·260	−0·208	47·46	23 52 43·67	56·21
ι Ceti	O	9	0 11 57·560	−0·067	+0·268	−0·265	57·49	0 12 53·80	56·31

Im Mittel um 23 42: +0 56·19

1871 October 18 (☿).

τ Pegasi	O	9	23 13 21·424	+0·021	+0·281	−0·148	21·58	23 14 17·58	+0 56·00
υ Pegasi	O	9	18 2·700	+0·021	+0·281	−0·150	2·85	18 58·92	56·07
γ Cephei	O	4	33 11·192	+0·085	+1·144	+0·701	13·57	34 9·59	(56·02)
γ Cephei	W	4	33 14·435	+0·151	−1·268				
ω Piscium	W	9	23 51 48·113	+0·030	−0·289	−0·218	47·64	23 52 43·66	56·02
α Androm.	W	9	0 0 50·436	+0·043	−0·326	−0·123	50·03	0 1 45·95	55·92
γ Pegasi	W	9	5 42·466	+0·034	−0·296	−0·185	42·02	6 38·18	56·16
ι Ceti	W	9	0 11 58·328	+0·021	−0·291	−0·278	57·78	0 12 53·80	56·02

Im Mittel um 23 44: +0 56·03

Stern	Kreis-lage	Zahl d. Fd.	t	ni	$c \sec \delta$	ma	Merid. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
1871 October 21 (♄).									
γ Piscium	W	5	23ʰ 9ᵐ35·908	—0·016	—0·287	—0·073	35·53	23ʰ 10ᵐ30·98	+0ᵐ 55·45
τ Pegasi	W	8	13 22·483	—0·023	—0·311	—0·047	22·10	14 17·57	55·47
υ Pegasi	W	9	18 3·677	—0·022	—0·311	—0·047	3·30	18 58·91	55·61
γ Cephei	W	3	33 15·153	—0·089	—1·268	+0·221	14·11	34 9·46	(55·35)
γ Cephei	O	3	33 12·613	+0·220	+1·144				
ω Piscium	O	9	23 51 48·064	+0·043	+0·260	—0·069	48·30	23 52 43·65	55·35
α Androm.	O	9	0 0 50·352	+0·061	+0·295	—0·039	50·67	0 1 45·94	55·27
γ Pegasi	O	7	0 5 42·417	+0·049	+0·268	—0·058	42·68	0 6 38·18	55·50
							Im Mittel um	23 39 :	+0 55·44
1871 October 24 (♂).									
γ Piscium	O	8	23 9 35·542	+0·112	+0·259	—0·053	35·86	23 10 30·96	+0 55·10
τ Pegasi	O	9	13 22·313	+0·156	+0·281	—0·034	22·72	14 17·56	54·84
υ Pegasi	O	9	18 3·724	+0·156	+0·281	—0·034	4·13	18 58·91	54·78
γ Cephei	O	8	33 12·443	+0·610	+1·144	+0·159	14·26	34 9·31	(55·05)
γ Cephei	W	4	33 15·557	—0·285	—1·268				
ω Piscium	W	9	23 51 49·011	—0·056	—0·289	—0·050	48·62	23 52 43·67	55·05
α Androm.	W	4	0 0 51·207	—0·080	—0·326	—0·028	50·77	0 1 45·94	55·17
							Im Mittel um	23 36 :	+0 54·99

Stern	Kreis-lage	Zahl d. Fd.	t	ni	c sec δ	ma	Merd. Pass.	Scheinb. AR.	Uhr-Correct.
			1871 December 9 (♄).						
γ Piscium	W	3	23ʰ 10ᵐ 13·700	+0·059	−0·287	−0·258	13·21	23ʰ 10ᵐ 30·49	+0ᵐ 17·28
τ Pegasi	W	4	13 60·130	+0·084	−0·311	−0·165	59·74	14 16·99	17·25
υ Pegasi	W	4	18 41·847	+0·084	−0·311	−0·167	41·45	18 58·37	16·92
γ Cephei	W	4	33 48·700	+0·328	−1·268	+0·780	48·75	34 5·95	(17·20)
γ Cephei	O	4	33 47·150	−0·119	+1·144				
ω Piscium	O	5	23 52 26·222	−0·022	+0·260	−0·243	26·22	23 52 43·28	17·06
α Androm.	O	5	0 1 28·500	−0·033	+0·295	−0·137	28·62	0 1 45·49	16·87
γ Pegasi	O	5	6 20·668	−0·030	+0·268	−0·206	20·70	6 37·81	17·11
ι Ceti	O	4	0 12 36·337	−0·017	+0·263	−0·310	36·27	0 12 53·47	17·20
								Im Mittel um 23 42:	+0 17·10
			1871 December 11 (☾).						
γ Piscium	W	9	23 10 16·090	−0·129	−0·287	+0·036	15·71	23 10 30·47	+0 14·76
τ Pegasi	W	9	14 2·584	−0·183	−0·311	+0·023	2·11	14 16·96	14·85
υ Pegasi	W	9	18 44·030	−0·182	−0·311	+0·023	43·56	18 58·33	14·77
γ Cephei	W	4	33 52·275	−0·710	−1·268	−0·108	50·67	34 5·78	(15·11)
γ Cephei	O	4	33 51·475	−1·359	+1·144				
ω Piscium	O	8	23 52 28·356	−0·264	+0·260	+0·034	28·39	23 52 43·26	14·87
α Androm.	O	8	0 1 30·730	−0·379	+0·295	+0·019	30·66	0 1 45·47	14·81
γ Pegasi	O	9	6 22·997	−0·304	+0·268	+0·028	22·99	6 37·80	14·81
ι Ceti	O	9	0 12 38·226	−0·194	+0·263	+0·043	38·34	0 12 53·44	15·10
								Im Mittel um 23 42:	+0 14·85

Übersichtlich zusammengestellt resultirt also aus den obigen Beobachtungen für den Stand und Gang der Uhr in Wiener-Neustadt:

1871		Uhrzeit	Stand	Tgl. Gang
October	14	$22^h 47^m$	$+0^m\ 56^s46$	
				-0^s13
„	16	22 56	+0 56·19	
				0·00
„	17	23 42	+0 56·19	
				—0·16
„	18	23 44	+0 56·03	
				—0·20
„	21	23 39	+0 55·44	
				—0·15
„	24	23 36	+0 54·99	
				—0·52
November	5	23 42	+0 48·69	
				—0·87
December	3	23 42	+0 24·49	
				—1·23
„	9	23 42	+0 17·10	
				—1·13
„	11	23 42	+0 14·82	

Die Zunahme des täglichen Uhrganges am Anfange Decembers fällt mit dem Eintreten strenger Kälte in dieser Epoche zusammen.

c) Ermittelung der persönlichen Gleichung.

Die persönliche Gleichung wurde am portativen Mittagsrohre des Observatoriums in Wiener-Neustadt dadurch bestimmt, dass der eine Beobachter den Durchgang eines Sternes durch die eine Hälfte, der zweite durch die andere Hälfte der Fäden beobachtete, wobei überdies die Vorsichtsmassregel festgehalten wurde, bei den aufeinander folgenden Sternen die Reihenfolge der Beobachter zu wechseln, um auf diese Weise einen etwaigen Fehler der Fädenintervalle zu eliminiren. Das Verzeichniss der beobachteten Sterne, deren Reduction auf den Mittelfaden Major Andres besorgte, sowie das daraus hervorgehende Resultat der dersönlichen Gleichung im Sinne Andres—Weiss ist in der folgenden Tabelle enthalten, zu der ich nur erwähnen will, dass die vorletzte Columne die von jedem Beobachter notirte Zahl der Fädenantritte angibt, und dass die Beobachtungen am 9. December 1871 angestellt wurden.

Nr.	Stern	1871·0 Rectasc.	1871·0 Decl.	Zahl d. Fd. A; W	A—W
		Kreis West.			
1	η Aquarii	22h 28m 41s	— 0° 46'9	4, 4	+0·100
2	ζ Pegasi	35 2	+10 9·5	4, 4	+0·158
3	B. A. C...... 7943	40 15	11 30·9	4, 4	—0·122
4	„ 7971	45 51	9 9·0	4, 4	+0·012
5	„ 7997	51 7	20 4·6	4, 4	—0·130
6	„ 8031	22 57 19	3 7·6	4, 4	+0·048
7	„ 8051	23 0 31	8 42·8	4, 4	—0·080
8	γ Piscium	10 29	2 34·7	4, 4	+0·217
9	υ Pegasi	23 18 57	+22 41·6	4, 4	+0·327
		Kreis Ost.			
10	ω Piscium........	23 52 41	+ 6 8·9	5, 4	—0·083
11	α Androm.	0 1 43	28 22·7	5, 4	+0·333
12	γ Pegasi	6 36	+14 28·0	5, 4	+0·058
13	ι Ceti.............	12 51	— 9 32·4	4, 4	+0·190
14	B. A. C....... 101	0 21 19	+17 10·8	4, 4	+0·271
15	ν Piscium	1 34 43	4 50·0	4, 4	+0.150
16	ο Piscium	38 35	8 30·4	4, 4	—0·130
17	ξ Piscium	46 53	2 33·0	4, 4	+0·098
18	γ Androm.	55 59	41 42·6	4, 4	—0·163
19	α Arietis.........	1 59 54	22 51·1	4, 4	—0·010
20	B. A. C....... 684	2 6 10	+ 8 14·4	4, 4	+0·140
21	„ 729	15 20	— 0 11·7	4, 3	+0·302
22	„ 745	17 54	+10 1·5	4, 3	—0·177
23	ξ² Ceti...........	21 18	7 52·8	4, 4	+0·083
24	B. A. C....... 776	24 49	1 41·8	4, 4	+0·045
25	„ 798	29 35	+11 53·3	4, 3	+0·305
26	δ Ceti............	32 52	— 0 13·8	4, 4	+0·230
27	γ Ceti............	2 36 37	+ 2 41·4	4, 4	+0·440
28	B. A. C...... 999	3 7 29	20 33·9	4, 4	—0·075
29	„ 1028	12 35	2 53·7	4, 4	+0·062
30	ο Tauri	17 52	8 34·4	4, 4	—0·025
31	f Tauri	3 23 45	+12 29·6	4, 4	—0·175
		Kreis West.			
32	B. A. C...... 1135	3 34 53	+19 17·2	4, 4	+0·213
33	„ 1174	41 12	10 44·7	4, 4	—0·065
34	ζ Persei..........	46 2	31 29·8	4, 4	+0·230
35	ξ Persei..........	50 36	35 25·1	4, 4	0·000
36	λ Tauri	53 32	12 7·4	4, 4	+0·385
37	ν Tauri	3 56 18	5 37·8	4, 4	—0·038
38	B. A. C...... 1272	4 0 36	16 59·6	4, 4	+0·120
39	γ Tauri	12 27	+15 18·8	3, 4	—0·096
40	μ Eridani.........	39 3	— 3 29·6	4, 4	—0·345
41	π⁴ Orionis	44 20	+ 5 22·9	4, 4	+0·030
42	π⁵ Orionis	4 47 32	+ 2 13·6	4, 4	+0·002

Bildet man um zu sehen, ob die persönliche Gleichung im Laufe des Abendes Änderungen erfahren, nicht blos getrennte Mittel für die am Anfange und Ende bei Kreislage West beobachteten Sterne, sondern theilt man auch die Beobachtungen bei der Kreislage Ost in zwei Hälften, so erhält man:

Stern	Uhrzeit	Kreisl.	A—W
1— 9	$22^h 52^m$	W	+0·059
10—20	1 3	O	+0·078
21—31	2 44	O	+0·092
32—42	4 6	W	+0·040

Die Unterschiede der für jede Kreislage gefundenen Zahlen sind offenbar kleiner als die wahrscheinlichen Fehler derselben, also keine Änderung der persönlichen Gleichung im Laufe des Abendes angezeigt. Die Mittel für jede Kreislage nach der Zahl der Sterne genommen sind:

Kreis West: A—W = +0·049 aus 20 Sternen
„ Ost: „ = +0·085 „ 22 „

Auch diese beiden Zahlen sind einander noch so nahe gleich, dass deren Unterschied nicht verbürgt werden kann. Denn der mittlere Fehler einer Bestimmung der persönlichen Gleichung, berechnet aus der Übereinstimmung der einzelnen Werthe beträgt bei Kreis West: $\varepsilon = \pm 0·175$, bei Kreis Ost: $\varepsilon = \pm 0·180$, mithin der mittlere Fehler der für Kreis West und Kreis Ost erhaltenen Resultate respective ±0·039 und ±0·038. Es wurde deshalb das arithmetische Mittel beider Angaben für die persönliche Gleichung angenommen: diese, nebst ihrem mittleren Fehler beträgt also:

A—W = +0·07 ±0·027.

d) Vergleichung der Chronometer mit der Hauptuhr der Wiener Sternwarte.

Zwischen den einzelnen Chronometerübertragungen habe ich zahlreiche Vergleichungen der Chronometer (welche, wie bereits erwähnt wurde, Sternzeit zeigen), mit der Hauptuhr der Sternwarte ausgeführt, nicht nur um den Stand und Gang der-

selben möglichst sicher zu stellen, sondern auch um den Einfluss der Übertragungen auf diese Grössen kennen zu lernen, und lasse hier die Ergebnisse dieser Untersuchung folgen.

1. Chronometer Molyneux Nr. 1980.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate der Vergleichungen des Chronometers Molyneux zusammengestellt, und darin jene, welche unmittelbar vor oder nach einer Zeitbestimmung erlangt wurden, durch ein der laufenden Nummer beigefügtes Sternchen kenntlich gemacht. Jede Vergleichung ist das Mittel aus zwei bis drei Aufschreibungen, bei welchen ich die Secundenschläge abwechselnd von den Schlägen der Pendeluhr und denen des Chronometers an zählte.

Von den Angaben der Tafel bedürfen wohl nur die beiden letzten Columnen einer Erklärung. Mit dem aus den angezeigten Intervallen berechneten Uhrgange habe ich dort, wo eine Übertragung des Chronometers dazwischenliegt, seinen Stand für die intermediären Vergleichungen unter der Annahme eines gleichförmigen Ganges desselben berechnet, und in Columne 6 eingetragen. Den Unterschied des so berechneten mit dem beobachteten Stande enthält die siebente Columne. Um jedoch ein vollständiges Bild vom Verhalten des Chronometers zu erlangen, habe ich noch die in Wiener-Neustadt gemachten Vergleichungen eingeschoben, und durch Anbringen der (unter *e* abgeleiteten) Längendifferenz (0^m31^s18) und persönlichen Gleichung auf Wiener Zeit reducirt. Diese letztgenannten Vergleichungen sind zum Unterschiede von den übrigen mit römischen Nummern versehen und eingeklammert worden.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass ich in der zweiten Columne die mittlere Wiener Zeit der Vergleichung deshalb beigefügt habe, weil sich aus ihr bequemer als aus der Uhrzeit (die, wie die vierte Columne lehrt, mit einem bedeutenden Stande gegen Sternzeit behaftet ist) das zwischen zwei consecutiven Vergleichungen verflossene Intervall erkennen lässt.

Nr.	1871 mittl. Wien. Zt.	Uhrzt. Mol.	Stand Molyn.	Tgl. Gang	Ber. Stand	B—R.
1	Oct. 14 1·4	13h 14m	+1h 42m 41·46	+ 3·73		
2*	„ 14 10·3	22 6	42 42·82			
3	„ 14 18·5	6 18	42 44·33		44·16	+0·17
I	„ 14 22·3	10 9	42 (44·80)	+ 3·85	44·75	(+0·05)
4	„ 15 2·1	14 0	42 45·64		45·37	+0·27
5*	„ 16 9·3	21 17	42 50·50		50·39	+0·11
6	„ 17 2·5	14 31	42 53·14			
II	„ 17 5·9	17 52	42 (55·10)	+10·68	54·63	(+0·47)
7*	„ 17 10·6	22 39	42 56·76			
8	„ 17 21·1	9 10	42 58·85	+ 4·89	58·98	—0·13
III	„ 18 0·3	12 19	42 (59·45)		59·55	(—0·10)
9*	„ 18 10·0	22 6	43 1·53			
10	„ 18 18·0	6 8	43 2·36		2·56	—0·20
IV	„ 18 21·8	9 54	43 (3·04)	+ 3·09	3·05	(—0·01)
11	„ 19 4·0	16 7	43 3·95		3·85	+0 10
12*	„ 19 9·4	21 30	43 4·54	+ 3·96		
13*	„ 21 9·8	22 6	43 12·57			
14	„ 22 2·3	14 36	43 14·86		14·83	+0·03
V	„ 22 5·6	17 57	43 (15·17)	+ 3·29	15·28	(—0·11)
15	„ 22 9·8	22 7	43 15·85		15·86	—0·01
16	„ 23 7·2	19 35	43 18·85		18·81	+0·04
17	„ 24 2·8	15 14	43 21·50	+ 3·06		
18*	„ 31 8·8	21 41	43 43·67	+ 3·66		
19*	Nov. 5 11·0	0 13	44 2·33			
20	„ 6 2·6	15 50	44 4·27	+ 4·05		
21*	„ 10 11·9	1 25	44 22·79	+ 2·74		
22	„ 17 23·7	13 47	44 43·38	+ 2·93		
23	Dec. 4 6·9	22 3	45 31·33	+ 3·71		
24	„ 8 23·9	15 20	45 48·84			
VI	„ 9 5·0	20 27	45 (49·78)	+ 4·63	49·82	(—0·04)
VII	„ 9 20·6	12 3	45 (52·67)		52·83	(—0·16)
25	„ 10 1·1	16 37	45 53·72	+ 5·17		
26*	„ 11 6·1	21 41	+1 45 59·99			

Vor allem fällt hier der starke Sprung zwischen den Vergleichungen 6 und 7* am 17. October auf, und noch mehr der Umstand, dass die Uhr diesen ganz ungewöhnlichen Gang, der wohl nur vom Transporte derselben herrühren kann, ziemlich regelmässig beibehalten hat. Die rasche Gangänderung an diesem Tage mag ihre Ursache darin haben, dass der Sperrhaken der Aufhängeringe des Chronometers, den ich in Wien noch fest angezogen hatte, sich während der Eisenbahnfahrt nach Wiener-Neustadt lockerte, und dadurch die Ringe frei beweglich machte.

Die übrigen Unterschiede der letzten Columne übersteigen wohl nie die unvermeidliche Unsicherheit der Vergleichung zweier

Uhren, die beide dieselbe Zeit zeigen, und beweisen dadurch, dass der Gang des Chronometers, den obenerwähnten Fall ausgenommen, durch den Transport nicht merklich beeinflusst wurde. Ich habe daher, um alle ausgeführten Vergleichungen möglichst einfach zu berücksichtigen, so zu sagen Normalvergleichungen gebildet, indem ich mehrere zu einem Mittel zusammenzog, und darauf Bedacht nahm, dies Mittel der Zeit einer Chronometerübertragung möglichst nahe zu bringen. Dabei habe ich überdies dort wo es anging, jede bei einer Zeitbestimmung angestellte Vergleichung, welche insofern sicherer ist als die übrigen, da sie vom Gange des Chronometers und der Hauptuhr frei ist, zu zwei Gruppen gezogen, um ihr so ein grösseres Gewicht zu geben, und die in Wiener-Neustadt ausgeführten Chronometervergleichungen selbstverständlich weggelassen. Es ergaben sich dadurch schliesslich folgende Stände und Gänge des Chronometers:

Mittel aus Nr.		Uhrzeit Molyneux	Stand Mol.	Tgl. Gang	
1	October	14 13ʰ 14ᵐ	+1ʰ 42ᵐ 41ˢ46		
				+3ˢ92	
2 — 5•	„	15 15 55	42 45·82		
				+3·79	
5• — 6	„	16 5 54	42 51·82		
6 — 7*	„	17 18 35	42 54·95		+10ˢ68
7• — 9•	„	17 9 58	42 59·05		
				+3·97	
9• — 12•	„	18 10 28	43 3·10		
				+3·81	
13*	„	21 22 6	43 12.57		
				+3·30	
13• — 16	„	22 19 36	43 15·53		
				+3·29	
17	„	24 15 14	43 21·50		
				+3·05	
18•	„	31 21 41	43 43·67		
				+3·61	
19• — 20	November	5 8 2	44 3·30		
				+4·12	
21•	„	10 1 25	44 22·79		
				+2·74	
22	„	17 13 47	44 43·38		
				+2·93	
23	December	4 22 3	45 31·33		
				+3·80	
24 — 25	„	9 3 59	45 51·28		+ 4·63
				+5·01	
26•	„	11 21 41	+1 45 59·99		

2. Chronometer Kessels Nr. 1443.

Die Vergleichungen vom Chronometer Kessels mit der Hauptuhr der Sternwarte wurden genau so wie die des Chronometer Molyneux behandelt; ich kann sie daher ohne weitere Bemerkungen unmittelbar folgen lassen.

Nr.	Mittl. Wien. Zt. 1871	Uhrzt. Kess.	Stand Kess.	tgl. Gang	Ber. Stand	B—R.
1	Oct. 14 1^h4	15^h18^m	$-0^h24^m33^s04$			
2*	„ 14 10·2	0 8	24 32·88	+0·38	32·90	—0·02
3	„ 14 18·4	8 22	24 32·77			
I	„ 14 22·2	12 10	24 (32·70)		32·71	(—0·01)
4	„ 15 2·0	16 5	27 57·06			
5*	„ 16 9·3	23 24	27 54·20	+2·19		
6	„ 17 2·5	16 39	27 52·46	+2·90	52·23	+0·23
II	„ 17 5·8	19 59	27 (52·00)		51·71	(+0·29)
7*	„ 17 10·6	0 47	27 51·13			
8	„ 17 21·1	11 17	27 50·64	+1·20	50·60	+0·04
III	„ 18 0·1	14 17	27 (50·29)		50·45	(—0·16)
9*	„ 18 10·0	0 13	27 49·96			
10	„ 18 18·0	8 15	27 49·03		49·01	+0·02
IV	„ 18 21·7	11 59	27 (48·46)	+2·86	48·55	(—0·09)
11	„ 19 4·0	18 20	27 47·69		47·80	—0·11
12*	„ 19 9·3	23 36	27 47·17			
13*	„ 21 9·8	0 13	27 42·67	+2·22	42·67	0·00
14	„ 22 2·3	16 50	27 41·13			
V	„ 22 5·6	20 4	27 (51·55)			
15	„ 22 9·9	0 24	27 56·54			
16	„ 23 7·1	21 43	27 54·71	+2·36	54·45	+0·26
17	„ 24 2·7	17 23	27 52·51	+2·51		
18*	„ 31 8·8	23 55	27 34·33	+2·91		
19*	Nov. 5 11·0	2 27	27 20·48			
20	„ 6 2·5	17 58	27 18·53	+3·06	18·50	+0·03
21*	„ 10 11·9	3 41	27 5·01	+3·05		
22	„ 17 23·6	15 53	26 42·12	+3·70		
23	Dec. 4 6·9	0 9	25 41·87	+5·93		
24	„ 9 0·0	17 34	25 13·86			
VI	„ 9 4·9	22 33	25 (14·69)			
VII	„ 9 20·7	14 20	25 (9·97)			
25	„ 10 1·2	18 54	25 18·77	+6·12		
26*	„ 11 5·7	23 30	—0 25 11·50			

Von den drei Sprüngen im Stande des Chronometers rührt der erste daher, dass am Morgen des 15. October vor der Reise nach Wiener-Neustadt das Aufziehen desselben vergessen wurde, und es deshalb wenige Minuten vor der Vergleichung bei der Rückkehr nach Wien stehen geblieben war. Die beiden anderen Sprünge sind reell. Allerdings fiel mir bei der Vergleichung schon der erste Sprung am 22. October auf: doch glaubte ich, es sei hierbei irgend eine Zufälligkeit im Spiele, da die Vergleichung am folgenden Tage zeigte, dass die Uhr ihren früheren Gang unverändert beibehalten habe. Als sich jedoch bei der nächsten Vergleichung am 9. December genau dasselbe wiederholte, wurde die Uhr näher untersucht und gefunden, dass die Hem-

mungsfeder nachgelassen hatte, und daher bei der Erschütterung des Fahrens zuweilen mehrere Zähne des Steigrades auf einmal passiren konnten. Lässt man daher die Vergleichungen nach dem 22. October weg, und bildet man aus den früheren, wie bei Chronometer Molyneux, Normalwerthe, so erhält man:

Mittel aus Nr.		Uhrzeit Kessels	Stand Kessels	Tgl. Gang
1 — 3	October	14 23ʰ 56ᵐ	—0ʰ 24ᵐ 32ˢ90	+0ˢ38
5*— 7*	„	16 13 37	—0 27 52·60	
				+2·23
7*— 9*	„	17 12 6	27 50·58	
				+2·08
9*—12*	„	18 12 36	27 48·46	
				+2·36
12*—14	„	20 13 33	—0 27 43·66	

e) Berechnung der Längendifferenz.

1. Chronometer Molyneux.

In der folgenden Zusammenstellung der in Wiener-Neustadt ausgeführten Vergleichungen des Chronometer Molyneux mit der Hauptuhr des dortigen Observatoriums ist die Correction des Chronometers der am Ende von *d* 1 gegebenen Tabelle entnommen, die Correction der Pendeluhr Vorauer aus der Tabelle am Schlusse des Abschnittes *b* interpolirt, und zugleich die persönliche Gleichung angebracht, die sub *c* zu W—*A* = —0ˢ07 ermittelt wurde. Das Weitere bedarf keiner Erklärung.

Nr.	1871	Uhrzeit Vorauer	Correct. + pers. Gl.	Uhrzeit Molyneux	Correction
I	Oct. 14	11ʰ 50ᵐ 45ˢ0	+0ᵐ 56ˢ32	10ʰ 9ᵐ 27ˢ70	+1ʰ 42ᵐ 44ˢ84
II	„ 17	19 33 25·0	+0 56·12	17 51 57·20	+1 42 54·63
III	„ 18	14 0 20·0	+0 56·02	12 18 47·75	+1 42 59·43
IV	„ 18	11 35 20·0	+0 55·86	9 53 44·00	+1 43 3·00
V	„ 22	19 38 45·0	+0 55·24	17 56 56·25	+1 43 15·31
VI	Dec. 9	22 11 35·0	+0 17·10	20 26 33·50	+1 45 49·83
VII	„ 9	13 48 15·0	+0 16·34	12 3 9·85	+1 45 52·84

Daraus ergibt sich:

Nr.	Mittl. Wien. Zt.	Sternzeit Wien.-Neust.	Sternzeit Wien	Längendiff.	Gew.
I	Oct. 14 22ʰ3	11ʰ 51ᵐ 41ˢ32	11ʰ 52ᵐ 12ˢ54	0ᵐ 31ˢ22	1
II	„ 17 5·9	19 34 21·12	19 34 51·83	(30·71)	0
III	„ 18 0·3	14 1 16·02	14 1 47·18	31·16	1
IV	„ 18 21·8	11 36 15·86	11 36 47·00	31·14	1
V	„ 22 5·6	19 39 40·24	19 40 11·56	31·32	1
VI	Dec. 9 5·0	22 11 52·10	22 12 23·33	31·23	0·5
VII	„ 9 20·6	13 48 31·34	13 49 2·69	0 31·35	0·5

Wegen der starken Gangänderung, die, wie oben gezeigt wurde, bei der Übertragung des Chronometers am 17. October stattfand, halten wir es für's beste, diesen Tag ganz auszuschliessen. Ebenso haben wir jeder Vergleichung vom 9. December nur das halbe Gewicht gegeben, nicht nur weil beide Resultate aus derselben Zeitbestimmung abgeleitet sind, sondern diese in Wien auch mehrere Tage von dem Zeitpunkte der Vergleichung abstand.

Aus der Übereinstimmung der einzelnen Werthe folgt für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit $\varepsilon = \pm 0^s 084$, daher für das Resultat:

$$\lambda = 0^m 31^s 226 \text{ Gew. } 5; \; \varepsilon = \pm 0^s 038.$$

2. Chronometer Kessels.

Die Vergleichungen des Chronometer Kessels wurden genau auf dieselbe Weise behandelt, wie die des Chronometer Molyneux. Es sind mit Weglassung der letzten drei die folgenden:

Nr.	1871		Uhrzeit Vorauer	Correct. + pers. Gl.	Uhrzeit Kessels	Correct.
I	Oct.	14	$11^h 43^m 40^s 0$	$+0^m 56^s 32$	$12^h\ 9^m 40^s 20$	$-0^h 24^m 32^s 71$
II	„	17	19 29 30·0	56·12	19 58 49·30	27 52·01
III	„	18	13 48 10·0	56·03	14 17 27·50	27 50·39
IV	„	18	11 29 40·0	+0 55·86	11 58 55·50	—0 27 48·51

also:

Nr.		Mittl. Wien. Zt.	Sternzeit Wien.-Neust.	Sternzeit Wien	Längendiff.	Gew.
I	Oct.	$14\ 22^h 2$	$11^h 44^m 36^s 32$	$11^h 45^m\ 7^s 49$	$0^m 31^s 17$	1
II	„	17 5·8	19 30 26·12	19 30 57·29	31·17	1
III	„	18 0·1	13 49 6·03	13 49 37·11	31·08	1
IV	„	18 21·7	11 30 35·86	11 31 6·99	0 31·13	1

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ergibt sich hier zu $\varepsilon = \pm 0^s 043$, daher als Resultat sammt dessen mittlerem Fehler

$$\lambda = 0^m 31^s 138 \quad \text{Gew. } 4; \; \varepsilon = \pm 0^s 021.$$

Lässt man das arithmetische Mittel der Angaben beider Chronometer für den wahrscheinlichsten Werth der Längendifferenz gelten, so liegt das Passageninstrument des Observatoriums in Wiener-Neustadt

$$0^m 31^s 182$$

westlich vom Meridiankreise der Sternwarte in Wien.

Die geradezu überraschende Übereinstimmung der einzelnen Resultate jedes Chronometers kann wohl nur einer zufälligen Ausgleichung aller Fehler seine Entstehung verdanken. Ich halte daher auch einen, aus eben dieser Übereinstimmung berechneten wahrscheinlichen Fehler des Endresultates für kein adäquates Mass der wirklich erreichten Genauigkeit, und ziehe es deshalb vor, keinen solchen beizuschreiben.

Zur Vervollständigung der geographischen Coordinaten des Observatoriums in Wiener-Neustadt füge ich bei, dass Major Andres im Jahre 1871 an einem Starke'schen Universale mit 12zölligem Höhenkreise zahlreiche Circummeridianhöhen genommen hat, und daraus für die geographische Breite findet:

$$\varphi = 47°48'12''11$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler $r = \pm 0''069$.

Über die Untersalpetersäure.

Von **A. Exner,**

k. k. Artillerie-Hauptmann, Professor an der technischen Militär-Akademie in Wien.

(Mit 2 Holzschnitten.)

Nach den Resultaten, welche die Untersuchungen über die Untersalpetersäure im Gaszustande ergeben haben, ist die Molecularformel derselben N_2O_4 wohl von allen Chemikern adoptirt worden, und mit ihr auch die Ansicht, dass dieser Körper als ein intermediäres (gemischtes) Anhydrid der Salpetersäure und der salpetrigen Säure zu betrachten sei, indem beim Zerlegen mit Wasser diese beiden Säuren gebildet werden nach der Gleichung:

$$N_2O_4 + H_2O = NO_3H + NO_2H.$$

Es schien mir nicht ohne Interesse, den Beweis für die Richtigkeit dieser Anschauung auf dem Wege der Synthese zu liefern, d. h. zu versuchen, die Untersalpetersäure aus Derivaten der Salpetersäure und salpetrigen Säure aufzubauen. Der Erfolg schien von vorn herein gesichert, da nach den Versuchen von Odet und Vignon[1] das Anhydrid der Salpetersäure sich mit Leichtigkeit durch Einwirkung des Chlorids der Salpetersäure auf Silbernitrat darstellen lässt.

Für den vorliegenden Zweck konnten zwei Reactionen in Anwendung kommen; entweder die Einwirkung des Chlorids der salpetrigen Säure auf salpetersaures Silber:

$$NOCl + NO_3Ag = AgCl + N_2O_4$$

---

[1] Compt. rend. 69, 1142.

oder die Einwirkung des Chlorids der Salpetersäure auf salpetrigsaures Silber:

$$NO_2Cl + NO_2Ag = AgCl + N_2O_4.$$

Ich habe die letzte Reaction ausgeführt und mit derselben den gewünschten Erfolg erzielt.

Das für die Versuche erforderliche Chlorid der Salpetersäure habe ich theils durch Einwirkung von Phosphoroxychlorid auf Silbernitrat oder Bleinitrat, theils nach den Angaben von Hasenbach[1], durch Einwirkung von Chlor auf Untersalpetersäuredampf, bei höherer Temperatur, dargestellt und sorgfältig rectificirt. Um mich von der Reinheit des Präparates zu überzeugen, führte ich einige Chlorbestimmungen aus:

I. 0·1731 Grm. Substanz gaben 0·2793 Grm. Chlorsilber und 0·017 Grm. metallisches Silber, also 0·0747 Grm. Chlor.

II. 0·3260 Grm. Substanz gaben 0·5644 Grm. Chlorsilber und 0·0048 Grm. metallisches Silber, somit 0·1405 Grm. Chlor.

Der Chlorgehalt stellt sich demnach

Berechnet	Gefunden	
43·56%	I. 43·15%	II. 43·09%

Nun wurde eine Röhre mit trockenem salpetrigsaurem Silber gefüllt, in einer Kältemischung gut abgekühlt und durch das ausgezogene, offene Ende der Dampf des Salpetersäurechlorids eingeleitet, welcher sich in der Röhre verdichtete und das Silbersalz durchtränkte. Nachdem die Röhre zugeschmolzen war, wurde sie mehrere Stunden hindurch bei einer Temperatur von 30—40° C. erhalten. Der Process verlief bei allen angestellten Reactionen ganz glatt; einerseits wurde das Silbersalz vollständig in Chlorsilber umgewandelt, andererseits entstand Untersalpetersäure. Es ist selbstverständlich, dass bei den Versuchen die Feuchtigkeit möglichst ausgeschlossen werden muss; vollständig gelingt dies niemals, weil einerseits das salpetrigsaure Silber, vermöge seiner lockeren Beschaffenheit, immer etwas Wasser

[1] Journ. f. prakt. Chemie, N. F. IV, pag. 1.

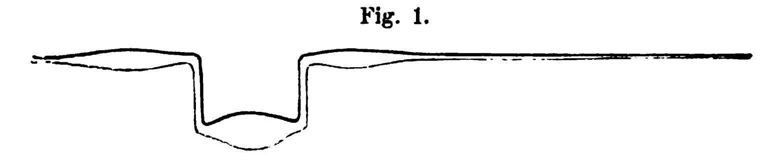
auf der Oberfläche verdichtet und weil andererseits sich aus der Luft an den inneren Wänden der kalten Röhre etwas Wasserdampf condensirt; darin liegt auch der Grund, dass die auf dem angegebenen Wege dargestellte Untersalpetersäure stets Spuren ihrer Zersetzungsproducte mit Wasser enthält und von der salpetrigen Säure grün gefärbt ist.

Um die Untersalpetersäure vom Chlorsilber zu trennen, wurde die zugeschmolzene Glasröhre eingekühlt, hierauf die Spitze abgekneipt und dann, durch sehr gelindes Erwärmen, die Untersalpetersäure in entsprechende Vorlagen abdestillirt [1], welche mit Eis gekühlt waren.

Das Destillat zeigte die Eigenschaften der Untersalpetersäure, nur war es, wie bereits erwähnt, durch die in der angegebenen Weise entstandene geringe Menge salpetriger Säure grünlich gefärbt; es wurden davon mehrere Stickstoffbestimmungen ausgeführt. Die Methode, deren ich mich dabei bediente, war folgende:

Die Untersalpetersäure wurde zunächst in ein Glasgefäss von der durch Fig. 1 dargestellten Form gebracht und, nachdem die Luft in demselben durch den Dampf der Untersalpetersäure

Fig. 1.



möglichst verdrängt worden war, die offenen Enden zugeschmolzen und das Ganze gewogen.

Die Zerlegung erfolgte in einer Verbrennungsröhre, welche ihrer ganzen Länge nach mit spiralförmig zusammengerolltem Kupferdrathnetz ausgefüllt war; an das eine Ende der Verbrennungsröhre war, seitlich, ein Geissler'scher Hahn angeschmolzen und mit diesem war ein continuirlicher Kohlensäureapparat in Verbindung; in das mit diesem Hahne versehene

[1] Um die einzelnen Theile der Apparate bei den Versuchen luftdicht mit einander zu verbinden, bediente ich mich, mit Vortheil, der innen mit Platinblech ausgekleideten Verschlussstücke, welche von E. Ludwig (Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 1868, pag. 232) beschrieben wurden.

engere Ende der Verbrennungsröhre wurde das lange, am Ende äusserst dünn ausgezogene Capillarrohr des mit der zu analysirenden Substanz gefüllten Gefässes eingeschoben, und mittelst Platinblech und Kautschukrohr ein dichter Verschluss hergestellt. Fig. 2 zeigt die ganze Anordnung:

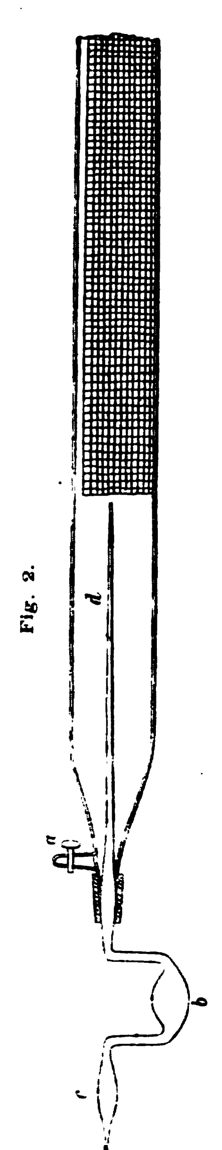


Fig. 2.

Nachdem durch die bei *a* eingeleitete Kohlensäure alle Luft aus dem Apparate verdrängt und die Verbrennungsröhre zur Rothgluth erhitzt war, wurde das, vorher durch einen Feilstrich geritzte Ende *d* des Gefässes *bcd* durch leichtes Andrücken an die Wand der Verbrennungsröhre zerbrochen, so dass die Untersalpetersäure als Dampf in die Verbrennungsröhre gelangen konnte; der Kohlensäurestrom wurde gleichmässig unterhalten und durch Berühren von *b* mit der Hand wurde die Substanz allmälig zum Verdampfen gebracht. Zum Schlusse wurde über *c* ein Kautschukschlauch geschoben, der mit einem zweiten Kohlensäureapparat in Verbindung war, das feine, ebenfalls vorher eingefeilte Röhrenende im Schlauche abgebrochen und so die letzte Spur von Untersalpetersäuredampf durch Kohlensäure verdrängt. Die Zerlegung der Untersalpetersäure durch das erhitzte metallische Kupfer erfolgte sehr rasch; nur ein sehr kleines Stück des Drathnetzes war am Ende jeder Analyse oxydirt, während der bei weitem grösste Theil vollkommen metallisch glänzend blieb.

Die Resultate der Stickstoffbestimmungen sind:

I. 0·1695 Grm. Substanz gaben 47 CC. feuchten Stickstoff bei 20° C. und 750 Mm. Barometerstand.

II. 0·1153 Grm. Substanz gaben 32·5 CC. feuchten Stickstoff bei 20° C. und 742 Mm. Barometerstand.

Der Stickstoffgehalt der reinen Untersalpetersäure berechnet sich mit 30·4%; die Resultate der Analysen ergeben: I. 31·2% und II. 31·3%; der durch die Analysen gefundene höhere Stickstoffgehalt findet in dem Umstande seine Erklärung, dass das Präparat stets mit etwas Salpetrigsäureanhydrid verunreinigt war.

Nachdem einerseits, wie schon längst bekannt, die Untersalpetersäure beim Zerlegen mit Wasser, Salpetersäure und salpetrige Säure liefert, andererseits sich bei der Reaction zwischen dem Chlorid der Salpetersäure und salpetrigsaurem Silber bildet, so muss diese Verbindung wohl unbedingt als das intermediäre Anhydrid der Salpetersäure und der salpetrigen Säure betrachtet werden und es wird die genetische Beziehung der Untersalpetersäure zur salpetrigen und Salpetersäure durch die folgende Gleichung ausgedrückt:

$$NO_3H + NO_2H - H_2O = N_2O_4.$$

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXV. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

4.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

X. SITZUNG VOM 11. APRIL 1872.

Herr Hofrath Dr. E. Brücke übermittelt eine Abhandlung, betitelt: „Studien über die Kohlenhydrate und über die Art, wie sie verdaut und aufgesaugt werden."

Herr Prof. A. Toepler in Graz übersendet eine für den „Anzeiger" bestimmte „vorläufige Bemerkung über eine verallgemeinerte Zerlegung der schwingenden Bewegung in periodische Componenten."

Herr Regrth. Dr. C. v. Littrow überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung, betitelt: „Bericht über die von den Herren Dir. C. Bruhns, Dir. W. Förster und Prof. E. Weiss ausgeführten Bestimmungen der Meridiandifferenzen Berlin—Wien—Leipzig."

Herr Dr. A. Schrauf legt die IV. Reihe seiner „Mineralogischen Beobachtungen" vor.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Anstalt, Königl. ungar. geologische: Mittheilungen. I. Band 1. Heft. Pest, 1872; kl. 4°. — Évkönyvé. I. Kötet. 1871; II. Kötet, 1. füzet. Pest, 1872; kl. 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrgang, Nr. 9—11. Wien, 1872; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1881—1882. (Bd. 79, 9—10.) Altona, 1872; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nrs. 11—13. Paris, 1872; 4°.

Gesellschaft, Astronomische, zu Leipzig: Vierteljahrsschrift. VII. Jahrgang, 1. Heft. Leipzig, 1872; 8°.

— geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XV (neuer Folge V.), Nr. 3. Wien, 1872; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VII. Band, Nr. 6. Wien, 1872; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 12—15. Wien, 1872; 4°.

Isis: Sitzungs-Berichte. Jahrgang 1871, Nr. 10—12. Dresden, 1872; 8°.

Istituto, R., Veneto di Scienze, Lettere ed Arti: Atti. Tomo I°, Serie IV^a, Disp. 3^a. Venezia, 1871—72; 8°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Bd. V, 3. & 4. Heft. Leipzig, 1872; 8°.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 7. Graz, 1872; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen & Mittheilungen. Jahrg. 1872, Nr. 7—8. Wien; 8°.

Lotos. XXII. Jahrgang. Februar & März 1872. Prag; 8°.

Memorial de Ingenieros. Tomo XXV—XXVI. Madrid, 1870—1871; 8°.

Moniteur scientifique par Quesneville. 363e Livraison. Année 1872. Paris; 4°.

Museum of Comparative Zoology, at Harvard College, in Cambridge: Annual Report for 1870. Boston, 1871; 8°. — Bulletin. Vol. III, Nr. 1. 8°.

Nature. Nrs. 125—127, Vol. V. London, 1872; 4°.

Observations, Astronomical and Meteorological, made at the United States Naval Observatory during the Year 1868. Washington, 1871; 4°.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. VI, Nr. 3. Torino, 1871; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1872, Nr. 5. Wien; 4°.

„Revue politique et littéraire" et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger. Ire Année (2e série), Nrs. 39—41. Paris & Bruxelles, 1872; 4°.

Société Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'orient. XVe Année, Nrs. 11—12. Constantinople, 1872; 4°.

Society, The Royal Geographical, of London: Proceedings. Vol. XV, Nr. 5; Vol. XVI, Nr. 1. London, 1871; 8°.

— The American Philosophical, at Philadelphia: Proceedings. Vol. XII, Nr. 86. Philadelphia, 1871; 8°.

Verein, naturwiss., in Hamburg: Abhandlungen. V. Band, 2. Abth. Hamburg, 1871; 4°. — Übersicht der Ämter-Vertheilung und wissenschaftlichen Thätigkeit in den Jahren 1869 & 1870. 4°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 12—14. Wien, 1872; 4°.

Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Band, 18. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

Notiz über absolute Intensität und Absorption des Lichtes.

Von Dr. **Alois Handl,**
k. k. Universitäts-Professor in Lemberg.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. März 1872.)

Bei den Messungen über die Intensität des Lichtes kommt immer der Umstand wesentlich zur Geltung, dass die von den Ätherwellen erzeugten Wirkungen ihrer Stärke nach nicht nur Functionen der Ätherwellen selbst sind, sondern auch von der Beschaffenheit derjenigen Körper abhängen, in und an welchen diese Wirkungen stattfinden. So z. B. sind die Wärmewirkungen, die eigentliche Lichtwirkung (auf das Auge) und die chemischen Wirkungen zwar einander proportional, solange sie von einer einzigen homogenen Ätherwelle hervorgerufen werden; scheinen aber gar nicht mehr in einer deutlichen Beziehung zu einander zu stehen, sobald man die durch gemischte Strahlen oder durch solche von verschiedener Farbe hervorgebrachten Effecte dieser drei verschiedenen Arten mit einander zu vergleichen sucht. Es ist daher mit besonderen Schwierigkeiten verbunden, die absoluten Intensitäten verschiedenfarbiger Strahlen durch Beobachtungen mit einander zu vergleichen; unter absoluter Intensität der Strahlen jene Beschaffenheit derselben verstanden, von welcher die Stärke ihrer Wirkungen ohne Rücksicht auf die Eigenschaften des Körpers, in welchem diese auftreten, abhängig ist.

Ich habe auch nicht die Absicht, jetzt auf eine Vergleichung und Messung der absoluten Intensitäten näher einzugehen; wenn ich dennoch einige Worte darüber sage, so geschieht dies, um eine einfache Erklärung der Absorptionserscheinungen in verschiedenen Mitteln daraus abzuleiten.

Die absolute Intensität einer Ätherwelle kann nichts anderes sein, als die von den gesammten schwingenden Theilchen derselben repräsentirte mittlere Arbeitsfähigkeit, und diese ist propor-

tional der zweiten Potenz der grössten, von jedem schwingenden Theilchen periodisch erlangten Geschwindigkeit (v, Vibrationsintensität). Erlauben wir uns, den Proportionalitätsfactor $= 1$ zu setzen, so wird die absolute Intensität eines Strahles $J = v^2 = a^2 . k$ sein, wenn unter a die Schwingungsamplitude, unter k der Elasticitätsmodul für die der Betrachtung unterzogene Schwingungsart verstanden wird. Bei den sonst in der Optik gebräuchlichen Intensitätsvergleichungen wird k als Constante behandelt, und die Lichtstärke nur der zweiten Potenz der Amplitude proportional gesetzt; streng genommen ist aber das k nur dann constant, wenn ein einziger Punkt des betrachteten Mittels in Folge der durch seine Verschiebung erregten Elasticitätskräfte in Schwingungen geräth. Mit der Unveränderlichkeit des Werthes von k ist ja auch die Unveränderlichkeit der Schwingungsdauer $T = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{k}}\right)$ verbunden; gehört aber der schwingende Punkt zu einer einfachen Welle von der Länge λ, so ist der bei den Schwingungen massgebende Elasticitätscoëfficient selbst eine Function der Wellenlänge, welche sich in der Form

$$k = \frac{A}{\lambda^2} \left(1 - \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \ldots\right)$$

darstellen lässt, wie sehr leicht nachgewiesen werden kann.

Sind die Wellenlängen im Verhältniss zu den constanten B, C.... hinreichend gross, so dass die späteren Glieder des eingeklammerten Ausdruckes alle vernachlässigt werden können (was der Vernachlässigung der Farbendispersion entspricht), so erhält man für die absolute Intensität den Ausdruck

$$J = \frac{a^2 . A}{\lambda^2},$$

behält man aber den vollkommenen Werth für k bei, so wird

$$J = \frac{a^2}{\lambda^2} \cdot A \cdot \left(1 - \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \ldots\right); \qquad \text{(I)}$$

die absolute Intensität verschiedenfarbiger Strahlen ist also, gleiche Schwingungsweiten in allen vorausgesetzt, in erster An-

näherung den zweiten Potenzen der Wellenlängen verkehrt proportional, vom rothen zum violetten Ende des Spectrums und darüber hinaus fortwährend wachsend, genauer aber durch die Formel (I) gegeben; wobei es vorderhand ziemlich gleichgiltig ist, wie viele Glieder des nach fallenden Potenzen von λ geordneten, eingeklammerten Factors berücksichtiget werden müssen. Wenn auch das dritte und die folgenden bereits verschwinden, so bleibt uns

$$\left(1 - \frac{B}{\lambda^2}\right)$$

übrig, und es ist möglich, dass der letztere Ausdruck $= 0$, $\lambda^2 = B$ werde; müssen mehr Glieder jener Reihe angewendet werden, so wird es sogar mehrere λ geben, welche diesen Factor verschwinden machen. Die Intensität gewisser Wellenlängen kann also durch die Werthe der constanten des Mittels, durch die moleculare Beschaffenheit desselben vernichtet werden und dies kann die Ursache der sogenannten auswählenden Absorption des Lichtes in verschiedenen Mitteln sein, denn es ist klar, dass die einmal verlorene lebendige Kraft der Ätherschwingungen von einer gewissen Wellenlänge (Farbe) nicht mehr restituirt werden kann.

Das Entstehen von Absorptionslinien in grösserer Anzahl in den Gasen oder breiter continuirlicher dunkler Bänder in den Spectris des durch feste und flüssige Körper gegangenen Lichtes dürfte nun in folgender Weise zu erklären sein: Der Äther im Inneren eines Körpers kann keineswegs als eine homogene Masse betrachtet werden, sondern er ist in der Nähe der Molecüle und Atome stark verdichtet, in den grösseren Zwischenräumen derselben dünner und freier; enthält der Körper Molecüle und Atome verschiedener Art, so kann auch die Beschaffenheit der Ätherhüllen an verschiedenen Seiten der Molecüle oder an verschiedenen Stellen ihres inneren verschieden sein; für die Lichtwellen verhalten sich diese verschiedenen Partien des Äthers wie ebensoviele Schichten von absorbirenden Mitteln, deren jedes einzelne einer bestimmten Wellenlänge den Durchgang verwehrt. Das durch einen solchen Körper gehende Licht wird also aller jener Farben beraubt, welche in einer der im Innern dieses

Körpers vorhandenen Ätherpartien nach Formel (I) ausgelöscht werden. Dass bei wachsender Dicke oder Dichte des durchsichtigen Körpers die Zahl der absorbirten Farben eine grössere wird, ist dadurch zu erklären: Damit eine bestimmte Wellenlänge durch den Körper gar nicht hindurchgehen könne, ist es nöthig, dass die für diese Wellenlänge undurchdringlichen Partien des Äthers, wenn sie auf eine gegen die Richtung der durchgehenden Strahlen senkrechte Ebene projicirt werden, diese wenigstens vollständig bedecken, was nach den Gesetzen grosser Zahlen immer unter denselben Umständen mit Ausschluss jeder Zufälligkeit wiederkehrt.

Auch der Umstand, dass in Gasen die Absorption auf einzelne Wellenlängen sich beschränkt, während sie sich in festen und flüssigen Körpern auf breite Bänder im Spectrum erstreckt, kann etwa folgendermassen gedeutet werden:

In Gasen sind die Zwischenräume zwischen den einzelnen Molecülen verhältnissmässig gross, die den letzteren angehörigen Ätherhüllen daher gewissermassen vollständig entwickelt und abgeschlossen; in festen und flüssigen Körpern dagegen, wo die Molecüle viel näher an einander liegen, greifen auch deren Ätherhüllen in einander, so dass eine grössere Mannigfaltigkeit und ein Wechsel von Übergängen in den Dichtigkeiten und Elasticitäten der einzelnen Ätherpartien dadurch herbeigeführt wird, welche die Ausdehnung der Absorption auf eine continuirliche Folge von Wellenlängen bedingen können. Es sind dies nur vorläufige Andeutungen, welche durch ein näheres Eingehen in diese Idee vielleicht eine gründlichere Bestätigung ihrer Richtigkeit und weitere Folgerungen daraus zu Tage zu fördern geeignet sein werden. Es ist klar, dass zwischen dieser Erklärung der Absorptionserscheinungen aus dem allgemeinen Ausdrucke für die absolute Intensität des Lichtes und zwischen den Dispersionsconstanten der Körper ein gewisser Zusammenhang bestehen muss, dessen Erörterung vorläufig dahingestellt bleiben mag.

Über Fourier'sche Integrale und Analogien derselben.

Von **Hermann Frombeck,**
stud. phil.

Das Studium der rein analytischen Partien der Integralrechnung, die Untersuchungen über geschlossene Integrationen, über die Fourier'schen Integrale und ihre Analogien, besonders aber die Erforschung der überall durchgreifenden Transcendenten der Integralrechnung setzt die Zweifellosigkeit zweier nicht genug scharf hervorzuhebender Sätze voraus, welche wir als die Äquivalenz des Unendlichkleinen, sowie des Unendlichgrossen bezeichnen. Die Nothwendigkeit der Annahme derselben erhellt genügend aus der Thatsache, dass berechtigte Folgerungen aus jenen eben genannten Disciplinen nur durch ihre Hilfe mit dem Grundbegriffe des bestimmten Integrales in Einklang zu bringen sind; ja es besitzt eine solche indirecte Überlegung mehr überzeugende Kraft als die directe Beweisführung, weil die Kürze der letzteren den Verdacht einer dogmatischen Festsetzung immer wachrufen muss. Wir drücken die Äquivalenz des independent Unendlichkleinen in der Gleichung aus

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta x_p}{\Delta x_q} = \frac{dx_p}{dx_q} = 1\,, \tag{1}$$

welche in der vorliegenden Form zunächst zweierlei besagt. Es bezeichnet dx_p den unendlich kleinen Zuwachs der unabhängig Veränderlichen x an der Stelle $x = x_p$; die Gleichung enthält in diesem Sinne nichts weiter als die Grundlage der Integralrechnung, die gegenseitige Vertauschbarkeit beliebiger Grenzzuwächse im Änderungsbereiche der unabhängig Veränderlichen, die überall gleiche Geltung des Differentiales in demselben oder überhaupt

$$\frac{dx}{dx} = 1, \qquad (2)$$

d. h. sie reducirt sich auf die allgemeine Definition des Moduls der Multiplication (1), übertragen auf den Fall des indenpedent Unendlichkleinen. Man kann statt (1) wohl auch $dx_p = dx_q$ substituiren; die Gleichung (2) würde bei der Schreibweise $dx = dx$ oder $dx - dx = 0$ ihre eigentliche Bedeutung einbüssen. Es mag bemerkt werden, dass ohne die Voraussetzung der Richtigkeit der Annahme $\frac{dx}{dx} = 1$ die Identität

$$\text{Lim} \frac{\varphi(a+\delta)}{\psi(a+\varepsilon)} = \frac{\varphi(a+dx)}{\psi(a+dx)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \qquad (3)$$

für $\varphi(a) = \psi(a) = 0$ eine fragliche wird; dieselbe sei in der vorliegenden allein giltigen strengen Fassung nur erwähnt, um auf sie sogleich einen Schluss in Betreff der sogenannten discontinuirlichen Integrale stützen zu können. In dem Falle einer Unterbrechung der Continuität des Differentialfactors innerhalb des Integrationsintervalles gilt bekanntlich die Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - \text{Lim}\,[F(k+\delta) - F(k-\varepsilon)];$$

wegen $\text{Lim}\, F(k+\delta) = F(k + \text{Lim}\,\delta)$ und $\text{Lim}\,\delta = \text{Lim}\,\varepsilon = dx$ ist hienach

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - [F(k+dx) - F(k-dx)] \qquad (4)$$

die neue Form der Discontinuitätsgleichung, wie sie aus dem Begriffe des bestimmten Integrales mit Nothwendigkeit hervorgeht. Es ist demgemäss die Definition des Hauptwerthes eines discontinuirlichen Integrales die einzig annehmbare und richtige Definition des letzteren selbst.

Beispielsweise möge $f(x) = \frac{1}{x}$ und $\int_{-b}^{+b} \frac{dx}{x}$ bestimmt werden; die Formel (4) gibt

$$2\int_{-b}^{+b}\frac{dx}{x} = lb^2 - l(-b)^2 - l(0+dx)^2 + l(0-dx)^2 =$$

$$= 2l\frac{dx}{dx} = 2l1 = 0.$$

Nach der Definition des bestimmten Integrales ist an der Stelle $x = 0$ ein erst zu bestimmender Werth $0.\infty$ oder $\frac{0}{0}$ in die Summirung einzubeziehen; derselbe kann nach (3) nur $\frac{dx}{0-dx}$ oder $\frac{dx}{0+dx}$, d. h. er kann nur $-\frac{dx}{dx}$ und $+\frac{dx}{dx}$ oder $-1+1=0$ sein. Ebenso ist weiter

$$\frac{dx}{0-2dx} + \frac{dx}{0+2dx} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 0,$$

so dass stets im negativen Integrationsbereich ein entsprechender Werth des positiven Bereiches liegt, der sich mit diesem zu Null reducirt. Wie die Summe aller negativen Werthe

$$-(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots \text{ in inf.})$$

und die ähnliche der positiven Werthe trotz ihrer Divergenz sich gegenseitig tilgen können, wird später bei der Äquivalenz des Unendlichgrossen dargelegt werden; hier musste das Illusorische der Annahme eines unbestimmten (i. e. unbestimmbaren) Werthes $0.\infty$ oder $\frac{0}{0}$ ohne genaue Präcisirung des Begriffes aus der Natur sich ändernder Functionen besonders betont werden.

Nehmen wir (2) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ und bestimmen $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}$, so haben wir

$$F(x) = \frac{1}{4}l\left\{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right\},$$

daher

$$4\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = l\left(\frac{1-\infty}{1+\infty}\right)^2 - l1 - l\left(\frac{1-1-dx}{1+1+dx}\right)^2$$

$$+ l\left(\frac{1-1+dx}{1+1-dx}\right)^2 = 2l\frac{dx}{dx} = 2l1 = 0.$$

Die Lehre von den Fourier'schen Integralen und ihren Analogien bestätigt dieses Resultat, indem sie unter Berücksichtigung sämmtlicher Beschränkungen die Formel ableitet

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} \sin ab;$$

sie benützt in derselben Weise, ohne einen Fehler zuzulassen, die allgemeinere Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1-x^\nu}\, dx = \frac{\pi}{\nu} \cot \frac{\mu}{\nu} \pi; \quad \mu < \nu. —$$

Die Discontinuitätsformel (4) ist mit der folgenden identisch

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{k-0} f(x)\, dx + \int_{k+0}^b f(x)\, dx,$$

worin der Kürze wegen 0 für dx eingeführt ist. In dieser Gestalt erlaubt sie, wie unmittelbar einleuchtend, die Anwendung sämmtlicher Hilfsmittel zur Transformation der Integrale, unter diesen in erster Reihe die Substitution neuer Variabeln. So ist z. B.

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{0} \frac{dx}{x} + \int_0^{+a} \frac{dx}{x} = \int_0^a \frac{dx}{x} - \int_0^a \frac{dx}{x},$$

wenn im ersten Integrale x durch $-x$ ersetzt wird; ebenso hat man

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} - \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$$

bei Substitution der Function $\frac{1}{x}$ für x im zweiten Integrale. Man erhält auf diesem Wege Differenzen divergenter Integrale von gleicher Beschaffenheit, da man

$$\int_0^a \frac{dx}{x} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots \text{ in inf.},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots \text{ in inf.}$$

findet; es frägt sich, welchen Werth diese Differenzen, die anscheinend von der unbestimmten Form $\infty - \infty$ sind, annehmen. Unter der Annahme des Satzes von der Äquivalenz des Unendlichkleinen als eines nothwendigen Principes der Integralrechnung erhielten wir für die Integrale linker Hand gleichmässig die Null: dasselbe muss folgerichtig mit den Differenzen rechter Hand der Fall sein; d. h. es ist

$$\int_0^a \frac{dx}{x} - \int_0^a \frac{dx}{x} = 0,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} - \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = 0.$$

Wir nennen diese hier auftretende Erscheinung der vollkommenen Bestimmtheit zweier Ausdrücke $\infty - \infty$ die Äquivalenz des formgleichen Unendlichgrossen, die aus der Äquivalenz des indenpedent Unendlichkleinen mit Nothwendigkeit entspringt und wollen mit dieser neuen Bezeichnung nur eine praktischwichtige Specialisirung der Definition des Moduls der Addition (0), bezogen auf die formale Identität zweier Divergenzen hervorheben. Bezeichnen wir eine solche Divergenz mit $[\infty]$, so haben wir

$$[\infty] - [\infty] = 0, \tag{5}$$

eine Formel, deren vollkommenes Verständniss einige wesentliche ergänzende Bemerkungen erfordert.

Der Ausdruck formal-identisch ist an sich klar. Formal gleich ist nur formal Bestimmtes. Es ist die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots \text{ in inf.}$$

der unbestimmte Ausdruck, unter den sich eine grosse Anzahl

bestimmter Operationen u. A. $\int_0^a \frac{dx}{x}$, $\int_0^c \frac{e^{-ax}\cos bx}{x}\,dx$, wo a, b und c willkürlich sind, subsummirt. Man mag diesen unbestimmten Ausdruck als Typus einer besondern Classe von Integrationen, Reihenentwicklungen etc. betrachten und benennen; unterscheide denselben jedoch sorgfältig von dem Modul (der Norm) dieser Classe, worüber alsbald das Nöthige folgt. Man darf nun zwei Reihen $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ nur dann als äquivalent im Sinne von (5) betrachten, wenn man weiss, dass sie dieselben formal bestimmten Operationen vertreten. Ebenso sind weder $\int_0^a \frac{dx}{x}$ und $\int_0^b \frac{dx}{x}$, noch $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\,dx$ und $\int_0^\infty \frac{e^{-bx}}{x}\,dx$ äquivalent. Ein zweiter Punkt, der ausdrücklich erwähnt zu werden verdient, betrifft den Ausdruck der Äquivalenz (5). Gerade wie $dx - dx = 0$ an Stelle von $\frac{dx}{dx} = 1$ bedeutungslos wird, ist es mit dem Ausdruck $\frac{\infty}{\infty} = 1$ an Stelle von (5) der Fall. Die Bedingung formaler Identität fällt in $\frac{\infty}{\infty} = 1$ ganz hinweg, wie in $dx - dx = 0$ die der Indepedenz des dx, wie sattsam bekannt ist, indem

$$\frac{\int_0^a \frac{dx}{x}}{\int_0^a \frac{dx}{x}}, \quad \frac{\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\cos bx}{x}\,dx}{\int_0^\infty \frac{e^{-cx}\cos dx}{x}\,dx} \quad \text{etc.}$$

ohne Unterschied und ohne Gefahr eines Fehlers der Einheit gleichgesetzt werden dürfen.

So ist z. B.

$$\frac{\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\cos bx}{x}\,dx}{\int_0^\infty \frac{e^{-cx}\cos dx}{x}\,dx} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx - C - \frac{1}{2}\,l(a^2+b^2)}{\int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx - C - \frac{1}{2}\,l(c^2+d^2)} = 1,$$

siehe unten.

Der Grund hievon ist einfach der, dass alle formal bestimmten Operationen, welche sich unter einem unbestimmten Typus (etwa $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$) zu bezeichnen als „logarithmische Divergenz" vereinigen, nur durch endliche Werthe (Constanten, Functionen) von einander verschieden sind. Sind die Operationen formal-identisch, so wird die Constante der Nulle gleich.

Sind nunmehr die Operationen nicht identisch, aber wenigstens verwandt, so sind jene Constanten und Functionen nicht nur endlich, sondern vollkommen bestimmte Ausdrücke in den Constanten jener Operationen. Der Theil jener Lehre von den geschlossenen Integrationen, der auf der Elimination der Divergenz der Integrale längs eines Contours mit mehreren Divergenzpunkten beruht und welcher an und für sich die Äquivalenz des Unendlichgrossen zur unabweisbaren Voraussetzung hat, liefert zu derselben eine sehr wesentliche Erweiterung. Es existirt, so zeigt er, für jede selbstständige Classe von Operationen (u. A. z. B. Integrationen mit gemeinschaftlichem Divergenzfactor) ein gemeinsamer Modul, auf welchen sich dieselben in jedem Falle durch Hinzufügen endlicher bestimmter Ausdrücke zurückführen lassen. Die Integration der Functionen

$$\frac{e^{-(x+iy)}}{x+iy} \quad \text{und} \quad \frac{e^{-(x+iy)}}{x-iy},$$

nach $x+iy$ und $x-iy$ längs eines Rechteckes mit den Seiten $a=\infty$ und bi lehrt die Gleichheit der Integrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx;$$

die Analogien der Fourier'schen Integrale liefern hiezu die Erklärung dieser Gleichheit mittelst der allgemeinen Formel

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\cos bx}{x}\,dx = \int_{\sqrt{a^2+b^2}}^\infty \frac{dx}{x} = \int_0^{\sqrt{a^2+b}} \frac{dx}{x}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{x} - C - \frac{1}{2}l(a^2+b^2), \; a \geqq 0, \; -\infty \leqq b \leqq +\infty, \; a^2+b^2>0,$$

womit als Modul für den Divergenzfactor $\frac{1}{x}$ das Integral $\int_0^\infty \frac{dx}{x}$ gegeben wird. Die Constante $-C-\frac{1}{2}\,l\,(a^2+b^2)$ nennen wir den Hauptwerth der links befindlichen identischen Integrale und bezeichnen denselben mit

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-ax}\cos bx}{x}\,dx \quad \text{und} \quad \int_{(\sqrt{a^2+b^2})}^{(\infty)} \frac{dx}{x}, \quad \int_{(0)}^{(\sqrt{a^2+b^2})} \frac{dx}{x}.$$

Diese Bezeichnung lässt sich, wenn $\varphi(x)$ den Divergenzfactor eines Differentiales $\varphi(x)F(x)\,dx$ darstellt, zu $\int_{(x_0)}^{(x_1)} \varphi(x)\,F(x)\,dx$ erweitern; unter Benützung des Moduls zu $\varphi(x)$ J_m besteht die Gleichung

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\varphi(x)\,dx = J_m + \int_{(x_0)}^{(x_1)} F(x)\varphi(x)\,dx.$$

Eine letzte Verallgemeinerung, zu welcher die Gleichung (5) anregt, ist nun die Einführung eines Aggregates theils positiver theils negativer Functionen $F(x)\varphi(x)$ in die vorstehende Modularformel. Da nach dem Äquivalenzsatze an Stelle von

$$\Sigma \int_{x_0}^{x_1} F_p(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{auch} \quad \int_{x_0}^{x_1} \Sigma\,[F_p(x)\varphi(x)]\,dx$$

oder

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,\Sigma\,[F_p(x)]\,dx,$$

wenn allen Functionen $F(x)$ derselbe Divergenzfactor beigefügt ist, treten darf, so lautet die neue Gleichung

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,\Sigma\,[F_p(x)]\,dx = \Sigma\,[J_m] + \Sigma \int_{(x_0)}^{(x_1)} \varphi(x)\,F_p(x)\,dx,$$

welche für $\Sigma_0[J_m]=0$ in

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\Sigma_0[F_p(x)]\,dx = \Sigma_0 \int_{(x_0)}^{(x_1)} \varphi(x) F_p(x)\,dx \qquad (6)$$

übergeht. Das öfter angeführte Beispiel

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}, \quad F(x) = e^{-px}\cos qx$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \infty,$$

möge die eben angedeutete Auffassung der Integration eines continuirlichen Aggregates divergenter Functionen $F(x)\varphi(x)$ erläutern. Indem wir blos eine Differenz

$$\frac{e^{-px}\cos qx - e^{-rx}\cos sx}{x}$$

in's Auge fassen, erhalten wir wegen

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-px}\cos qx}{x}\,dx = -C - \frac{1}{2}l(p^2+q^2),$$

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-rx}\cos sx}{x}\,dx = -C - \frac{1}{2}l(r^2+s^2)$$

sogleich die bekannte Integralformel

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\cos qx - e^{-rx}\cos sx}{x}\,dx = \frac{1}{2}l\frac{r^2+s^2}{p^2+q^2}.$$

Es war nothwendig, gegenwärtig einige Resultate aus dem Folgenden zu anticipiren, um hiemit den beiden Grundsätzen von der Äquivalenz des Unendlichkleinen und Unendlichgrossen jenen Grad von Durchsichtigkeit und Festigkeit zu verleihen, ohne welche dieselben von keiner überzeugenden Wirkung auf die Folgenden sowohl als auf irgend welche rein analytischen Entwicklungen sein können.

Die Theorie der Fourier'schen Doppelintegrale fusst auf den Formeln

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Lim}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin\mu\vartheta}{\vartheta}F(\vartheta)\,d\vartheta&=0,\\ \operatorname{Lim}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin\mu\vartheta}{\vartheta}F(\vartheta)\,d\vartheta&=\frac{\pi}{2}F(0),\end{aligned}\right\}\mu=\infty$$

$$\beta>\alpha\geqq 0,$$

welche blos die unendliche Discontinuität der Function $F(\vartheta)$ zwischen α und β ausschliessen. Fragt man nach der Bedeutung des analogen Integrales mit dem Factor $\cos\mu\vartheta$, so ist die Antwort hierauf vermöge der Beziehung

$$2\cos\mu\vartheta\sin\vartheta=\sin(\mu+1)\vartheta-\sin(\mu-1)\vartheta$$

und bei der Willkürlichkeit des unendlich anwachsenden μ leicht zu geben; sie lautet

$$\operatorname{Lim}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\cos\mu\vartheta}{\vartheta}F(\vartheta)\,d\vartheta=0 \tag{1}$$

für alle reellen α und β sowohl, wie für irgend welche beliebige Functionen $F(\vartheta)$. Es ist jenes Integral gleich $a-a$, das Differential einer willkürlichen Function nach μ, daher auch im Falle $a=\infty$ für die gewöhnlichen Anwendungen geradezu und constant gleich Null. Wir werden dieses Resultat in der Form

$$\operatorname{Lim}2\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin^2\mu\vartheta}{\vartheta}F(\vartheta)\,d\vartheta=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{F(\vartheta)}{\vartheta}\,d\vartheta \tag{2}$$

den folgenden Betrachtungen zu Grunde legen. Bestätigungen der Gleichung (1) sind aus der grossen Zahl der bestimmten Integrale mit dem Factor $\cos b\vartheta$ für $b=\infty$ nach Belieben vorzunehmen, beispielweise sei

$$F(\vartheta)=e^{-a\vartheta},\quad \alpha=0,\quad \beta=\infty;$$

die bereits benützte, im Folgenden näher zu begründende Formel

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-a\vartheta}\cos b\vartheta}{\vartheta}\,d\vartheta=\int_0^{\infty}\frac{d\vartheta}{\vartheta}-C-\frac{1}{2}l(a^2+b^2)$$

geht für $b = \infty$ in

$$\int_0^\infty \frac{d\vartheta}{\vartheta} - C - \frac{1}{2} l(\infty^2) = 0$$

conform mit (1) über. Bezüglich der Formel der Einleitung

$$\int_0^\infty \frac{\cos b\vartheta}{a^2 - \vartheta^2} d\vartheta = \frac{\pi}{2a} \sin ab$$

wird später ausdrücklich bemerkt, dass sie nur für jedes endliche b Geltung behält.

Es handelt sich nun um die den Fourier'schen Integralen parallellaufenden Doppelintegrale

$$\int_0^\infty \cos xu\, du \int_a^b \sin uy\, \psi y\, dy \tag{3}$$

und

$$\int_0^\infty \sin xu\, du \int_a^b \cos uy\, \psi y\, dy,$$

deren Discussion zu nicht minder bedeutenden Resultaten führt, wie das Studium der Fourier'schen Integrale selbst. Vertauscht man in (3) die Producte $\cos xu \sin uy$ und $\sin xu \cos uy$ mit den Summen

$$\frac{1}{2} \left\{ \sin(y + x)u + \sin(y - x)u \right\}$$

und

$$\frac{1}{2} \left\{ \sin(y + x)u - \sin(y - x)u \right\},$$

so erhält man, wenn man sofort nach u integrirt

$$\int_0^\infty \cos xu\, du \int_a^b \sin uy\, \psi y\, dy =$$

$$\text{Lim} \int_a^b \left\{ \frac{\sin^2 \mu(x + y)}{(x + y)} + \frac{\sin^2 \mu(x - y)}{(x - y)} \right\} \psi y\, dy =$$

$$\mathrm{Lim}\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin^2\mu z}{z}\psi(z-x)\,dz+\mathrm{Lim}\int_{a-x}^{b-x}\frac{\sin^2\mu z}{z}\psi(z+x)\,dz,$$

$$\int_0^\infty \sin xu\,du\int_a^b \cos uy\,\psi y\,dy=$$

$$\mathrm{Lim}\int_a^b\left\{\frac{\sin^2\mu(x+y)}{(x+y)}-\frac{\sin^2\mu(x-y)}{x-y}\right\}\psi y\,dy=$$

$$\mathrm{Lim}\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin^2\mu z}{z}\psi(z-x)-\mathrm{Lim}\int_{a+x}^{b-x}\frac{\sin^2\mu x}{z}\psi(z+x)\,dz$$

und hat nur mehr die Formel (2) zu verwerthen, um als allgemeine Resultate die folgenden Transformationen zu gewinnen

$$\int_0^\infty \cos xu.\,du\int_a^b \sin uy\,\psi y\,dy=$$

$$\frac{1}{2}\int_{a+x}^{b+x}\frac{\psi(z-x)}{z}dz+\frac{1}{2}\int_{a-x}^{b-x}\frac{\psi(z+x)}{z}dz=\int_a^b\frac{y\,\psi y}{y^2-x^2}dy, \qquad (4)$$

$$\int_0^\infty \sin xu\,du\int_a^b \cos uy\,\psi y\,dy=$$

$$\frac{1}{2}\int_{a+x}^{b+x}\frac{\psi(z-x)}{z}dz-\frac{1}{2}\int_{a-x}^{b-x}\frac{\psi(z+x)}{z}dz=\int_a^b\frac{x\,\psi y}{x^2-y^2}dy.$$

Diese Gleichungen sowie die analogen Formeln für die Fourier'schen Doppelintegrale

$$\int_0^\infty \cos xu\,du\int_a^b \cos uy\,\psi y\,dy=$$

$$\int_0^\infty \sin xu\,du\int_a^b \sin uy\,\psi y\,dy=\frac{\pi}{2}\psi x \qquad (5)$$

mögen jetzt mit $\varphi x dx$ multiplicirt und von a bis b integrirt werden; es ist dies gleichbedeutend mit der Integration der vier Producte

$$\int_a^b \frac{\cos}{\sin} ux\,\varphi x\,dx \int_a^b \frac{\cos}{\sin} uy\,\psi y\,dy$$

nach u, somit

$$\int_0^\infty du \int_a^b \varphi x \cos ux\,dx \int_a^b \psi y \sin uy\,dy =$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b \varphi x\,dx \int_{a+x}^{b+x} \frac{\psi(z-x)}{z}\,dz + \frac{1}{2}\int \varphi x\,dx \int_{a-x}^{b-x} \frac{\psi(z+x)}{z}\,dz$$

$$= \int_a^b\int_a^b \frac{y\,\varphi x\psi y}{y^2-x^2}\,dx dy, \tag{6}$$

$$\int_0^\infty du \int_a^b \varphi x \sin ux\,dx \int_a^b \psi y \cos uy\,dy =$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b \varphi x\,dx \int_{a+x}^{b+x} \frac{\psi(z-x)}{z}\,dz - \frac{1}{2}\int_a^b \varphi x dx \int_{a-x}^{b-x} \frac{\psi(z+x)}{z}\,dz$$

$$= \int_a^b\int_a^b \frac{x\varphi x\psi y}{x^2-y^2}\,dx\,dy\,;$$

$$\int_0^\infty du \int_a^b \varphi x \cos ux\,dx \int_a^b \psi y \cos uy\,dy =$$

$$\int_0^\infty du \int_a^b \varphi x \sin ux\,dx \int_a^b \psi y \sin uy\,dy = \frac{\pi}{2}\int_a^b \varphi z\,\psi z\,dz. \tag{7}$$

Bemerkenswerth ist zunächst in (6) und (7) der Fall $\varphi = \psi$; die genannten Gleichungen gehen theilweise in einander über und lauten

$$\int_0^\infty du \int_a^b \varphi x \cos ux\, dx \int_a^b \varphi y \sin uy\, dy =$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b \varphi x\, dx \int_{a+x}^{b+x} \frac{\varphi(z-x)}{z} dz = \int_a^b\int_a^b \frac{y\varphi x\varphi y}{y^2-x^2} dx dy$$

$$= \int_a^b\int_a^b \frac{x\varphi x\varphi y}{x^2-y^2} dx dy = \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b \frac{\varphi x\varphi y}{x+y} dx dy, \qquad (8)$$

$$\int_a^b \varphi x dx \int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(z+x)}{z} dz = \int_a^b\int_a^b \frac{\varphi x\varphi y}{x-y} dx dy = 0,$$

$$\int_0^\infty du \left[\int_a^b \varphi x \cos ux\, dx\right]^2 = \int_0^\infty du \left[\int_a^b \varphi x \sin ux\, dx\right]^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_a^b [\varphi z]^2 dz. \qquad (9)$$

Schliesslich erwähnen wir des speciellen Falles $x = 0$ in den Integralen (4) und (5); es ist

$$\int_0^\infty du \int_a^b \sin uy \psi y\, dy = \int_a^b \frac{\psi y}{y} dy \qquad (10)$$

und

$$\int_0^\infty du \int_a^b \cos uy\psi y dy = 0, \quad \int_0^\infty du \int_0^b \cos uy\psi y dy = \frac{\pi}{2}\psi 0.$$

Einer allgemeinen Regel gemäss sind auch die einfachsten Specialisirungen des gegenwärtigen Formelsystems zugleich die wichtigsten und anregendsten, indem sie die nothwendige und befriedigende Übersichtlichkeit bei der Aufstellung neuer Begriffe und Symbole gewähren. Demzufolge wählen wir für die Gleichungen (4), (6) und (8) statt φ und ψ die Exponentielle $e^{-(a+ib)z}$ und die Potenz $z^{\mu-1}$; in (9) substituiren wir die zusammengesetzte Function $\varphi = \psi = e^{-(a+ib)z} z^{\mu-1} (lz)^n$. In wenigen Worten

zusammengefasst, läuft die ganze Untersuchung in beiden Fällen hinaus auf eine Discussion der genannten Functionen, bezogen auf das Argument $a+i(b\pm u)$, nach den zwei entgegengesetzten Richtungen: Integration dieser Functionen in unendlichen Reihen und endlichen bestimmten Ausdrücken in a, b, μ und n.

I. Ableitung des complexen Integrallogarithmus.

Im Falle $\psi = e^{-(a+ib)z}$, $a > 0$ lassen die Doppelintegrale linker Hand von (4) eine erste Integration zu; bezeichnet man dieselben kurz mit A und B, so ist

$$2A = i(a-ib)\int_0^\infty \left\{\frac{1}{(u+b)^2+a^2} - \frac{1}{(u-b^2)+a^2}\right\}\cos xu\,du$$

$$+\int_0^\infty u\left\{\frac{1}{(u+b)^2+a^2} + \frac{1}{(u-b)^2+a^2}\right\}\cos xu\,du\,,$$

$$2B = (a-ib)\int_0^\infty \left\{\frac{1}{(u+b)^2+a^2} + \frac{1}{(u-b)^2+a^2}\right\}\sin xu\,du$$

$$-\,i\int^\infty u\left\{\frac{1}{(u+b)^2+a^2} - \frac{1}{(u-b)^2+a^2}\right\}\sin xu\,du.$$

Rechter Hand von (4) erhält man hiezu, ohne vorläufig weiter vereinfachen zu können, folgende Ergänzungen

$$A = \frac{1}{2}\left\{e^{+(a+ib)x}\int_x^\infty \frac{e^{-(a+ib)\xi}}{\xi}\,d\xi + e^{-(a+ib)x}\int_{-x}^\infty \frac{e^{-(a+ib)\xi}}{\xi}\,d\xi\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{e^{+(a+ib)x}\,li\left(e^{-\overline{a+ib}x}\right) + e^{-(a+ib)x}\,li\left(e^{+\overline{a+ib}x}\right)\right\}$$

$$= \int_0^\infty \frac{ye^{-ay}\cos by}{y^2-x^2}\,dy - i\int_0^\infty \frac{ye^{-ay}\sin by}{y^2-x^2}\,dy \qquad (12)$$

$$B=\frac{1}{2}\left\{e^{+(a+ib)x}\int_x^\infty\frac{e^{-(a+ib)\xi}}{\xi}d\xi-e^{-(a+ib)x}\int_{-x}^\infty\frac{e^{-(a+ib)\xi}}{\xi}d\xi\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{e^{+(a+ib)x}\,li\left(e^{-\overline{a+ibx}}\right)-e^{-(a+ib)x}\,li\left(e^{+\overline{(a+ib)x}}\right)\right\}$$

$$=\int_0^\infty\frac{xe^{-ay}\cos by}{x^2-y^2}dy-i\int_0^\infty\frac{xe^{-ay}\sin by}{x^2-y^2}dy.$$

Ehe wir hierin zur Entwicklung von Reihen für die Function

$$li\left(e^{-\overline{a+ibx}}\right)=-\int_x^\infty\frac{e^{-(a+ib)\xi}}{\xi}d\xi$$

übergehen, suchen wir die Frage nach den Grenzen der Giltigkeit speciell für den Fall $a=0$ zu beantworten. Wir gehen zu diesem Zwecke nochmals auf die Doppelintegrale (4) zurück; sie gewinnen jetzt die Gestalt

$$\int_0^\infty\cos xu\,du\int_0^\infty\sin uy(\cos by-i\sin by)\,dy=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\cos xu\,du\int_0^\infty\left\{\sin(u+b)y+\sin(u-b)y\right.$$

$$\left.+i\cos(u+b)y-i\cos(u-b)y\right\}dy$$

$$=\mathrm{Lim}\int_0^\infty\cos xu\,du\left\{\frac{\sin^2\mu(u+b)}{(u+b)}+\frac{\sin^2\mu(u-b)}{(u-b)}\right.$$

$$\left.+i\frac{\sin\mu(u+b)}{2(u+b)}-i\frac{\sin\mu(u-b)}{2(u-b)}\right\}$$

$$=\mathrm{Lim}\int_b^\infty\cos x(b-t)\left\{\frac{\sin^2\mu t}{t}+i\frac{\sin\mu t}{2t}\right\}dt$$

$$+\mathrm{Lim}\int_{-b}^\infty\cos x(b+t)\left\{\frac{\sin^2\mu t}{t}-i\frac{\sin\mu t}{2t}\right\}dt$$

$$\int_0^\infty \sin xu du \int_0^\infty \cos uy\ (\cos by - i \sin by)\, dy =$$

$$\mathrm{Lim}\int_b^\infty \sin x\ (b-t) \left\{ -\frac{\sin \mu t}{2t} + i\frac{\sin^2 \mu t}{t} \right\} dt$$

$$+ \mathrm{Lim}\int_{-b}^\infty \sin x\,(b+t) \left\{ \frac{\sin \mu t}{2t} + i\frac{\sin^2 \mu t}{t} \right\} dt,$$

und lassen sich nach diesen Umformungen mittelst der bekannten Grenzgleichungen leicht endgiltig bestimmen; mit Rücksicht auf die übrigen Theile der Gleichungen (4) ergeben sich die folgenden Reductionen.

$$\int_0^\infty \frac{y \cos by}{y^2 - x^2}\, dy = \int_0^\infty \frac{u \cos xu}{u^2 - b^2}\, du =$$

$$\cos bx \int_x^\infty \frac{\cos bz}{z}\, dz - \sin bx \int_0^x \frac{\sin bz}{z}\, dz, \tag{13}$$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin by}{x^2 - y^2}\, dy = \int_0^\infty \frac{b \sin xu}{b^2 - u^2}\, du =$$

$$-\cos bx \int_0^x \frac{\sin bz}{z}\, dz - \sin bx \int_x^\infty \frac{\cos bz}{z}\, dz,$$

$$\int_0^\infty \frac{y \sin by}{y^2 - x^2}\, dy = \cos bx \int_0^\infty \frac{\sin bz}{z}\, dz = \frac{\pi}{2} \cos bx,$$

$$\int_0^\infty \frac{x \cos by}{x^2 - y^2}\, dy = \sin bx \int_0^\infty \frac{\sin bz}{z}\, dz = \frac{\pi}{2} \sin bx.$$

Aus den beiden ersten Formeln ergibt sich unter anderm die Vertauschbarkeit der Constanten b und x und hiemit

$$\int_x^\infty \frac{\cos bz}{z}\,dz = \int_b^\infty \frac{\cos xz}{z}\,dz\,,$$

$$\int_0^x \frac{\sin bz}{z}\,dz = \int_0^b \frac{\sin xz}{z}\,dz$$

ein Resultat, welches im zweiten Theile durch Substitution der Sinusreihe leicht zu bestätigen ist. Die beiden letzten Formeln liefern auch die Fourier'schen Integrale ohne die weitere Bestätigung durch die Anwendung des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\sin bz}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}\,.$$

Wir kommen später auf die Eingangs angeführten Grenzgleichungen und die damit coincidirende Verwendung oscillirender Integrale noch einmal zurück.

Um nun für die Reihenentwicklung des complexen Integrallogarithmus einen Ausgangspunkt zu gewinnen, wenden wir uns zur ersten der Gleichungen (10), in welche die Formeln (11) und (12) oder die folgenden mit ihnen identischen

$$2\int_0^\infty \frac{ye^{-ay}\cos by}{y^2-x^2}\,dy = \int_0^\infty \cos xu \left\{\frac{u+b}{(u+b)^2+a^2} + \frac{u-b}{(u-b)^2+a^2}\right\} du, \quad (14)$$

$$2\int_0^\infty \frac{ye^{-ay}\sin by}{y^2-x^2}\,dy = -a\int_0^\infty \cos xu \left\{\frac{1}{(u+b)^2+a^2} - \frac{1}{(u-b)^2+a^2}\right\} du\,, \quad (15)$$

$$2\int_0^\infty \frac{xe^{-ay}\cos by}{x^2-y^2}\,dy = a\int_0^\infty \sin xu \left\{\frac{1}{(u+b)^2+a^2} + \frac{1}{(u-b)^6+a^2}\right\} du\,,$$

$$2\int_0^\infty \frac{xe^{-ay}\sin by}{x^2-y^2}\,dy = -\int_0^\infty \sin xu \left\{\frac{u+b}{(u+b)^2+a^2} - \frac{u-b}{(u-b)^2+a^2}\right\} du$$

für $x = 0$ übergehen; d. h. wir ermitteln die Grenzfälle

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay}\cos by}{y}\,dy \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{e^{-ay}\sin by}{y}\,dy.$$

Es kommt dies auf die ausserordentlich leichten Bestimmungen

$$\int_0^\infty \frac{u \pm b}{(u \pm b)^2 + a^2}\,du \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{a}{(u \pm b)^2 + a^2}\,du$$

zurück, für deren erste wir noch den Satz von der Äquivalenz formgleicher divergirender Ausdrücke zu Hilfe zu nehmen haben.

Es ist nämlich

$$\int_0^\infty \frac{u \pm b}{(u \pm b)^2 + a^2}\,du = \int_{\pm b}^\infty \frac{z}{z^2 + a^2}\,dz,$$

folglich die Summe in (14)

$$\int_0^\infty \frac{z}{z^2 + a^2}\,dz + \int_{-b}^\infty \frac{z}{z^2 + a^2}\,dz$$

oder

$$\int_{-b}^{+b} \frac{z}{z^2 + a^2}\,dz + 2\int_b^\infty \frac{z}{z^2 + a^2}\,dz,$$

worin jetzt das Integral zwischen $-b$ und $+b$ verschwindet. Für das Cosinusintegral bleibt demgemäss

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay}\cos by}{y}\,dy = \int_b^\infty \frac{z\,dz}{z^2 + a^2} = \int_{\sqrt{b^2+a^2}}^\infty \frac{dz}{z}$$

und hiemit

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay}\cos by}{y}\,dy = l\,\infty - \frac{1}{2}\,l\,(a^2 + b^2). \tag{16}$$

Behufs einer Reduction des divergirenden Integrals auf einen Modul haben wir nur die Gleichung

$$l\,\infty = \int_0^\infty \frac{dz}{z} - C$$

zu benützen, womit wir nichts weiter erreichen, als alle logarithmisch divergirenden Integrale auf ein Normalintegral zurückzuführen. Lässt sich die vorstehende Gleichung auf irgend eine Weise bestätigen, so ist damit zugleich die bekannte Grenzbestimmung

$$\operatorname{Lim}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{n}-ln\right\}=C$$

auf ihre einzig giltige, fehlerfreie Form

$$\operatorname{Lim}\left\{\int_0^z \frac{dz}{z}-lz\right\}=C,\quad \operatorname{Lim} z=\infty \tag{17}$$

gebracht, in welcher bestimmte Operationen, nicht allgemeine Typen mehr vorkommen. Die Bestätigung unserer Grenzgleichung liegt in der bekannten Formel der Lehre von den Gammafunctionen

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\right\}dx;$$

für $\mu=1$ geht dieselbe in

$$-C=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx-\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx=$$

$$=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx-\int_0^\infty \frac{dx}{x}$$

über, welches mit Gleichung (16) unter der Bedingung (17) übereinstimmt. Sonach ist allgemein

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay}\cos by}{y}dy=\int_0^\infty \frac{dy}{y}-C-\frac{1}{2}l(a^2+b^2)=\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^\infty \frac{dy}{y} \tag{18}$$

und $-C-\frac{1}{2}l(a^2+b^2)$ der Hauptwerth der links und rechts stehenden Integrale, wenn $\int_0^\infty \frac{dy}{y}$ als Modul derselben angesehen wird.

Man kann noch zu einem anderen Ausdrucke für das Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay}\cos by}{y}\,dy$$

gelangen, wenn man in (14) die Summanden

$$\int_0^\infty \frac{u+b}{(u+b)^2+a^2}\,du + \int_0^\infty \frac{u-b}{(u-b)^2+a^2}\,du$$

zu

$$2\int_0^\infty \frac{u^3+u(a^2-b^2)}{u^4+2u^2(a^2-b^2)+(a^2+b^2)^2}\,du = J$$

vereinigt. Die Substiution

$$u^4+2u^2(a^2-b^2)+(a^2+b^2)^2 = z^4$$

führt auf den vorigen Ausdruck; entwickelt man aber den reciproken Werth des Nenners in eine Reihe nach Potenzen von u^2, und trennt hiebei das Intervall von 0 bis ∞, in 0 bis

$$\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{a^2+b^2}$$

bis ∞, weil jene Reihe für

$$u < +\sqrt{a^2+b^2}$$

convergirt, so erhält man für J, wenn R die Reihe vertritt,

$$J = \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} 2\left\{\frac{u^4+2u(a^2-b^2)+(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}\right\} R\,\frac{du}{u} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} 2\,\frac{du}{u},$$

demnach

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay}\cos by}{y}\,dy = \int_{\sqrt{a^2+b^2}}^\infty \frac{dy}{y} = \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{dy}{y}. \quad (18\text{b}) = (18)$$

Es ist über die gewählte Form der Äquivalenz divergenter Integrale eine Bemerkung nachzutragen. Strenge genommen sind

alle derartigen Resultate nur in der Form $\{\infty' - \infty''\} = C$ richtig und von Bedeutung; besteht eine zweite Äquivalenz $\{\infty_1 - \infty_2\} = D$, so kann eine Addition der beiden Gleichungen nur in der genauen Präcision

$$\{\infty' - \infty''\} + \{\infty_1 - \infty_2\} = C + D$$

vorgenommen werden. So wäre z. B. eine Verbindung der beiden Formeln

$$\int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{du}{u} = \int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\infty} \frac{du}{u}$$

$$\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\infty} \frac{du}{u} = \int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\infty} \frac{du}{u}$$

zu

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{u} = 2\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\infty} \frac{du}{u} = 2\int_c^{\infty} \frac{du}{u}$$

durchaus fehlerhaft und unstatthaft. Die Subtraction zweier Ausdrücke $\infty - \infty$ ist dagegen in der Weise erlaubt, dass

$$\{\infty' - \infty''\} - \{\infty_1 - \infty_2\} = \{\infty' - \infty_1\} - \{\infty'' - \infty_2\}$$

gesetzt werden darf. In diesem Sinne findet nun auch die Frage nach der Berechtigung der Relation (6) der Einleitung

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\, \Sigma_0[f_p(x)]\, dx = \Sigma_0 \int_{(x_0)}^{(x_1)} \varphi(x) f_p(x) dx$$

ihre Erledigung.

Als Specialisirungen der Formel (18) sind die Hauptwerthsformeln des Integrallogarithmus und Integralcosinus zu erwähnen, nämlich

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-ay}}{y}\, dy = -C - la, \quad a > 0$$

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{\cos by}{y}\, dy = -C - \frac{1}{2} l(b^2), \quad -\infty \leqq b \leqq +\infty.$$

Es bleibt noch die Bestimmung des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay}\sin by}{y}\,dy$$

übrig. Gleichung (15) oder

$$2\int_0^\infty \frac{e^{-ay}\sin by}{y}\,dy = -a\int_0^\infty \left\{\frac{1}{(u+b)^2+a^2} - \frac{1}{(u-b)^2+a^2}\right\} du$$

$$= -a\left\{\int_b^\infty \frac{dz}{a^2+z^2} - \int_{-b}^\infty \frac{dz}{a^2+z^2}\right\} = +a\int_{-b}^{+b} \frac{dz}{a^2+z^2}$$

$$= 2a\int_0^b \frac{dz}{a^2+z^2} = 2\operatorname{arc\,tan}\frac{b}{a}$$

enthält die bekannte Bestimmung in der Form der Reduction eines transcendenten Differentiales auf ein algebraisch - rationales. Verbindet man das letztere Resultat

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay}\sin by}{y}\,dy = \operatorname{arc\,tan}\frac{b}{a}, \quad a \geqq 0, \quad -\infty \leqq b \leqq +\infty, \tag{19}$$

$$a^2 + b^2 > 0$$

mit dem correlativen, unter den gleichen Bedingungen giltigen

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-ay}\cos by}{y}\,dy = -C - \frac{1}{2}\,l(a^2+b^2),$$

so erhält man den Hauptwerth des complexen Integrallogarithmus

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-(a+ib)y}}{y}\,dy = -C - l(a+ib), \tag{20}$$

wobei die Verbindung einer reellen Hauptwerthsformel mit einem imaginären endlichen Integrale selbstverständlich keine Bedenklichkeit erwecken kann.

Um die Bestimmung des Hauptwerths des complexen Integrallogarithmus zur Ermittelung einer convergirenden Potenzreihe verwenden zu können, bedarf man noch einer weiteren Beziehung des Logarithmus zum Modul $\int_0^\infty \frac{dz}{z}$, die der Grenzgleichung

$$\operatorname{Lim}\left\{\int_0^z \frac{dz}{z} - lz\right\} = C, \quad z = \infty$$

gewissermassen parallel läuft. Wir meinen die Formel

$$\operatorname{Lim}\left\{\int_z^\infty \frac{dz}{z} + lz\right\} = 0, \quad z = 0, \tag{21}$$

deren Beweis aus der Potenzreihe für den natürlichen Logarithmus $l(1-x)$ nicht vollkommen überzeugend ist. Viel besser benützt man die Entwicklung von

$$li(e^{-ax}) = -\int_x^\infty \frac{e^{-a\xi}}{\xi}\, d\xi$$

für $\operatorname{Lim} x = dx$. Es ist einerseits

$$li(e^{-ax}) = C + lax - \frac{1}{1}\cdot\frac{ax}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2x^2}{2!} - \ldots,$$

$$li(e^{-adx}) = C + la + ldx,$$

anderseits nach (18)

$$li(e^{-adx}) = -\int_{dx}^\infty \frac{e^{-a\xi}}{\xi}\, d\xi = C + la - \int_{dx}^\infty \frac{d\xi}{\xi},$$

woraus die obige Bestimmung sofort hervorgeht.

Die Nothwendigkeit der Annahme einer Grenzformel (21) liegt nun ausgesprochen in der unmittelbar evidenten Zerlegung

$$li(e^{-ax}\cos bx) = -\int_x^\infty \frac{e^{-a\xi}\cos b\xi}{\xi}\, d\xi$$

$$= -\int_0^\infty \frac{e^{-a\xi}\cos b\xi}{\xi}\, d\xi + \int_0^x \frac{e^{-a\xi}\cos b\xi}{\xi}\, d\xi,$$

worin

$$\frac{e^{-a\xi}\cos b\xi}{\xi} \text{ für } \int_0^x \frac{e^{-a\xi}\cos b\xi}{\xi}\,d\xi$$

durch die Reihe

$$\frac{1}{\xi}\left(1+\frac{c\xi\cos\vartheta}{1}+\frac{c^2\xi^2\cos 2\vartheta}{2!}+\frac{c^3\xi^3\cos 3\vartheta}{3!}+\ldots\ldots\right),$$

$$c^2 = a^2+b^2, \quad \vartheta = \operatorname{arc\,tan}\frac{b}{a}$$

ersetzt werden möge. Die unbestimmte Integration der letzteren liefert

$$l\xi+\frac{1}{1}\cdot\frac{c\xi\cos\vartheta}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2\xi^2\cos 2\vartheta}{2!}+\frac{1}{3}\cdot\frac{c^3\xi^3\cos 3\vartheta}{3!}+\ldots$$

also für Lim $\xi = dx$ den Logarithmus des indepedent Unendlichkleinen. Derselbe tilgt sich mit dem Ausdrucke $\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi}$, dem Modul von $\int_0^\infty \frac{e^{-a\xi}\cos b\xi}{\xi}\,d\xi$ zu Null, so dass schliesslich als Entwicklung des allgemeineren Integrallogarithmus mit zwei Constanten übrig bleibt

$$li\,(e^{-ax}\cos bx) = -\int_x^\infty \frac{e^{-a\xi}\cos b\xi}{\xi}\,d\xi \tag{22}$$

$$= C+\frac{1}{2}l(cx)^2+\frac{1}{1}\cdot\frac{cx\cos\vartheta}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2x^2\cos 2\vartheta}{2!}+\frac{1}{3}\cdot\frac{c^3x^3\cos 3\vartheta}{3!}+\ldots,$$

$$c^2 = a^2+b^2, \quad \vartheta = \operatorname{arc\,tan}\frac{b}{a}, \quad a \geqq 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Die Giltigkeit dieser Entwicklung auch für negative Werthe von x erhellt aus der Zerlegung

$$-\int_{-x}^\infty \frac{e^{-a\xi}\cos b\xi}{\xi}\,d\xi = \int_0^x \frac{e^{+a\xi}-e^{-a\xi}}{\xi}\cos b\xi\,d\xi - \int_x^\infty \frac{e^{-a\xi}\cos b\xi}{\xi}\,d\xi$$

deren erster Theil leicht integrirbar, deren zweiter Theil bekannt ist.

Schneller ergibt sich die Reihe für den Integralbogen

$$\operatorname{arc} i(e^{-ax}\sin bx) = -\int_x^\infty \frac{e^{-a\xi}\sin b\xi}{\xi}\,d\xi\,;$$

wegen

$$-\int_x^\infty \frac{e^{-a\xi}\sin b\xi}{\xi}\,d\xi = -\int_0^\infty \frac{e^{-a\xi}\sin b\xi}{\xi}\,d\xi + \int_0^x \frac{e^{-a\xi}\sin b\xi}{\xi}\,d\xi$$

$$= -\vartheta + \int_0^x \frac{e^{-a\xi}\sin b\xi}{\xi}$$

und

$$\frac{e^{-a\xi}\sin b\xi}{\xi} = \frac{1}{\xi}\left(\frac{c\xi\sin\vartheta}{1} + \frac{c^2\xi^2\sin 2\vartheta}{2!} + \frac{c^3\xi^3\sin 3\vartheta}{3!} + \ldots\right)$$

hat man sogleich

$$\operatorname{arc} i(e^{-ax}\sin bx) = -\int_x^\infty \frac{e^{-a\xi}\sin b\xi}{\xi}\,d\xi \tag{23}$$

$$= -\vartheta + \frac{1}{1}\cdot\frac{cx\sin\vartheta}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2x^2\sin 2\vartheta}{2!} + \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3x^3\sin 3\vartheta}{3!} + \ldots,$$

eine Formel, die in derselben Weise wie vorhin auf negative x ausgedehnt werden darf.

Aus den Entwicklungen (22) und (23) resultirt die Entwicklung des complexen Integrallogarithmus und zwar ist

$$li\,(e^{-\overline{a+ib}x}) = -\int_x^\infty \frac{e^{-\overline{a+ib}\xi}}{\xi}\,d\xi$$

$$= C + \frac{1}{2}l\left\{(a+ib)x\right\}^2 - \frac{1}{1}\frac{(a+ib)x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(a+ib)^2x^2}{2!} -$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{(a+ib)^3x^3}{3!} + \ldots,\quad a \geqq 0,\quad b \gtreqless 0,\quad x \gtreqless 0\,;$$

$$a^2 + b^2 > 0\,;$$

in anderer Form

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-\overline{a+ib}\xi}}{\xi} d\xi - \int_{x}^{\infty} \frac{e^{-\overline{a+ib}\xi}}{\xi} d\xi = \int_{(0)}^{(x)} \frac{e^{-(a+ib)\xi}}{\xi} d\xi$$

$$= \frac{1}{2} l(x^2) - \frac{1}{1} \cdot \frac{(a+ib)x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+ib)^2 x^2}{2!} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(a+ib)^3 x^3}{3!} + \cdots$$

Diese letzteren Formeln sind zunächst für die Gleichungen (11) und (12) von Bedeutung. Sie zeigen, dass die Integrale

$$\int_0^\infty \cos, \ \sin xu \frac{a+bu}{A \pm 2Bu + u^2} du$$

$$\int_0^\infty \frac{\alpha x - \beta y}{x^2 - y^2} e^{-ay} \cos, \ \sin by \, dy$$

gemäss (11) und (12) stets in unendliche, convergirende Reihen verwandelt und als solche berechnet werden können. Wir begnügen uns mit dieser Andeutung, ohne das Detail zu verfolgen und gehen auf die Gleichungen (6) über, in welchen wir

$$\psi y = e^{-(a+ib)y}$$

belassen, für φx aber die Function $x^{\mu-1}$ substituiren.

Die Formeln, welche hiebei zur Anwendung kommen, sind

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\mu-1} \cos ux \, dx &= \frac{\Gamma(\mu) \cos \frac{1}{2}\mu\pi}{u^\mu}, \\ \int_0^\infty x^{\mu-1} \sin ux \, dx &= \frac{\Gamma(\mu) \sin \frac{1}{2}\mu\pi}{u^\mu}; \end{aligned}\right\} 0 \leqq \mu < 1,$$

der Fall $\mu = 0$ gibt hier einerseits die Äquivalenz

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ux}}{x} dx - \int_0^\infty \frac{\cos ux}{x} dx = 0,$$

anderseits wegen

$$\operatorname{Lim} D\left\{\frac{1}{\Gamma(\mu)}\right\}_{\mu=0} = \frac{\int_0^1 \frac{dt}{t} + C}{\int_0^\infty \frac{dt}{t} - C} = \frac{\int_0^\infty \frac{dt}{t}}{\int_0^\infty \frac{dt}{t} - C} = 1 \quad \text{(s. Formel (18b)}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ux}{x}\, dx \doteq \frac{\pi}{2}.$$

Der Fall $\mu = 1$ ist von Bedeutung, wenn es sich um wiederholte Integrationen handelt, wie im vorliegenden Beispiele; es zeigt sich dabei, dass die Geltung der Cosinusformel bis $\mu=2$ ausgedehnt werden darf. Nach diesen Bemerkungen gehen wir daran, die Formeln

$$2\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{yx^{\mu-1}\, e^{-(a+i)by}}{y^2 - x^2}\, dx\, dy = 2A =$$

$$-\int_0^\infty x^{\mu-1}\left\{e^{-(a+ib)x}\, li\left(e^{+\overline{a+ibx}}\right) + e^{+(a+ib)x}\, li\left(e^{-\overline{a+ibx}}\right)\right\} dx \quad (24)$$

$$= \Gamma(\mu)\cos\tfrac{1}{2}\mu\pi\left[\int_0^\infty\left\{\frac{1}{(u+b)^2+a^2} + \frac{1}{(u-b)^2+a^2}\right\}\frac{du}{u^{\mu-1}}\right.$$

$$\left. + i(a-ib)\int_0^\infty\left\{\frac{1}{(u+b)^2+a^2} - \frac{1}{(u-b)^2+a^2}\right\}\frac{du}{u^\mu}\right],$$

$$2\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^\mu\, e^{-(a+ib)y}}{x^2 - y^2}\, dx\, dy = 2B =$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\left\{e^{-(a+ib)x}\, li\left(e^{+\overline{a+ibx}}\right) - e^{+(a+ib)x}\, li\left(e^{-\overline{a+ibx}}\right)\right\} dx \quad (25)$$

$$= \Gamma(\mu)\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi\left[\int_0^\infty (a-ib)\left\{\frac{1}{(u+b)^2+a^2} + \frac{1}{(u-b)^2+a^2}\right\}\frac{du}{u^\mu}\right.$$

$$\left. - i\int_0^\infty\left\{\frac{1}{(u+b)^2+a^2} - \frac{1}{(u-b)^2+a^2}\right\}\frac{du}{u^{\mu-1}}\right]$$

auf ihre einfachste Gestalt zurückzuführen. Sie lassen sich vollkommen integriren. Die Formel der Einleitung

$$\int_0^\infty \frac{z^{\mu-1}}{1-z^\nu}\,dz = \frac{\pi}{\nu}\cot\frac{\mu}{\nu}\pi, \quad \mu < \nu$$

liefert die Werthe der linksseitigen Integrale

$$A = \frac{\pi}{2}\cot\frac{\mu\pi}{2}\cdot\frac{\Gamma(\mu)}{(a+ib)^\mu}, \quad \mu < 2,$$

$$B = \frac{\pi}{2}\tan\frac{\mu\pi}{2}\cdot\frac{\Gamma(\mu)}{(a+ib)^\mu}, \quad \mu < 1,$$

in den rechtsseitigen irrationalen Integralen aber eine Bestätigung unserer Bestimmung des discontinuirlichen Integrales (23), indem wir nach einigen Vereinfachungen die bekannte Formel

$$\int_0^\infty \frac{u^\lambda\,du}{(u \pm b)^2 + a^2} = \pi.\frac{\sin\lambda\left(\frac{\pi}{2} \mp \vartheta\right)}{\sin\lambda\pi}\cdot\frac{(a^2+b^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{a}, \quad \vartheta = \arctan\frac{b}{a}$$

oder

$$\int_0^\infty \frac{u^\lambda\,du}{\rho^2+2u\rho\cos\sigma+u^2} = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi}\cdot\frac{\sin\lambda\sigma}{\sin\sigma}\rho^{\lambda-1}, \quad -1<\lambda<+1$$

erhalten. Wir verbinden noch die mittleren Ausdrücke in (24) und (25) durch Addition und Subtraction; es entspringen hieraus die Werthbestimmungen

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-(a+ib)x}\,li\left(e^{+\overline{a+ib}x}\right)dx \tag{26}$$

$$= -\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}e^{-(a+ib)\xi}}{\xi - x}\,d\xi\,dx$$

$$= -\pi\cot\mu\pi\,\frac{\Gamma(\mu)}{(a+ib)^\mu}, \quad 0<\mu<1,$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\, e^{+(a+ib)x}\, li\left(e^{-\overline{a+ibx}}\right) dx\,. \tag{27}$$

$$= -\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\, e^{-(a+ib)\xi}}{\xi + x}\, d\xi\, dx =$$

$$= -\,\pi\, csc\,\mu\pi\, \frac{\Gamma(\mu)}{(a+ib)^\mu}\,, \quad 0 < \mu < 1\,.$$

Gleichung (26) lässt sich linker Hand mittelst der Entwicklung des Integrallogarithmus integriren und führt derart auf eine Reihe für $\pi \cot \mu\pi$; es ist

$$\pi \cot \mu\pi = -\left\{C + \frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu} + \frac{1}{1}\cdot\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\mu+2)}{2\Gamma(\mu)} + \ldots\right\}$$

$$0 \leqq \mu \leqq 1.$$

Diesen allgemeinen Ergebnissen reihen sich einige speciellere zwanglos an.

Die Gleichung (24) lautet für $\mu = 1$

$$\int_0^\infty \left\{e^{-(a+ib)x}\, li\left(e^{+\overline{a+ibx}}\right) + e^{+(a+ib)x}\, li\left(e^{-\overline{a+ibx}}\right)\right\} dx = 0,$$

Gleichung (25) für $\mu = 0$

$$\int_0^\infty \left\{e^{-(a+ib)x}\, li\left(e^{+\overline{a+ibx}}\right) - e^{+(a+ib)x}\, li\left(e^{-\overline{a+ibx}}\right)\right\} \frac{dx}{x}$$

$$= 2\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-(a+ib)\xi}}{x^2 - \xi^2}\, d\xi dx = 2\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a\xi}\cos b\xi}{x^2 - \xi^2}\, d\xi dx = \frac{\pi^2}{2}\,,$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a\xi}\sin b\xi}{x^2 - \xi^2}\, d\xi dx = 0\,.$$

In (26) und (27) nehmen wir $\mu = \frac{1}{2}$ und erhalten

$$\int_0^\infty e^{-(a+ib)x^2}\, li\left(e^{+\overline{a+ib}x^2}\right) dx = 0,$$

$$\int_0^\infty e^{+(a+ib)x^2}\, li\left(e^{-\overline{a+ib}x^2}\right) dx = -\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a+ib}};$$

die erstere Formel ist durch directe Integration leicht zu bestätigen.

Die Möglichkeit, Discontinuitätsformeln bei mehrfachen Integrationen zugleich mit beliebiger Reihenfolge dieser letzteren anzuwenden, ist stets an nicht zu übersehende Bedingungen gebunden. Die Limite der ersten Integration nach x in

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-a\xi} \cos b\xi}{x^2 - \xi^2}\, d\xi dx$$

gibt mit der zweiten Integration von

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a\xi} \cos b\xi}{\xi}$$

immer noch eine endliche Grösse.

Wenden wir uns nunmehr, um die Formelkette, welche für den Integrallogarithmus aus den Analogien der Fourier'schen Integrale ableitbar ist, zu schliessen, zu den Gleichungen (8), so haben wir auch hier sehr wenige Schritte nothwendig um zu unserem Ziele zu gelangen. Die dreifachen Integrale sind für

$$\varphi = \psi = e^{-(a+ib)z}, \quad a > 0$$

sämmtlich ausführbar und liefern zunächst nach zwei Integrationen für

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-(a+ib)\,(x+y)}}{x+y}\, dx\, dy$$

$$= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{y e^{-(a+ib)\,(x+y)}}{y^2 - x^2}\, dx\, dy = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x e^{-(a+ib)\,(x+y)}}{x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

den halben Werth des Integrals

$$\int_0^\infty \left[\frac{i(a-ib)^2 - iu^2 + 2(a-ib)u}{\{(u+b)^2+a^2\}^2}\right.$$

$$\left. - \frac{i(a-ib)^2 - iu^2 - 2(a-ib)u}{\{(u-b)^2+a^2\}^2}\right] du = J.$$

Hierin sind

$$i(a-ib)^2 - iu^2 + 2(a-ib)u$$

und

$$i(a-ib)^2 - iu^2 - 2(a-ib)u$$

vollständige Quadrate, jenes von

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a+b+u+i(a-b-u)\right\},$$

dieses von

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a+b-u+i(a-b+u)\right\};$$

setzt man $u+b$, sowie $u-b$ gleich z, so wird jenes Integral J

$$J = \frac{1}{2}\int_b^\infty \left(\frac{a+z+i(a-z)}{a^2+z^2}\right)^2 dz$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-b}^\infty \left(\frac{a-z+i(a+z)}{a^2+z^2}\right)^2 dz =$$

$$2\int_b^\infty \frac{az\,dz}{(a^2+z^2)^2} + 2\int_{-b}^\infty \frac{az\,dz}{(a^2+z^2)^2}$$

$$+ i\left\{\int_b^\infty \frac{a^2-z^2}{(a^2+z^2)^2}\,dz - \int_{-b}^\infty \frac{a^2-z^2}{(a^2+z^2)^2}\,dz\right\}$$

$$= 2\frac{a}{a^2+b^2} - 2i\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{2}{a+ib}$$

und hiemit

$$2\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{ye^{-a(x+y)}\cos b(x+y)}{y^2-x^2}\,dx\,dy$$

$$= 2\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{xe^{-a(x+y)}\cos b(x+y)}{x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a(x+y)}\cos b(x+y)}{x+y}\,dx dy = \frac{a}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a(x+y)}\sin b(x+y)}{x+y}\,dx\,dy = \frac{b}{a^2+b^2}, \quad a > 0.$$

Die zweite der Formeln (8) besagt in unserem Falle, dass

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-(a+ib)(x+y)}}{x-y}\,dx\,dy = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a(x+y)}\cos b(x+y)}{x-y}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a(x+y)}\sin b(x+y)}{x-y}\,dx\,dy = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a(x+y)}\cos bx \cos by}{x-y}\,dx dy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a(x+y)}\sin bx \sin by}{x-y}\,dx\,dy = 0;$$

es bestätigt sich in der That die mit diesen Folgerungen identische Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-2(a+ib)x}\; li\left(e^{+\overline{a+ib}x}\right) dx = 0$$

durch Substitution der für den complexen Integrallogarithmus geltenden unendlichen Reihe.

Die Leichtigkeit der Specialisirung der Formeln

$$\int_a^b\int_a^b \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{x-y}\,dxdy = \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(y+x)}{y}\,dy = 0,$$

$$\int_a^b\int_a^b \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{x+y}\,dx\,dy = \int_0^\infty dz \int_a^b \varphi(x)\cos zx\,dx \int_a^b \varphi(y)\sin zy\,dy$$

auch bei unveränderten Grenzen a und b mögen anhangsweise die Fälle $\varphi(x) = x^{p-1}$ für die erste, $\varphi(x) = 1$ für die zweite Formel darthun.

Bezeichnet p eine positive ganze Zahl, so ist im ersten Falle

$$\frac{\varphi(y+x)}{y} = y^{p-2} + (p-1)_1 y^{p-3}x + (p-1)_2 y^{p-4}x^2 + \ldots + \frac{x^{p-1}}{y}.$$

Das Integral

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(y+x)}{y}\,dy$$

ist hienach leicht bis auf das letzte Glied zu berechnen, für welches aber die Formel sehr einfach

$$\int_a^b x^{2p-2}\, l\,\frac{b-x}{a-x}\,dx = \int_0^\infty ly\,\frac{(b-ay)^{2p-2}}{(1-y)^{2p}}\,dy$$

$$= \Sigma\left[\frac{b^n-a^n}{n}\cdot\frac{b^{2p-n-1}-a^{2p-n-1}}{2p-n-1}\right]_{n=1}^{n=p-1}$$

ergibt, eine Bestimmung, welche für $b=a$ leicht zu bestätigen ist.

In der zweiten Formel ist für $\varphi(x) = 1$

$$2\int_0^\infty dz \int_a^b \cos zx\,dx \int_a^b \sin zy\,dy =$$

$$\int_0^\infty \left\{2\sin(a+b)z - \sin 2az - \sin 2bz\right\}\frac{dz}{z^2},$$

woher wegen

$$\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b \frac{dx\,dy}{x+y} = bl2b + al2a - (b+a)\,l(b+a)$$

eine willkürliche Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin az}{z^2}\,dz = -\,ala$$

abstrahirt werden kann. Um dieselbe zu berichtigen, d. h. sie zu einer Hauptwerthsformel zu ergänzen, muss man beachten, dass die Divergenz des in Rede stehenden Integrals eine $a$fache logarithmische, der Divergenzfactor $\frac{a}{z}$ und der Modul desselben folglich $a\int_0^\infty \frac{dz}{z}$ ist. Es geht also auch die Hauptwerthsbestimmung für $\int_0^\infty \frac{\sin az}{z^2}\,dz$ aus derjenigen für den Integralcosinus ebenso hervor durch Integration dieser letzteren nach a wie der Differentialfactor aus $\frac{\cos az}{z}$ selbst. Diese Bemerkungen genügen, um das dem Modul $a\int_0^\infty \frac{dz}{z}$ angehörige Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin az}{z^2}\,dz \quad \text{als}$$

$$a\int_0^\infty \frac{dz}{z} - aC + a - \frac{1}{2}\,a\,l(a^2), \qquad a \gtreqless 0$$

und für den Hauptwerth

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{\sin az}{z^2}\,dz = -\,a\,(C-1) - \frac{1}{2}\,a\,l(a^2),$$

zu erhalten. Das Aggregat solcher Functionen hat die Eigenschaft, verschiedene Moduli zu besitzen; nichtsdestoweniger kann auch hier ein continuirliches Aggregat gebildet werden, wie das eben analysirte Beispiel zeigt und es gehören demnach Moduli, die sich nur durch constante Factoren unterscheiden, in eine Kategorie. Es ist

$$A\int_0^\infty \frac{dz}{z}$$

der allgemeinste Modul logarithmischer Divergenz oder einer Divergenz ersten Grades.

Noch möge der Potenzreihenentwicklung für das Integral

$$\int_z^\infty \frac{\sin az}{z^2}\,dz$$

gedacht werden. Wie sich aus

$$-\int_z^\infty \frac{\cos az}{z}\,dz = -\int_0^\infty \frac{\cos az}{z}\,dz + \int_0^z \frac{\cos az}{z}\,dz$$

gemäss der Grenzformel

$$\operatorname{Lim}\left[\int_z^\infty \frac{dz}{z} + lz\right] = 0, \quad z = 0$$

die Divergenz $\int_0^\infty \frac{dz}{z}$ eliminirt, so aus

$$-\int_z^\infty \frac{\sin az}{z^2}\,dz = -\int_0^\infty \frac{\sin az}{z^2}\,dz + \int_0^z \frac{\sin az}{z^2}\,dz$$

ihr $a$facher Werth. Die Entwicklung des Integralcosinus zieht die folgende

$$-\int_z^\infty \frac{\sin az}{z^2}\,dz = a(C-1) + \frac{a}{2}\,l(a^2z^2) - \frac{a^3}{3!}\cdot\frac{z^2}{2} + \frac{a^5}{5!}\cdot\frac{z^4}{4!} - \cdots$$

unmittelbar nach sich.

II. Die Integrale $\int_0^\infty \frac{(lu')^n}{(u'u'')^\mu} du$

und $\int_0^\infty \frac{(lu'')^n}{(u'u'')^\mu} du$ für $u' = a + i(b+u)$, $u'' = a + i(b-u)$

und ihre Dependenzen.

Die Gleichung, welche auf Integrale der genannten Art, sowie auf ein der Entwicklung des $n$ten Differentialquotienten der Gammafunction adäquates Gesetz der Integration derselben führt, ist die Gleichung (9)

$$\int_\alpha^\beta \left\{ \varphi z \right\}^2 dz = \int_0^\infty du \left[\int_\alpha^\beta \cos uz\, \varphi z\, dz \right]^2$$

$$= \int_0^\infty du \left[\int_\alpha^\beta \sin uz\, \varphi z\, dz \right]^2, \qquad (A)$$

wenn in ihr die Function φ durch

$$z^{\mu-1} (lz)^n e^{-(a+ib)z}$$

ersetzt wird. Die allgemeine Integralformel, welche dabei zur Anwendung kommt, ist

$$(p+iq)^\mu \int_0^\infty z^{\mu-1} (lz)^n e^{-(p+iq)z} dz = \qquad (Aa)$$

$$\Gamma^{(n)}(\mu) - (n)_1 \Gamma^{(n-1)}(\mu) l(p+iq) + (n)_2 \Gamma^{(n-2)}(\mu) \{l(p+iq)\}^2$$
$$- \ldots \pm (n)_n \Gamma(\mu) \{l(p+iq)\}^n, \quad p > 0, \quad \mu > 0.$$

Dieselbe hat die Form der Binomialreihe und folgt aus der $n$maligen Derivation der Gleichung des Euler'schen Integrales

$$\int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-(p+iq)z} dz = \frac{\Gamma(\mu)}{(p+iq)^\mu}$$

nach μ.

Es ist nun nicht allein vortheilhaft, sondern auch nothwendig, einen stufenweisen Gang in der Verwerthung der Doppelgleichung (A) einzuschlagen, in der Weise, dass wir zuerst den Fall $b=0$ erörtern und dabei gleichzeitig von Anfang eine Trennung der reellen und imaginären Bestandtheile vornehmen, sodann unter Beibehaltung der anfänglichen Trennung den allgemeinen Fall zunächst für $n=0,\ 1,\ 2$ etc., endlich ohne jene Sonderung bis zu dem in den Gleichungen (9) verborgenen allgemeinen Gesetze verfolgen.

Unserer Absicht entsprechend führen wir die Trennung unter der Voraussetzung $b=0$ schon in der Formel (Aa) durch, so dass

$$\int_0^\infty z^{\mu-1}(lz)^n e^{-(a+iu)z}\,dz = \frac{R_a - iR_u}{(a+iu)^\mu}$$

und speciell

$$\int_0^\infty z^{\mu-1}(lz)^n e^{-az}\cos uz\,dz = (R_a \cos\mu\vartheta - R_u \sin\mu\vartheta)(a^2+u^2)^{-\mu},$$

$$\int_0^\infty z^{\mu-1}(lz)^n e^{-az}\sin uz\,dz = (R_a \sin\mu\vartheta + R_u \cos\mu\vartheta)(a^2+u^2)^{-\mu},$$

$$R_a = \Gamma^{(n)}(\mu) - (n)_1\,\Gamma^{(n-1)}(\mu)\,lr + (n)_2\Gamma^{(n-2)}(\mu)\,((lr)^2-\vartheta^2) - \ldots.$$

$$R_u = (n)_1\,\Gamma^{(n-1)}(\mu)\,.\,\vartheta - (n)_2\Gamma^{(n-2)}(\mu)\,2\vartheta\,.\,lr + \ldots\ldots,$$

$$r^2 = a^2+u^2,\quad \vartheta = \operatorname{arc\,tan}\frac{u}{a};$$

die Doppelgleichung (A) liefert jetzt sogleich

$$\int_0^\infty \frac{(R_a \sin\mu\vartheta + R_u \cos\mu\vartheta)^2}{(a^2+u^2)^\mu}\,du =$$

$$\int_0^\infty \frac{(R_a \cos\mu\vartheta - R_u \sin\mu\vartheta)^2}{(a^2+u^2)^\mu}\,du =$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty z^{2\mu-2}(lz)^{2n} e^{-2az}\,dz =$$

$$\frac{\pi}{2(2a)^{2\mu-1}}\Big\{\Gamma^{(2n)}(2\mu-1)-(2n)_1\,\Gamma^{(2n-1)}(2\mu-1)\,l2a+\ldots+\Gamma(2\mu-1)(l2a)^{2n}$$

Die beiden Beziehungen, welche hieraus durch Addition und Subtraction entspringen, lauten

$$\int_0^\infty \frac{R_a^2 + R_u^2}{(a^2+u^2)^\mu}\, du = \pi \int_0^\infty z^{2\mu-2} (lz)^{2n} e^{-2az}\, dz, \qquad \text{(I)}$$

$$\int_0^\infty \frac{R_a^2 - R_u^2}{(a^2+u^2)^\mu} \cos 2\mu\vartheta du - \int_0^\infty \frac{2 R_a R_u}{(a^2+u^2)^\mu} \sin 2\mu\vartheta\, du = 0, \qquad \text{(II)}$$

und zeigen die Spaltung des vorliegenden Problems in einen auf endliche bestimmte Ausdrücke führenden Theil und ein auf dem betretenen Wege nicht weiter zu vereinfachendes isolirtes Resultat (II). Indem wir dies letztere sowie eine analoge, aus den Gleichungen (8) abzuleitende Formel

$$\int_0^\infty \frac{R_a^2 - R_u^2}{(a^2+u^2)^\mu} \sin 2\mu\vartheta\, du + \int_0^\infty \frac{2 R_a R_u}{(a^2+u^2)^\mu} \cos 2\mu\vartheta\, du$$

$$= -\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a(x+y)}(xy)^{\mu-1}(lxly)^n}{x+y}\, dx\, dy$$

von der allgemeinen Betrachtung ausschliessen, erwähnen wir zugleich jene Eigenschaft, welche alle hier einschlägigen Entwicklungen kennzeichnet: sie reduciren sich nach Potenzen der in den verschiedenen Differentialquotienten $\Gamma(\mu)$ und $\Gamma(2\mu-1)$ auftretenden Constanten des Integrallogarithmus entwickelt, in den Coëfficienten ihrer Potenzen auf Null. Man erkennt dies in unserem Falle, wenn man vorerst für $\arctan\frac{u}{a}\ \vartheta$ und damit die Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ einführt; die Coëfficienten einer neuen berechtigten Entwicklung nach Potenzen von la geben in ihren Nullwerthen dieselben kettenartig sich ergänzenden und erweiternden Resultate. Es ist leicht einzusehen und bedarf keines besonderen Beweises, dass diese Eigenschaft auch bei der Einführung einer neuen Constante b noch richtig bleibt; eine Bestätigung dieser Verallgemeinerung ist indessen auch für diesen Fall leicht zu geben (siehe unten).

Wir fassen dies erste wichtige Resultat in kurzen Worten dahin zusammen, dass die speciellen sich isolirenden Integrale nicht in den Differentialquotienten der Gammafunctionen

$$\Gamma(\mu) \quad \text{und} \quad \Gamma(2\mu-1)$$

selbst, sondern in denen ihrer Logarithmen ausdrückbar sind.

Es ist jetzt der Ort, jener Analogie zu gedenken, welche zwischen der Entwicklung der Gammafunction nach Potenzen ihres derivirten Logarithmus und der Integration des Binomes

$$\frac{\{l(a+iu)\}^n + \{l(a-iu)\}^n}{(a^2+u^2)^\mu}$$

besteht. Um sogleich mit der letzteren zu beginnen, haben wir in den vollkommen identischen Formeln

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{(l\sec\vartheta + i\vartheta)^n + (l\sec\vartheta - i\vartheta)^n}{2(\sec\vartheta)^{2\mu-2}} \right\} d\vartheta = \qquad \text{(III)}$$

$$(-1)^n \Big[(t_1 - s_1 - l2)^n + (n)_2 (t_2 - s_2)(t_1 - s_1 - l2)^{n-2} + \ldots$$

$$+ (t_n - s_n) \Big] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(\sec\vartheta)^{2\mu-2}}$$

$$= \Big[(s_1 - t_1 + l2)^n + (n)_2 (t_2 - s_2)(s_1 - t_1 + l2)^{n-2} + \ldots$$

$$+ (-1)^n (t_n - s_n) \Big] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(\sec\vartheta)^{2\mu-2}}$$

zunächst die Zeichen s_q und t_q zu definiren und sodann jene Analogie, respective die Modificationen des Gesetzes für $D^n\Gamma(a)$ zu entwickeln.

Jene Zeichen s_q und t_q haben die Bedeutung

$$s_q = D^q l\Gamma(\mu), \quad t_q = D^q l\Gamma(2\mu-1);$$

die Abweichungen vom bekannten Gesetze beschränken sich auf die Vertretung des gemeinsamen Factors $\Gamma(a)$ durch das Normalintegral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \vartheta)^{2\mu-2} \, d\vartheta,$$

des Ausdruckes $D\, l\Gamma(a)$ durch $t_1 - s_1 - l2$, beziehungsweise $s_1 - t_1 + l2$, sowie der weiteren Differentialquotienten

$$D^q l\Gamma(a), \quad q > 1 \quad \text{durch} \quad t_q - s_q \quad \text{oder} \quad s_q - t_q,$$

endlich bezüglich der letzteren Formel allein — auf die Zeichenänderung aller in q geraden Ausdrücke $s_q - t_q$ noch ausserdem. Es möge hiezu bemerkt werden, dass die Formel (I) die Integrationen (III) nach la entwickelt nicht direct zu Tage bringt, sondern verschiedene Aggregate der einzelnen Binomglieder linker Hand von (III), welche zunächst zur Spaltung dieser Formeln in die isolirten Bedeutungen ihrer einzelnen Theile und hierdurch erst zur inductiven Abstraction des Gesetzes (III) hinleiten. Wir begnügen uns, diesen inductiven Weg, der bei Entwicklung nach Potenzen der Constanten $C = 0\cdot57721\ldots$ unmittelbar zum Ziele führt, in der Angabe der getrennten Resultate für die Substitutionen $n = 0$, 1 und 2 anzudeuten. Jedes einzelne derselben hat auf diesem Wege der Ableitung alle vorhergehenden zur nothwendigen Voraussetzung.

1) Fall $n = 0$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \vartheta)^{2\mu-2} \, d\vartheta = \frac{\pi}{(2\mu-1)2^{2\mu-1}} \cdot \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu)} = \Pi,$$

hiezu aus (II)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \vartheta)^{2\mu-2} \cos 2\mu\vartheta = 0;$$

2) Fall $n = 1$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (l \sec \vartheta (\cos \vartheta)^{2\mu-2} \, d\vartheta = (s_1 - t_1 + l2)\, \Pi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sec \vartheta)^2 (\cos \vartheta)^{2\mu-2} d\vartheta = \left[(s_1 - t_1 + l2)^2 + t_2 - \frac{1}{2} s_2\right] \Pi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta^2 (\cos\vartheta)^{2\mu-2}\, d\vartheta = \frac{1}{2} s_2 \Pi;$$

3) Fall $n = 2$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (l \sec\vartheta)^3 (\cos\vartheta)^{2\mu-2}\, d\vartheta =$$

$$\left[(s_1 - t_1 + l2)^3 + 3\left(t_2 - \frac{s_2}{2}\right)(s_1 - t_1 + l2) + \frac{1}{4} s_3 - t_3\right] \Pi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta^2 l \sec\vartheta (\cos\vartheta)^{2\mu-2}\, d\vartheta = \left[\frac{1}{2} s_2 (s_1 - t_1 + l2) - \frac{1}{4} s_3\right] \Pi;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (l \sec\vartheta)^4 (\cos\vartheta)^{2\mu-2}\, d\vartheta =$$

$$\left[(s_1 - t_1 + l2)^4 + 6\left(t_2 - \frac{1}{2} s_2\right)(s_1 - t_1 + l2)^2 + (s_3 - 4t_3)(s_1 - t_1 + l2)\right.$$

$$\left. + 3t_2^2 - 3t_2 s_2 + \frac{3}{4} s_2^2 + t_4 - \frac{1}{8} s_4\right] \Pi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta^2 (l \sec\vartheta)^2 (\cos\vartheta)^{2\mu-2}\, d\vartheta =$$

$$\left[\frac{1}{2} s_2 (s_1 - t_1 + l2)^2 - \frac{1}{2} s_3 (s_1 - t_1 + l2) - \frac{1}{4} s_2^2 + \frac{1}{2} s_2 t_2 + \frac{1}{8} s_4\right] \Pi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta^4 (\cos\vartheta)^{2\mu-2}\, d\vartheta = \left[\frac{3}{4} s_2^2 - \frac{1}{8} s_4\right] \Pi.$$

Die Annahme $\mu = 1$ erledigt sich durch die Bemerkung $\mu = 2\mu - 1$; dann ist

$$s'_q = t'_q = (-1)^q (q-1)!\, \Sigma(k^{-q})_{k=1}^{k=\infty}, \quad q = 2, 3, \ldots n$$

$$s'_1 = t'_1 = -C = -0{\cdot}5772156649 \ldots$$

und es ergeben sich die Bestimmungen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sec \vartheta \, d\vartheta = \frac{\pi}{2} l2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (l \sec \vartheta)^2 d\vartheta = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{2} (l2)^2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (l \sec \vartheta)^3 d\vartheta = \frac{3}{4} s'_3 \pi + \frac{\pi^3}{8} l2 + \frac{\pi}{2} (l2)^3,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (l \sec \vartheta)^4 d\vartheta = \frac{19}{480} \pi^5 + 3 \, l2 \, s'_3 \pi + \frac{\pi^3}{4} (l2)^2 + \frac{\pi}{2} (l2)^4,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta^2 l \sec \vartheta d\vartheta = \frac{1}{4} s'_3 \pi + \frac{\pi^3}{24} l2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta^2 (l \sec \vartheta)^2 d\vartheta = \frac{11}{1440} \pi^5 + \frac{1}{2} lz \, s'_3 \pi + \frac{\pi^3}{24} (lz)^2,$$

welche durch die Reihe

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (l \sec \vartheta)^n d\vartheta = n! \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5^{n+1}} + \dots \right)$$

leicht controlirt werden können.

Die Einführung einer Constante b in die Untersuchung, in der Art, dass nunmehr

$$\varphi = \psi = z^{\mu-1} (lz)^n e^{-(a+ib)z}$$

genommen wird, ist gleichbedeutend mit der Erweiterung des

Arguments u zu $u+b$ oder $u-b$ in den Reihen

$$R_a = \Gamma^{(n)}(\mu) - (n)_1 \Gamma^{(n-1)}(\mu)\, lr + (n)_2 \Gamma^{(n-2)}(\mu)(lr^2 - \vartheta^2) - \ldots,$$

$$R_u = (n)_1 \Gamma^{(n-1)}(\mu) \,.\, \vartheta - (n)_2 \Gamma^{(n-2)}(\mu)\, 2\, lr \,.\, \vartheta + \ldots\ldots;$$

$$r^2 = a^2 + u^2,$$

$$\vartheta = \operatorname{arc}\tan\frac{u}{a}.$$

Es möge diese Erweiterung an R bezüglich durch einen oder durch zwei Striche (R', R'') erkenntlich gemacht werden. Die Formel (A) fordert die Quadrirung der neuen Gleichungen

$$2\int_0^\infty x^{\mu-1}\,(lx)^n\, e^{-(a+ib)x} \cos ux\, dx =$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}(lx)^n e^{-ax}[\{\cos(u+b)x + \cos(u-b)x\} - i\{\sin(u+b)x -$$
$$- \sin(u-b)x\}]\, dx$$

$$= [\{R'_a \cos\mu\vartheta' - R'_u \sin\mu\vartheta'\} - i\{R'_a \sin\mu\vartheta' + R'_u \cos\mu\vartheta'\}]\, r'^{-\mu}$$
$$+ [\{R''_a \cos\mu\vartheta'' - R''_u \sin\mu\vartheta''\} + i\{R''_a \sin\mu\vartheta'' + R''_u \cos\mu\vartheta''\}]\, r''^{-\mu},$$

$$2\int_0^\infty x^{\mu-1}\,(lx)^n\, e^{-(a+ib)x} \sin ux\, dx =$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}(lx)^n e^{-ax}[\{\sin(u+b)x + \sin(u-b)x\} + i\{\cos(u+b)x -$$
$$- \cos(u-b)x\}]\, dx$$

$$= [\{R'_a \sin\mu\vartheta' + R'_u \cos\mu\vartheta'\} + i\{R'_a \cos\mu\vartheta' - R'_u \sin\mu\vartheta'\}]\, r'^{-\mu}$$
$$+ [\{R''_a \sin\mu\vartheta'' + R''_u \cos\mu\vartheta''\} - i\{R''_a \cos\mu\vartheta - R''_u \sin\mu\vartheta''\}]\, r''^{-\mu},$$

wobei sich als neue Kürzungen

$$\frac{R_a \cos\mu\vartheta - R_u \sin\mu\vartheta}{r^\mu} = A,$$

$$\frac{R_u \cos\mu\vartheta + R_a \sin\mu\vartheta}{r^\mu} = B$$

empfehlen. Hiemit nehmen bei der nun folgenden Sonderung der reellen und imaginäre Theile die Formeln (A) eine sehr compendiöse Gestalt an; indem man für sie

$$\int_0^\infty [(A'+A'')^2-(B'-B'')^2]\,du=$$

$$\int_0^\infty [(B'+B'')^2-(A'-A'')^2]\,du=2\pi A(2\mu-1,\ 2n, 2a, 2b),$$

$$\int_0^\infty (A'+A'')(B'-B'')\,du=\int_0^\infty -(A'-A'')(B'+B'')\,du$$

$$=\pi B(2\mu-1,\ 2n,\ 2a,\ 2b)$$

erhält, erkennt man auf der Stelle die bereits erwähnte Doppelnatur des Problemes; man hat nämlich

$$\int_0^\infty (A'A''+B'B'')\,du=\pi A,$$

$$\int_0^\infty \{(A'^2+A''^2)-(B'^2+B''^2)\}\,du=0,$$

$$\int_0^\infty (A'B''-A''B')\,du=-\pi B,$$

$$\int_0^\infty (A'B'-A''B'')\,du=0,$$

oder indem man für A und B, A', A'', B' und B'' ihre ursprünglichen Bedeutungen restituirt

$$\int_0^\infty [(R'_a R''_u - R''_a R'_u)\sin\mu(\vartheta'-\vartheta'')$$

$$+(R'_a R''_a + R'_u R''_u)\cos\mu(\vartheta'-\vartheta'')](r'r'')^{-\mu}\,du \qquad (a)$$

$$=\pi\int_0^\infty z^{2\mu-2}(lz)^{2n}e^{-2az}\cos 2bz\,dz,$$

$$\int_0^\infty [(R'^2_a - R'^2_u)\cos 2\mu\vartheta' - 2R'_a R'_u \sin 2\mu\vartheta']\, r'^{-2\mu}\, du \qquad (b)$$

$$+\int_0^\infty [(R''^2_a - R''^2_u)\cos 2\mu\vartheta'' - 2R''_a R''_u \sin 2\mu\vartheta'']\, r''^{-2\mu}\, du = 0\,;$$

$$\int_0^\infty [(R'_a R''_u - R'_u R''_a)\cos\mu(\vartheta' - \vartheta'')$$

$$-(R'_a R''_a + R'_u R''_u)\sin\mu(\vartheta' - \vartheta'')]\,(r'r'')^{-\mu}\, du \qquad (c)$$

$$= -\pi\int_0^\infty z^{2\mu-2}\,(lz)^{2n}\, e^{-2az}\sin 2bz\, dz,$$

$$\int_0^\infty [(R'^2_a - R'^2_u)\sin 2\mu\vartheta' + 2R'_a R'_u \cos 2\mu\vartheta']\, r'^{-2\mu}\, du \qquad (d)$$

$$-\int_0^\infty [(R''^2_a - R''^2_u)\sin 2\mu\vartheta'' + 2R''_a R''_u \cos 2\mu\vartheta'']\, r''^{-2\mu}\, du = 0.$$

$$r'^2 = a^2 + (u+b)^2, \qquad \vartheta' = \operatorname{arc\,tan}\frac{u+b}{a},$$

$$r''^2 = a^2 + (u-b)^2, \qquad \vartheta'' = \operatorname{arc\,tan}\frac{u-b}{a}.$$

Die Gleichungen (b) und (d) stehen zu (a) und (c) in Gegensatz; sie lassen sich nicht auf einfachere Resultate durch Specialisirung des n zurückführen, wenn mit dem Begriffe grösserer Einfachheit zugleich auch der Begriff der weiteren Spaltung durch Combination der speciellen Resultate verbunden wird. Wir lassen auch hier die isolirten, durch Gleichungen von den Analogien der Fourier'schen Integrale her, d. h. durch unendliche Reihen zu ergänzenden und zu erläuternden Formeln (b) und (d) ausser Betracht; bezüglich der Formeln (a) und (c) führen wir die Specialisirungen

$$n = 0,\ 1 \text{ und } 2$$

wieder vollständig durch, schicken aber vorerst eine allgemeine Bemerkung über deren gegenseitiges Verhältniss voraus.

Es ist, wie bemerkt

$$\int_0^\infty z^{2\mu-2}(lz)^{2n}e^{-2az}\cos 2bz\,dz =$$

$$\frac{R_{2a}\cos(2\mu-1)\vartheta - R_{2b}\sin(2\mu-1)\vartheta}{r^{2\mu-1}}$$

$$\int_0^\infty z^{2\mu-2}(lz)^{2n}e^{-2az}\sin 2bz\,dz =$$

$$\frac{R_{2a}\sin(2\mu-1)\vartheta + R_{2b}\cos(2\mu-1)\vartheta}{r^{2\mu-1}}$$

$$r^2 = 4a^2 + 4b^2, \quad \vartheta = \operatorname{arc\,tan}\frac{b}{a};$$

linker Hand von (*a*) und (*c*) stehen unter den Integralzeichen Differentiale verwandten Baues, so dass $\vartheta' - \vartheta''$ durch $-\vartheta$,

$$R'_a R''_u - R''_a R'_u \quad \text{durch} \quad R_{2b}$$

$$R'_a R''_a + R'_u R''_u \quad \text{durch} \quad -R_{2a}$$

vertreten ist. Es legt diese Symmetrie die Abkürzung nahe, jede der Formeln (*a*) und (*c*) in zwei Formeln, eine mit dem Cosinus, die andere mit dem Sinus als beiderseitigem Factor zu zerfällen. Danach correspondiren die folgenden durch $\backsim$ geschiedenen Ausdrücke, deren je vier gemäss *a*) und *c*) zu verknüpfen sind.

$$\int_0^\infty (R'_a R''_u - R''_a R'_u)\sin\mu(\vartheta' - \vartheta'')(r'r'')^{-\mu}\,du$$

$$\backsim -\pi r^{1-2\mu} R_{2b}\sin(2\mu-1)\vartheta,$$

$$\int_0^\infty (R'_a R''_u - R''_a R''_u)\cos\mu(\vartheta' - \vartheta'')(r'r'')^{-\mu}\,du$$

$$\backsim -\pi r^{1-2\mu} R_{2b}\cos(2\mu-1)\vartheta,$$

$$\int_0^\infty (R'_a R''_a + R'_u R''_u) \sin \mu(\vartheta' - \vartheta'')(r'r'')^{-\mu}\, du$$

$$\backsim \pi r^{1-2\mu} R_{2a} \sin (2\mu - 1)\vartheta,$$

$$\int_0^\infty (R'_a R''_a + R'_u R''_u) \cos \mu(\vartheta' - \vartheta'')(r'r'')^{-\mu}\, du$$

$$\backsim \pi r^{1-2\mu} R_{2a} \cos (2\mu - 1)\vartheta,$$

wobei die früheren Bezeichnungen gelten.

Bezüglich der Specialisirungen nun $n = 0$, 1 und 2 und der damit verbundenen Entwicklung nach Potenzen von C, sei zuerst im allgemeinen erwähnt, dass, weil in der Entwicklung von $D^n\Gamma(a)$ als höchster Exponent von $Dl\Gamma(a)$ gleichfalls die Zahl n erscheint und

$$Dl\Gamma(\mu) = \sigma_1 - C, \quad Dl\Gamma(2\mu - 1) = \tau_1 - C$$

der Fall $n = n$ an Stelle der vorstehenden Formeln rechter und linker Hand Entwicklungen folgender Art liefert

$$\alpha_{2n} C^{2n} + \alpha_{2n-1} C^{2n-1} + \ldots \alpha_0 =$$
$$\beta_{2n} C^{2n} + \beta_{2n-1} C^{2n-1} + \ldots \beta_0,$$

oder

$$\gamma_{2n} C^{2n} + \gamma_{2n-1} C^{2n-1} + \gamma_{2n-2} C^{2n-2}$$
$$+ \ldots + \gamma_1 C + \gamma_0 = 0.$$

Nimmt man nun vorerst $n = 0$ so enthält

$$\gamma_0^{(0)} = 0$$

die Formel für das Normalintegral des Problems; ist sodann $n = 1$, so zeigt sich in

$$\gamma_2 C^2 + \gamma_1 C^1 + \gamma_0 = 0$$

γ_2 als $c_2 \cdot \gamma_0^{(0)}$, also

$$\gamma_2 = 0.$$

Dasselbe ist allgemein in der Entwicklung des Falles $n = n$ der Fall, d. h. auch γ_{2n} ist $c_{2n} \cdot \gamma_0^{(0)}$ und

$$\gamma_{2n} = 0.$$

In dieser Entwicklung stellen die Coëfficienten γ_0, γ_1 etc. bis γ_{2n} ein Gesetz dar und lassen nach demselben γ_0, γ_1, γ_2 etc. sich sämmtlich blos durch γ_{2n} ausdrücken; nunmehr liefert die obige Entwicklung, da γ_{2n} von C unabhängig ist,

$$\gamma_{2n} = \gamma_{2n-1} = \gamma_{2n-2} = \quad . \quad . \quad . \quad = \gamma_1 = \gamma_0 = 0.$$

Man überzeugt sich bald, dass für jede Specialisirung $n = p$ nur die Coëfficienten $\gamma_p^{(p)}$ bis $\gamma_0^{(p)}$ neue Resultate enthalten.

Diese Resultate nun lauten der Reihe nach ohne weitere Vereinfachung

1) im Falle $n = 0$.

$$\int_0^\infty \frac{\cos \mu(\vartheta' - \vartheta'')}{(r'r'')^\mu} du = \frac{\pi}{(2\mu-1)r^{2\mu-1}} \cdot \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu)} . \cos\{(2\mu - 1)\vartheta\} = \Pi_1,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \mu(\vartheta' - \vartheta'')}{(r'r'')^\mu} du = \frac{\pi}{(2\mu-1)r^{2\mu-1}} \cdot \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu)} . \sin\{(2\mu - 1)\vartheta\} = \Pi_2;$$

2) im Falle $n = 1$.

$$\int_0^\infty \frac{l(r'r'')}{(r'r'')^\mu} \cos, \sin \mu(\vartheta' - \vartheta'') \, du \backsim 2(s_1 - t_1 + lr) \Pi_{(1,\,2)},$$

$$\int_0^\infty \frac{\vartheta' - \vartheta''}{(r'r'')^\mu} \cos \sin \mu(\vartheta' - \vartheta'') \, du \backsim 2\vartheta \Pi_{(1,\,2)};$$

$$\int_0^\infty \frac{lr'lr'' + \vartheta'\vartheta''}{(r'r'')^\mu} \cos, \sin \mu(\vartheta' - \vartheta'') \, du \backsim$$

$$\{(s_1 - t_1 + lr)^2 + t_2 - \vartheta^2\} \Pi_{(1,2)}$$

$$\int_0^\infty \frac{\vartheta' lr'' - \vartheta'' lr'}{(r'r'')^\mu} \cos, \sin \mu(\vartheta' - \vartheta'')\, du \backsim$$

$$\int_0^\infty \frac{\vartheta' lr' - \vartheta'' lr''}{(r'r'')^\mu} \cos, \sin \mu(\vartheta' - \vartheta'')\, du \backsim$$

$$2\vartheta(s_1 - t_1 + lr)\Pi_{(1,2)};$$

3) im Falle $n = 2$.

$$\int_0^\infty \frac{(lr'r'')^2 - (\vartheta' - \vartheta'')^2}{(r'r'')^\mu} \cos, \sin \mu(\vartheta' - \vartheta'')\, du \backsim$$

$$4\left\{(s_1 - t_1 + lr)^2 + t_2 - \frac{1}{2} s_2 - \vartheta^2\right\} \Pi_{(1,2)},$$

$$\int_0^\infty \frac{(\vartheta' - \vartheta'')\, l(r'r'')}{(r'r'')^\mu} \cos, \sin \mu(\vartheta' - \vartheta'')\, du$$

$$\backsim 4\vartheta(s_1 - t_1 + lr)\, \Pi_{(1,2)};$$

$$\int_0^\infty \frac{(lr'lr'' + \vartheta'\vartheta'')\, l(r'r'') - (\vartheta' lr'' - \vartheta'' lr')(\vartheta' - \vartheta'')}{(r'r'')^\mu}$$

$$\cos, \sin \mu(\vartheta' - \vartheta'')\, du$$

$$\backsim 2\left[(s_1 - t_1 + lr)^3 + (3t_2 - 3\vartheta^2 - s_2)(s_1 - t_1 + lr) - t_3\right]\Pi_{(1,2)},$$

$$\int_0^\infty \frac{(\vartheta' lr'' - \vartheta'' lr')\, l(r'r'') + (\vartheta' - \vartheta'')(lr'lr'' + \vartheta'\vartheta'')}{(r'r'')^\mu}$$

$$\cos, \sin \mu\, \vartheta' - \vartheta'')\, du \backsim$$

$$\backsim 2\left[3(s_1 - t_1 + lr)^2 + (3t_2 - s_2 - \vartheta^2)\right] \vartheta\, \Pi_{(1,2)};$$

$$\int_0^\infty \frac{(lr'lr'' + \vartheta'\vartheta'')^2 - (\vartheta' lr'' - \vartheta'' lr')^2}{(r'r'')^\mu} \cos, \sin \mu(\vartheta' - \vartheta'')\, du$$

$$\backsim \left[(s_1 - t_1 + lr)^4 + (6t_2 - 2s_2 - 6\vartheta^2)(s_1 - t_1 + lr)^2 - (6t_2 - 2s_2)\vartheta^2\right.$$

$$\left. - 4t_3(s_1 - t_1 + lr) + 3t_2^2 - 2t_2 s_2 + s_2^2 + t_4 + \vartheta^4\right]\Pi_{(1,2)},$$

$$\int_0^\infty \frac{(lr'lr''+\vartheta'\vartheta'')(\vartheta'lr''-\vartheta''lr')}{(r'r'')^\mu}\cos,\sin\mu(\vartheta'-\vartheta'')\,du$$

$$\backsim 2[(s_1-t_1+lr)^3+(3t_2-s_2-\vartheta^2)(s_1-t_1+lr)-2t_3)$$
$$\times\ \vartheta\Pi_{(1,\ 2)}.$$

Ehe wir zur allgemeinsten Discussion der Gleichungen (A) übergehen, reduciren wir fünf der vorstehenden Formeln auf einen Bogen als unabhängiges Argument; es sind die Formeln, welche die Ausdrücke $l(r'r'^{4})$ und $(\vartheta'-\vartheta'')$ allein enthalten. Wir setzen

$$\vartheta'-\vartheta''=\vartheta,$$

woraus der Reihe nach

$$r'r''=2abcsc\vartheta,\quad bu=(^2-a^2+2ab\cot\vartheta)^{\frac{1}{2}}$$

$$du=-abcsc^2\vartheta\,(b^2-a^2+2ab\cot\vartheta)^{-\frac{1}{2}}d\vartheta$$

zu substituiren ist und erhalten für die bezeichneten fünf Formeln

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\arctan\frac{b}{a}}(b^2-a^2+2ab\cot\vartheta)^{-\frac{1}{2}}(\sin\vartheta)^{\mu-2}\cos,\sin\mu\vartheta d\vartheta$$

$$=\Pi_{(1,\ 2)}(2ab)^{\mu-1}=\Pi^{(';\ '')},$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\arctan\frac{b}{a}}l2abcsc\vartheta(b^2-a^2+2ab\cot\vartheta)^{-\frac{1}{2}}(\sin\vartheta)^{\mu-2}\cos;\sin\mu\,\vartheta d\vartheta$$

$$\backsim 2\Big(s_1-t_1+lr\Big)\Pi_{(';\ '')},$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\arctan\frac{b}{a}}\vartheta(b^2-a^2+2ab\cot\vartheta)^{-\frac{1}{2}}(\sin\vartheta)^{\mu-2}\cos;\sin\mu\vartheta d\vartheta$$

$$\backsim 2\vartheta\Pi_{(';'')},$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\arctan\frac{b}{a}}\{(l2abcsc\vartheta)^2-\vartheta^2\}(b^2-a^2+2ab\cot\vartheta)^{-\frac{1}{2}}(\sin\vartheta)^{\mu-2}\cos;$$

$$\sin \mu\vartheta d\vartheta = 4\left\{\left(s_1 - t_1 + lr\right)^2 + t_2 - \frac{1}{2} s_2 - \right.$$

$$\left. - \vartheta^2\right\} \Pi^{(';'')},$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2 \operatorname{arc} \tan \frac{b}{a}} \vartheta l 2abcsc\vartheta\,(b^2 - a^2 + 2ab\cot\vartheta)^{-\frac{1}{2}} (\sin \vartheta)^{\mu-2} \cos;$$

$$\sin \mu\vartheta d\vartheta \backsim 4\vartheta(s_1 - t_1 + lr\,\Pi_{(';'')}.$$

Ist $b = a$, so nehmen dieselben folgende Formen an

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\vartheta}\,(\sin \vartheta)^{\mu-2} \cos, \sin \mu\vartheta d\vartheta =$$

$$\frac{\pi}{(2\mu-1)\,2^{2\mu-2}} \cdot \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu)} . \cos, \sin(2\mu-1)\frac{\pi}{4} = J_{(1, 2)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2csc\vartheta\sqrt{\tan\vartheta}\,(\sin \vartheta)^{\mu-2} \cos, \sin \mu\vartheta d\vartheta$$

$$\backsim 2(s_1 - t_1 + l2\sqrt{2})\,J_{(1, 2)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta \sqrt{\tan\vartheta}\,(\sin \vartheta)^{\mu-2} \cos, \sin \mu\vartheta d\vartheta \backsim \frac{\pi}{2} J_{(1, 2)},$$

$$\int_0^{\frac{2}{\pi}} \{(l2csc\vartheta)^2 - \vartheta^2\} \sqrt{\tan\vartheta}\,(\sin \vartheta)^{\mu-2} \cos, \sin \mu\vartheta d\vartheta$$

$$\backsim 4\left\{(s_1 - t_1 + l2\sqrt{2})^2 + t_2 - \frac{1}{2} s_2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{16}\pi^2\right\} J_{(1, 2)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta 2lcsc\vartheta\sqrt{\tan\vartheta}\,(\sin \vartheta)^{\mu-2} \cos, \sin \mu\mu d\vartheta$$

$$\backsim \pi(s_1 - t_1 + l2\sqrt{2})\,J_{(1, 2)},$$

und es ist schliesslich für $\mu = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cot, \tan \vartheta)^{\frac{1}{2}}\, d\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\csc\vartheta \sqrt{\cot \vartheta, \tan \vartheta}\, d\vartheta \backsim \sqrt{2}\,\pi\, l2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta \sqrt{\cot \vartheta, \ \tan \vartheta}\, d\vartheta \backsim \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((l2\csc\vartheta)^2 - \vartheta^2\Big)\sqrt{\cot \vartheta, \tan \vartheta}\, d\vartheta \backsim$$

$$\backsim \sqrt{2}\,\pi \left(2\,(l2\sqrt{2})^2 + \frac{\pi^2}{24}\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta\, l2\csc\vartheta \sqrt{\cot \vartheta, \ \tan \vartheta}\, d\vartheta \backsim \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}\, l2\sqrt{2}.$$

Um nunmehr aus dem vorstehenden Formelsystem ein die Formel (III) als speciellen Fall in sich enthaltendes allgemeines Gesetz zu finden, auf welches die grosse Regelmässigkeit des Baues der einzelnen Formeln hinweist, gehen wir, wie bemerkt, zu den Gleichungen (A) zurück, in welchen wir jetzt

$$\cos ux = \frac{e^{+iux} + e^{-iux}}{2},$$

$$\sin ux = \frac{e^{+iux} - e^{-iux}}{2i}$$

substituiren. Hiedurch werden die Gleichungen (A), wenn,

$$u' = a + i(b + u), \quad u'' = a + i(b - u),$$

$$\int_0^\infty du \left[\int_0^\infty x^{\mu-1}\,(lx)^n \left\{e^{-u'x} + e^{-u''x}\right\} dx\right]^2$$

$$= -\int_0^\infty du \left[\int_0^\infty x^{\mu-1}\,(lx)^n \{e^{-u'x} - e^{-u''x}\}\,dx\right]^2$$

$$= 2\pi\int_0^\infty z^{2\mu-2}\,(lz)^{2n}\,e^{-2(a+ib)z}\,dz = 2\pi\frac{S}{s^{2\mu-1}},$$

$$S = \Gamma^{(2n)}(2\mu-1) - (2n)_1\,\Gamma^{(2n-1)}(2\mu-1)\,ls + \ldots\ldots$$

$$+ (2n)_{2n}\,\Gamma(2\mu-1)\,(ls)^{2n}, \quad s = 2(a+ib).$$

Führt man für die Integrale linker Hand die analogen Bezeichnungen U', U'', u' und u'' ein, so lauten dieselben Gleichungen in sehr knapper, übersichtlicher Schreibweise

$$\int_0^\infty \left(\frac{U'}{u'^\mu} + \frac{U''}{u''^\mu}\right)^2 du = -\int_0^\infty \left(\frac{U'}{u''^\mu} - \frac{U''}{u''^\mu}\right)^2 du = 2\pi\frac{S}{s^{2\mu-1}}$$

und man entnimmt ihnen die doppelte Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{U'^2}{u'^{2\mu}}\,du + \int_0^\infty \frac{U''^2}{u''^{2\mu}}\,du = 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{U'U''}{(u'u'')^\mu}\,du = \pi\frac{S}{s^{2\mu-1}}.$$

Die erstere Gleichung lassen wir ausser Betracht, in der zweiten specialisiren wir sofort, ohne vorherige Trennung des Reellen und Imaginären, die Zahl n und erhalten in den drei ersten Fällen $n = 0$ bis $n = 2$ die Formeln, in welchen s durch u ersetzt ist,

1) $n = 0$.

$$\int_0^\infty \frac{du}{(u'u'')^\mu} = \frac{\pi}{(2\mu-1)\,u^{2\mu-1}}\cdot\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu)} = \Lambda;$$

2) $n = 1$.

$$\int_0^\infty \frac{l(u'u'')}{(u'u'')^\mu}\,du = 2(s_1 - t_1 + lu)\,\Lambda,$$

$$\int_0^\infty \frac{lu'lu''}{(u'u'')^\mu}\,du = \{(s_1 - t_1 + lu)^2 + t_2\}\,\Lambda;$$

3) $n = 2$.

$$\int_0^\infty \frac{(lu'u'')^2}{(u'u'')^\mu}\,du = 4\left\{(s_1 - t_1 + lu)^2 + t_2 - \frac{1}{2}s_2\right\}\Lambda,$$

$$\int_0^\infty \frac{(lu')^2 + (lu'')^2}{(u'u'')^\mu}\,du = 2\,\{(s_1 - t_1 + lu)^2 + t_2 - s_2\}\,\Lambda;$$

$$\int_0^\infty \frac{lu'l(u'u'')lu''}{(u'u'')^\mu}du = 2\{(s_1 - t_1 + lu)^3 + (3t_2 - s_2)(s_1 - t_1 + lu) - t_3\}\,\Lambda;$$

$$\int_0^\infty \frac{(lu'lu'')^2}{(u'u'')^\mu}\,du =$$

$$\{(s_1 - t_1 + lu)^4 + (6t_2 - 2s_2)(s_1 - t_1 + lu)^2$$
$$- 4t_3\,(s_1 - t_1 + lu) + t_2^2 - 2t_2s_2 + s_2^2 + t_4\}\,\Lambda,$$

$$u' = a + i(b + u), \quad u'' = a + i(b - u), \quad u = 2(a + ib).$$

Der Ausdruck

$$\int_0^\infty \frac{(lu')^2 + (lu'')^2}{(u'u'')^\mu}\,du$$

geht für $b = 0$ in

$$2\int_0^\infty \frac{\{l(a^2 + u^2)\}^2 - \left(\operatorname{arc\,tan}\dfrac{u}{a}\right)^2}{(a^2 + u^2)^\mu}\,du$$

oder

$$2\int_0^\infty \frac{(l\sec\vartheta)^2 - \vartheta^2}{(\sec\vartheta)^{2\mu-2}}\,d\vartheta,$$

über, welches sich unter die allgemeine Form in (III) linker Hand einreiht, und in der That hat auch rechter Hand obige Formel den Ausdruck des Gesetzes rechter Hand von (III). Hienach ist nunmehr der Schluss vom Besondern auf das Allgemeine sehr leicht.

Bedenkt man, dass

$$lu' = l(a + ib + iu) = \varphi(a + ib, u) + i\psi(a + ib, u),$$

$$lu'' = l(a + ib - iu) = \varphi(a + ib, u) - i\psi(a + ib, u),$$

wo φ und ψ für $b = 0$ in $\frac{1}{2}\, l(a^2 + u^2)$ und $\operatorname{arc\,tan} \frac{u}{a}$ übergehen, so kann man mittelst dieser Auffassung die Analogie des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{(lu')^n + (lu'')^n}{(u'u'')^\mu}\, du$$

mit demjenigen in (III) unmittelbar darstellen und wird mit Rücksicht auf die obige Bestimmung des speciellen Falles $n = 2$ von selbst auf die allgemeine Formel

$$\int_0^\infty \frac{(lu')^n + (lu'')^n}{2(u'\,u'')^\mu}\, du = (-1)^n[(t_1 - s_1 - lu)^n$$
$$+ (n)_2 (t_2 - s_2)(t_1 - s_1 - lu)^{n-2} + \ldots + (t_n - s_n)]\, \Lambda$$
$$= [s_1 - t_1 + lu)^n + (n)_2 (t_2 - s_2)(s_1 - t_1 + lu)^{n-2} + \ldots$$
$$(-1)^n (t_n - s_n)]\, \Lambda,$$

geleitet. Sie ist von (III) nur durch die Grössen lu und Λ verschieden, welche hier an die Stelle von $l2$ und Π treten. Es ist diese Formel durch die weiteren Specialisirungen $n = 3, 4$ etc., welche die Integrale mit $(lu')^3 + (lu'')^3$, $(lu')^4 + (lu'')^4$ etc. direct liefern, leicht zu bestätigen. Die Trennung der reellen und imaginären Theile, die Annahmen $b = 0$, $b = a$ und $\mu = 1$ geben aus den allgemeinen Resultaten alle im Vorhergehenden entwickelten Einzelheiten wieder.

Theorie der Schwingungscurven.

Von Dr. **Felix Ritter v. Strzelecki,**
Professor der Physik an der k. k. technischen Akademie in Lemberg.

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. Februar 1872.)

Einleitung.

I.

Wir bezeichnen die Schwingungsdauern von n elementaren Schwingungen mit

$$T_1, T_2, \ldots T_n, \tag{1}$$

und nehmen an, dass dieselben gegen einander messbar sind[1].

Ist

$$a, b, \ldots i \tag{2}$$

eine Gruppe der in (1) erscheinenden Zeiger, und

$$p, q, \ldots s \tag{3}$$

die Gruppe der übrigen, so werden wir die Gruppe (2) *unmittelbar* entweder direct mit

$$a, b, \ldots i,$$

oder indirect mit

$$\underline{p, q, \ldots s}$$

bezeichnen; umfasst die Gruppe (2) k, also die Gruppe (3) $n-k$

---

[1] Diese Annahme thut der Allgemeinheit des vorliegenden Problems keinen Abbruch, da beliebige, gegen einander unmessbare Grössen immer durch gegen einander messbare ersetzt werden können, die von den gegebenen beliebig wenig differiren.

Zeiger, so werden wir die Gruppe (2) auch **symbolisch** entweder direct mit

$$z_k,$$

oder indirect mit

$$z_{n-k}$$

bezeichnen. Bei allgemeinen Untersuchungen werden wir uns der symbolischen Bezeichnungsart der Zeigergruppen bedienen.

Eine Folge der über die Grössen (1) gemachten Annahme ist, dass jeder Anzahl derselben ein kleinstes gemeinschaftliche Vielfache zukommt. Wir bezeichnen dasselbe für diejenigen der Grössen (1), denen die Zeiger (2) angehören, mit

$$T_{z_k}. \qquad (4)$$

Wenn z_k aus allen n Zeigern besteht, werden wir die Grösse (4), die Zeigergruppe z_n nicht anschreibend, kurz durch

$$T \qquad (5)$$

ausdrücken.

Die Grösse (4) ist nicht nur durch jede der Grössen (1), auf welche ihr Zeigerausdruck hinweiset, sondern, unter z_{k_1} eine in z_k ganz begriffene Zeigergruppe verstanden, überhaupt durch

$$T_{z_{k_1}} \qquad (6)$$

theilbar. Den Quotienten, welchen man bekommt, wenn (4) durch (6) dividirt wird, und welcher sonach eine ganze Zahl ist, bezeichnen wir mit

$$(z_{k_1})_{z_k}. \qquad (7)$$

Insbesondere ist der Quotient, welchen man bekommt, wenn (5) durch (4) dividirt wird,

$$(z_k). \qquad (8)$$

Die Zahl (7) ist aus zwei Ausdrücken, dem höher und tiefer angeschriebenen, gebaut, von denen wir ersteren den **Hauptausdruck**, letzteren den **Zeigerausdruck** der zugehörigen

Zahl nennen wollen. Bei der Zahl (8) ist der Zeigerausdruck z_n hinzuzudenken.

Das Gesagte begründet die Relation

$$T_{z_k} = (z_{k_1})_{z_k} T_{z_{k_1}},$$

und insbesondere die folgenden

$$T = (\underline{a})\, T_{\underline{a}} = (\underline{a, b})\, T_{\underline{a,b}} = \ldots = (a, b)\, T_{a,b} = (a)\, T_a,$$
$$T_{\underline{a}} = (\underline{a, b})_a\, T_{\underline{a,b}} = (\underline{a, b, c})_a\, T_{\underline{a,b,c}} = \ldots = (b, c)_{\underline{a}}\, T_{b,c} = (b)_{\underline{a}}\, T_b,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$T_{a,b,c} = (a, b)_{a,b,c}\, T_{a,b} = (b, c)_{a,b,c}\, T_{b,c} = (c, a)_{a,b,c}\, T_{c,a},$$
$$T_{a,b} = (a)_{a,b}\, T_a = (b)_{a,b}\, T_b.$$

Wir werden in der vorliegenden Abhandlung beweisen, dass eine Schwingung, die aus den durch z_k markirten elementaren Schwingungen resultirt, und die wir die z_k-Schwingung nennen wollen, zur Schwingungsdauer (4) besitzt. Die Zahl (7) gibt sonach an, wie vielmal die Schwingungsdauer der z_{k_1}-Schwingung in jener der z_k-Schwingung enthalten ist. Wir wollen sie deshalb die S c h w i n g u n g s z a h l der z_{k_1}-Schwingung in Bezug auf die z_k-Schwingung nennen. Ist $z_{k_\prime}$ eine Zeigergruppe, in welcher jede der Zeigergruppen z_{k_1}, z_{k_2}, ... z_{k_h}, und $z_{k_{\prime\prime}}$ eine solche, welche in jeder dieser Zeigergruppen ganz begriffen ist, so geben dem Gesagten zu Folge die Zahlen

$$(z_{k_1})_{z_{k_\prime}},\ (z_{k_2})_{z_{k_\prime}}, \ldots (z_{k_h})_{z_{k_\prime}}, \tag{9}$$

die Schwingungszahlen der z_{k_1}-, z_{k_2}-, ... z_{k_h}-Schwingung in Bezug auf die $z_{k_\prime}$-Schwingung, und die Zahlen

$$(z_{k_{\prime\prime}})_{z_{k_1}},\ (z_{k_{\prime\prime}})_{z_{k_2}}, \ldots (z_{k_{\prime\prime}})_{z_{k_h}} \tag{10}$$

jene der $z_{k_{\prime\prime}}$-Schwingung in Bezug auf die z_{k_1}-, z_{k_2}-, ... z_{k_h}-Schwingung an. Insbesondere geben in nachstehenden Zahlengruppen

$$\begin{array}{c} (1),\ (2), \ldots (n), \\ (b)_{\underline{a}},\ (c)_{\underline{a}}, \ldots (s)_{\underline{a}}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ (a)_{a,b,c},\ (b)_{a,b,c},\ (c)_{a,b,c}, \\ (a)_{a,b},\ (b)_{a,b} \end{array} \tag{11}$$

die Zahlen einer jeden die Schwingungszahlen der durch den Hauptausdruck markirten Schwingungen in Bezug auf die durch den Zeigerausdruck markirte Schwingung, und in nachstehenden Zahlengruppen

$$\begin{array}{c}(a)_{a,b},\ (a)_{a,c}, \ldots (a)_{a,s},\\ (a,b)_{a,b,c},\ (a,b)_{a,b,d}, \ldots (a,b)_{a,b,s},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\underline{a,b})_{\underline{a}},\ (\underline{a,b})_{\underline{b}},\\ (\underline{a})\end{array} \tag{12}$$

die Zahlen einer jeden die Schwingungszahlen der durch den Hauptausdruck markirten Schwingung in Bezug auf die durch den Zeigerausdruck markirten Schwingungen an.

Die Zahlen der Form (7) können durch jene der Form (8) ausgedrückt werden. Es ist nämlich

$$(z_{k_1})_{zk} = T_{zk} : T_{zk_1} = \frac{T}{T_{zk_1}} : \frac{T}{T_{zk}} = \frac{(z_{k_1})}{(z_k)}. \tag{13}$$

Dies begründet die Relation

$$(z_{k_1}) = (z_k)(z_{k_1})_{zk},$$

und insbesondere die folgenden

$$\begin{array}{c}(a) = (\underline{b})(a)_{\underline{b}} = (\underline{b,c})(a)_{\underline{b,c}} = \ldots = (a,b)(a)_{a,b},\\ (a,b) = (\underline{c})(a,b)_{\underline{c}} = \ldots\ldots = (a,b,c)(a,b)_{a,b,c}.\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\underline{a,b,c,}) = (\underline{a})(\underline{a,b,c})_{\underline{a}} = (\underline{a,b})(\underline{a,b,c})_{\underline{a,b}},\\ (\underline{a,b}) = (\underline{a})(\underline{a,b})_{\underline{a}}.\end{array}$$

Die Grösse (4) ist kleinstes gemeinschaftliche Vielfache nicht nur derjenigen der Grössen (1), auf welche ihr Zeigerausdruck hinweiset, sondern, unter $z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots z_{k_h}$ Zeigergruppen verstanden, welche, alle zusammen, blos auf alle in z_k enthaltenen Zeiger hinweisen, überhaupt der Grössen

$$T_{zk_1}, T_{zk_2}, \ldots Tz_{k_h}.$$

Daraus folgt, dass die Zahlen

$$(z_{k_1})_{zk}, (z_{k_2})_{z_k}, \ldots (z_{k_h})_{z_k} \tag{14}$$

relative Primzahlen sind. Mehrere Zahlen der Form (7), welche im Zeigerausdrucke übereinstimmen, sind sonach gegen einander prim, wenn die Hauptausdrücke derselben, alle zusammen, blos auf alle jene Zeiger hinweisen, auf welche ihr Zeigerausdruck hinweiset. Insbesondere sind die Zahlen jeder der Zahlengruppen (11), sowie die Zahlen jeder der folgenden

$$(z_k),\ (\underline{z_k}),$$
$$(z_{\underline{k}_1}),\ (z_{\underline{k_2}}),$$

in deren letzter z_{k_1}, z_{k_2} Zeigergruppen vorstellen, die keinen Zeiger gemeinschaftlich haben, gegen einander prim.

Dividirt man jede der Zahlen (9) durch die Zahl

$$(z_k)_{z_{k,}}, \qquad (15)$$

so erhält man durch Vermittlung von (13) zu Quotienten die Zahlen (14). Daraus folgt, dass die Zahl (15) das grösste gemeinschaftliche Mass der Zahlen (9) ist. Mehrere Zahlen der Form (7), welche im Zeigerausdrucke übereinstimmen, haben sonach zum grössten gemeinschaftlichen Masse eine Zahl derselben Form, welche im Zeigerausdrucke mit den gegebenen übereinstimmt, und deren Hauptausdruck blos auf alle jene Zeiger hinweiset, auf welche die Hauptausdrücke der gegebenen Zahlen, *alle zusammen*, hinweisen. Für die einzelnen Bezeichnungsarten der Zeigergruppen leiten sich aus diesem Satze folgende ab:

1. Mehrere Zahlen der Form (7), welche im Zeigerausdrucke übereinstimmen, und deren Hauptausdrücke direct bezeichnete Zeigergruppen besitzen, haben zum grössten gemeinschaftlichen Masse eine Zahl derselben Form, welche im Zeigerausdrucke und in der Bezeichnungsart der Zeigergruppe des Hauptausdruckes *mit den* gegebenen übereinstimmt, und in deren Hauptausdrucke blos alle jene Zeiger vorkommen, die in den Hauptausdrücken aller gegebenen Zahlen zusammen vorkommen.

2. Mehrere Zahlen der Form (7), welche im Zeigerausdrucke übereinstimmen, und deren Hauptausdrücke indirect bezeichnete Zeigergruppen besitzen, haben zum grössten gemeinschaftlichen Masse eine Zahl derselben Form, welche im Zeigerausdrucke und in der Bezeichnungsart der Zeigergruppe des Hauptausdruckes mit den gegebenen übereinstimmt, und in deren Haupt-



ausdrucke blos alle jene Zeiger vorkommen, die in den Hauptausdrücken aller gegebenen Zahlen gemeinschaftlich vorkommen.

Insbesondere haben in (11), in der ersten Zahlengruppe, alle Zahlen nach Ausschluss von (a) die Zahl

$$(\underline{a}),$$

alle Zahlen nach Ausschluss von (a) und (b) die Zahl

$$(\underline{a,} b),$$

u. s. w., die Zahlen (a) und (b) die Zahl

$$(a, b);$$

in der zweiten Zahlengruppe alle Zahlen nach Ausschluss von $(b)_{\underline{a}}$ die Zahl

$$(\underline{a}, \underline{b})_{\underline{a}},$$

u. s. w. u. s. w. die Zahlen der Zahlengruppe

$$(z_{k_1}),\ (z_{k_2}), \ldots (z_{k_h})$$

die Zahl

$$(z_k),$$

jene der folgenden

$$(z_{\underline{k_1}}),\ (z_{\underline{k_2}}), \ldots (z_{\underline{k_h}})$$

die Zahl

$$(z_{k_{,,}})$$

zum grössten gemeinschaftlichen Masse.

Dividirt man durch jede der Zahlen (10) die Zahl

$$(z_{k_{,,}})_{zk}, \qquad (16)$$

so erhält man zu Quotienten gleichfalls die Zahlen (14). Daraus folgt, dass die Zahl (16) das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen (10) ist. Mehrere Zahlen der Form (7), welche im Hauptausdrucke übereinstimmen, haben sonach zum kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen eine Zahl derselben Form,

welche im Hauptausdrucke mit den gegebenen übereinstimmt, und deren Zeigerausdruck blos auf alle jene Zeiger hinweiset, auf welche die Zeigerausdrücke der gegebenen Zahlen, alle zusammen, hinweisen. Für die einzelnen Bezeichnungsarten der Zeigergruppen leiten sich aus diesem Satze folgende ab:

1. Mehrere Zahlen der Form (7), welche im Hauptausdrucke übereinstimmen, und deren Zeigerausdrücke direct bezeichnete Zeigergruppen besitzen, haben zum kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen eine Zahl derselben Form, welche im Hauptausdrucke und in der Bezeichnungsart der Zeigergruppe des Zeigerausdruckes mit den gegebenen übereinstimmt, und in deren Zeigerausdrucke blos alle jene Zeiger vorkommen, die in den Zeigerausdrücken aller gegebenen Zahlen zusammen vorkommen.

2. Mehrere Zahlen der Form (7), welche im Hauptausdrucke übereinstimmen, und deren Zeigerausdrücke indirect bezeichnete Zeigergruppen besitzen, haben zum kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen eine Zahl derselben Form, welche im Hauptausdrucke und in der Bezeichnungsart der Zeigergruppe des Zeigerausdruckes mit den gegebenen übereinstimmt, und in deren Zeigerausdrucke blos alle jene Zeiger vorkommen, die in den Zeigerausdrücken aller gegebenen Zahlen gemeinschaftlich vorkommen.

Insbesondere haben in (12), in der ersten Zahlengruppe, alle Zahlen die Zahl

$$(a),$$

alle Zahlen nach Ausschluss von $(a)_{a,b}$ die Zahl

$$(a)_{\underline{b}},$$

alle Zahlen nach Ausschluss von $(a)_{a,b}$ und $(a)_{a,c}$ die Zahl

$$(a)_{\underline{b,c}},$$

u. s. w. die Zahlen $(a)_{a,b}$ und $(a)_{a,c}$ die Zahl

$$(a)_{a,b,c};$$

in der zweiten Zahlengruppe alle Zahlen die Zahl

$$(a, b),$$

alle Zahlen nach Ausschluss von $(a, b)_{a,b,c}$ die Zahl

$$(a, b)_{\underline{c}}$$

u. s. w. u. s. w. zum kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

II.

Wir bezeichnen p combinatorische Elemente mit

$$1, 2, 3, \ldots p, \qquad (17)$$

und wollen aus denselben derartige Zusammenstellungen bilden, dass nicht nur einzelne der Elemente (17), d. i. deren Combinationen zur ersten Classe, sondern überhaupt beliebige, materiell verschiedene Gruppen der Elemente (17), d. i. deren Combinationen ohne Wiederholungen zur beliebigen Classe, von denen je zwei kein Element gemeinschaftlich besitzen, als h Elemente einer Zusammenstellung erscheinen. Wir wollen derartige Zusammenstellungen Verbindungen der Elemente (17) zur Classe h nennen, und die verschiedenen Verbindungselemente einer Verbindung durch Verticalstriche von einander absondern.

So z. B. sind von den Elementen

$$1, 2, 3, 4 \qquad (18)$$

Verbindungen der zweiten Classe

$$1|2;\ 1|3;\ 1|4;\ 2|3;\ 2|4;\ 3|4;$$
$$1|2,3;\ 1|2,4;\ 1|3,4;\ 2|1,3;\ 2|1,4;\ 2|3,4;\ 3|1,2;\ 3|1,4;\ 3|2,4;$$
$$4|1,2;\ 4|1,3;\ 4|2,3; \qquad (19)$$
$$1|2,3,4;\ 2|1,3,4;\ 3|1,2,4;\ 4|1,2,3;$$
$$1,2|3,4;\ 1,3|2,4;\ 1,4|2,3.$$

Man stellt alle Verbindungen der Elemente (17) zur Classe h geordnet dar, wenn man sowohl in der Erhöhung der Elemente eines Verbindungselementes, als auch in der Erhöhung der Elementenzahl desselben einen allmäligen Stufengang einhält, wie dies an den Verbindungen (19) beispielsweise zu sehen ist.

Die Anzahl aller Verbindungen der Elemente (17) zur Classe h, welche mit $V_h^{(p)}$ bezeichnet werden soll, ergibt sich aus nach-

stehender Betrachtung: Da in den Verbindungen der Elemente (17) zur ersten Classe jede Combination ohne Wiederholungen dieser Elemente zur 1ten, 2ten .... p^{ten} Classe als Verbindungselement auftreten kann, so ist

$$V_1^{(p)} = \frac{p!}{1!(p-1!} + \frac{p!}{2!(p-2)!} + \dots$$
$$+ \frac{p!}{p!(p-p)!} = \frac{1}{1!}\sum \frac{p!}{k_1!(p-k)!} = \frac{1}{1!}(2^p - 1).$$

In dem Ausdrucke unter dem Summenzeichen hat man k_1 gleich jedem der Werthe (17), und

$$k = k_1$$

zu setzen. Alle Verbindungen der Elemente (17) zur zweiten Classe können erhalten werden, wenn man einer jeden Combination ohne Wiederholungen dieser Elemente zur 1ten, 2ten,... $(p-1)^{\text{ten}}$ Classe, als erstem Verbindungselemente eine jede Verbindung aller in derselben nicht enthaltenen Elemente (17) zur ersten Classe, als zweites Verbindungselement zugesellt. Durch dieses Verfahren wird aber, wie eine einfache Überlegung lehrt, jede Verbindung der Elemente (17) zur zweiten Classe doppelt erhalten. Wir haben daher

$$V_2^{(p)} = \frac{1}{2!}\Big[\frac{p!}{1!(p-1)!}\sum\frac{(p-1)!}{k_1!(p-1-k)!}$$
$$+ \frac{p!}{2!(p-2)!}\sum\frac{(p-2)!}{k_1!(p-2-k)!} + \dots$$
$$+ \frac{p!}{(p-1)![p-(p-1)]!}\sum\frac{1!}{k_1!(1-k)!}\Big] = \frac{1}{2!}\sum\frac{p!}{k_1!k_2!(p-k)}$$
$$= \frac{1}{2!}[3^p - \tbinom{2}{1}2^p + 1].$$

In dem Ausdrucke unter dem letzten Summenzeichen hat man jede der Zahlen k_1, k_2 gleich jedem der Werthe (17), wodurch ihre Summe nicht grösser wird, als p, und

$$k = k_1 + k_2$$

zu setzen. Macht man überhaupt die Voraussetzung, dass die Anzahl aller Verbindungen der Elemente (17) zur Classe h durch

$$V_h^{(p)} = \frac{1}{h!}\sum \frac{p!}{k_1!k_2!\ldots k_h!(p-k)!} = \frac{1}{h!}[(h+1)^p - \tbinom{h}{1}h^p + \ldots + (-1)^h] \quad (20)$$

angegeben wird, wo man in dem Ausdrucke unter dem Summenzeichen jede der Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_h$ gleich jedem der Werthe (17), wodurch ihre Summe nicht grösser wird, als p, und

$$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_h$$

zu setzen hat, so liefert ein auf gewöhnliche Weise geführter Inductionsschluss den Beweis, dass dieselbe vollkommen richtig ist.

Aus (20) folgt

$$V_p^{(p)} = \frac{1}{p!}\,\frac{p!}{1!1!\ldots 1!(p-p)!} = \frac{1}{p!}[(p+1)^p - \tbinom{p}{1}p^p + \ldots + (-1)^p] = 1,$$

woraus zu ersehen ist, dass

$$(p+1)^p - \tbinom{p}{1}p^p + \ldots + (-1)^p = p!$$

ist.

Werden nur diejenigen Verbindungen der Elemente (17) zur Classe h verlangt, in deren jeder alle Elemente (17) erscheinen, wie dies die in den zwei letzten Zeilen von (19) vorhandenen Verbindungen der Elemente (18) sind, so ergibt sich die Anzahl aller dieser Verbindungen einfach aus der Bemerkung, dass sie alle erhalten werden können, wenn man aus $p-1$ der Elemente (17) alle Verbindungen zur Classe $h-1$ bildet, und jeder derselben alle in ihr nicht vorkommenden Elemente (17) als h^{tes} Verbindungselement zugesellt. Für die fragliche Anzahl, welche mit $W_h^{(p)}$ bezeichnet werden mag, hat man daher

$$W_h^{(p)} = V_{h-1}^{(p-1)} = \frac{1}{(h-1)!}\sum \frac{(p-1)!}{k_1!k_2!\ldots k_{h-1}!(p-1-k)!} =$$
$$\frac{1}{(h-1)!}[h^{p-1} - \tbinom{h-1}{1}(h-1)^{p-1} + \ldots + (-1)^{h-1}]. \quad (21)$$

Es sei

$$z_k \quad (22)$$

eine Gruppe der in (1) erscheinenden Zeiger,

$$z_p \tag{23}$$

eine andere Gruppe dieser Zeiger, von denen keiner in (22) sich vorfindet, und

$$z_{k'_1}\, z_{k'_2} \ldots z_{k'_h} \tag{24}$$

eine beliebige Verbindung der Zeiger (23) zur Classe h. Bezeichnet man die Zeigergruppe, die aus der Vereinigung aller Zeigergruppen (24) in Eine hervorgeht, mit

$$z_{k'}, \tag{25}$$

und diejenige, die aus der Vereinigung der Zeigergruppen (22) und (25) in Eine hervorgeht, mit

$$z_{k+k'}, \tag{26}$$

und legt einer in Klammern eingefassten Zeigergruppe die Bedeutung unter, die ihr im ersten Theile der Einleitung zuerkannt wurde, so kann man aus (24) und (26) die Zahl

$$(z_{k'_1})\,(z_{k'_2}) \ldots (z_{k'_h})(z_{k+k'}) \tag{27}$$

bilden. Die Summe der Zahlen, die aus (27) dadurch hervorgehen, dass man (24) jede der Verbindungen der Zeiger (23) zur Classe h sein lässt, kann durch

$$\Sigma\,(z_{k'_1})\,(z_{k'_2}) \ldots (z_{k'_h})\,(z_{k+k'}) = (z_k)_h \tag{28}$$

vorgestellt werden.

Ertheilt man der Zahl h nach einander die Werthe $1, 2, \ldots k-1$, so entstehen aus (28)

$$\Sigma\,(z_{k'_1})\,(z_{k+k'}) = (z_k)_1 \tag{29}$$

$$\Sigma\,(z_{k'_1})\,(z_{k'_2})\,(z_{k+k'}) = (z_k)_2 \tag{30}$$

. . . .

$$\Sigma(z_{k'_1})\,(z_{k'_2}) \ldots (z_{k'_{h-1}})\,(z_{k+k'}) = (z_k)_{h-1}. \tag{31}$$

Jeder Zahl in (28), etwa der Zahl (27) entsprechen in (29) diejenigen, in denen die Verbindungen der Verbindungselemente (24) zur ersten Classe vorkommen, d. i. die folgenden

$$\left(\underline{z_{k'_1}}\right)\left(z_{k+k'}\right),\ \left(\underline{z_{k'_2}}\right)\left(z_{k+k'}\right),\ \ldots\ \left(\underline{z_{k'_h}}\right)\left(z_{k+k'}\right),$$
$$\left(\underline{z_{k'_1+k'_2}}\right)\left(z_{k+k'}\right),\ \ldots\ldots\ \left(\underline{z_{k'_{h-1}+k'_h}}\right)\left(z_{k+k'}\right), \tag{32}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left(\underline{z_{k'_1+k'_2+\ldots+k'_h}}\right)\left(z_{k+k'}\right),$$

deren es nach (20) $\frac{1}{1!}(2^h - 1)$ gibt. Durch Anwendung der Principien, welche im ersten Theile der Einleitung gelehrt worden sind, findet man, dass alle Zahlen (32) zum grössten gemeinschaftlichen Masse die Zahl (27) haben, und dass die letztere nicht von mehr der Zahlen (29) grösstes gemeinschaftliche Mass ist. Jede der Zahlen (28) ist sonach nur von

$$\frac{1}{1!}(2^h - 1) \tag{33}$$

Zahlen (29) grösstes gemeinschaftliche Mass. Ähnliche Schlüsse zeigen, dass jede der Zahlen (28) nur von

$$\frac{1}{2!}\left[3^h - \binom{2}{1}2^h + 1\right] \tag{34}$$

Zahlen (30).... und nur von

$$\frac{1}{(h-1)!}\left[h^h - \binom{h-1}{1}(h-1)^h + \ldots + (-1)^{h-1}\right] \tag{35}$$

Zahlen (31) grösstes gemeinschaftliche Mass ist.

Nimmt man zur Zeigergruppe (22) diejenige, welche alle Zeiger in (1) nach Ausschluss jener (23) enthält, also die Zeigergruppe

$$z_{n-p} = \underline{z_p},$$

so übergeht (26) in

$$z_{n-p+k'} = z_{n-(p-k')} = \underline{z_{p-k'}},$$

(28) in

$$\Sigma\left(\underline{z_{k'_1}}\right)\left(\underline{z_{k'_2}}\right)\ldots\left(\underline{z_{k'_h}}\right)\left(\underline{z_{p-k'}}\right) = \left(\underline{z_p}\right)_h, \tag{36}$$

unter $\underline{z_{p-k'}}$ die Zeigergruppe verstanden, die aus der Zeiger-

gruppe (23) durch Weglassung jener (25) hervorgeht, und (29) (30)... (31) übergehen in

$$\Sigma\left(\underline{z_{k'_1}}\right)\left(\underline{z_{p-k'}}\right)=\left(\underline{z_p}\right)_1 \tag{37}$$

$$\Sigma\left(\underline{z_{k'_1}}\right)\left(\underline{z_{k'_2}}\right)\left(\underline{z_{p-k'}}\right)=\left(\underline{z_p}\right)_2, \tag{38}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma\left(\underline{z_{k'_1}}\right)\left(\underline{z_{k'_2}}\right)\cdots\left(\underline{z_{k'_{h-1}}}\right)\left(\underline{z_{p-k'}}\right)=\left(\underline{z_p}\right)_{h-1}. \tag{39}$$

Es ist daher auch jede der Zahlen (36) grösstes gemeinschaftliche Mass nur von so viel der Zahlen (37), (38),...(39), als beziehungsweise (33), (34),...(35) angeben.

Aus obiger Untersuchung heben wir noch nachstehende Folgerung hervor: Nimmt man $k=0$ an, und lässt die Accente weg, so übergeht (32) in

$$\left(\underline{z_{k_1}}\right)\left(z_{k_1}\right),\ \left(\underline{z_{k_2}}\right)\left(z_{k_2}\right),\ldots\left(\underline{z_{k_h}}\right)\left(z_{k_h}\right), \tag{40}$$

$$\left.\begin{array}{c}\left(\underline{z_{k_1+k_2}}\right)\left(z_{k_1+k_2}\right),\ldots\ldots\left(\underline{z_{k_{h-1}+k_h}}\right)\left(z_{k_{h-1}+k_h}\right),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left(\underline{z_{k_1+k_2+\ldots+k_h}}\right)\left(z_{k_1+k_2+\ldots+k_h}\right),\end{array}\right. \tag{41}$$

und (27) in

$$\left(\underline{z_{k_1}}\right)\left(\underline{z_{k_2}}\right)\cdots\left(\underline{z_{k_h}}\right)\left(z_k\right), \tag{42}$$

wo z_k die Zeigergruppe ist, die aus der Vereinigung aller Zeigergruppen

$$z_{k_1}\mid z_{k_2}\mid\ldots\mid z_{k_h}$$

in Eine hervorgeht. Es haben daher die Zahlen (40) und (41) zum grössten gemeinschaftlichen Masse die Zahl (42). Für die Zahlen (40) allein findet man auch dieselbe Zahl als grösstes gemeinschaftliche Mass.

§. 1.

Entwicklung der Gleichungen der Schwingungscurven.

Unter einer „Schwingungscurve" verstehen wir die Bahn, die ein freier, materieller Punkt in Folge mehrerer elementaren Schwingungen beschreibt, welche auf ihn gleichzeitig übertragen werden.

Um die Schwingungscurve, welcher n elementare Schwingungen zu Grunde liegen, analytisch zu bestimmen, nehmen wir die n Geraden, in deren Abschnitten diese Schwingungen vor sich gehen sollen, zu Coordinataxen an, indem wir uns vornehmen, die Lage eines Punktes im Raume durch n auf diese Axen bezogene Coordinaten $x_1, x_2, \ldots x_n$ anzugeben. Den Inbegriff von irgend welchen k dieser Coordinaten, sowie den denselben entsprechenden Coordinatraum wollen wir mit x_{z_k} bezeichnen, wo z_k auf die Zeiger der zugehörigen Coordinataxen hinweiset. Die positiven Halbaxen x_a und x_b mögen den Winkel $\alpha_{a,b}$, die positiven Halbebenen $x_{b,a}$ und $x_{c,a}$ jenen $\alpha_{b,a,c}$ einschliessen.

Die Zeit t der Bewegung überhaupt zählen wir im Allgemeinen von einem beliebigen Zeitmomente, die Zeit jeder elementaren Schwingung, welche Phase derselben genannt werden soll, insbesondere, immer von einem bestimmten jener Zeitmomente, in denen der Ausschlag der Schwingung der betreffenden positiven Amplitude gleich ist. Sind die der Zeit $t=0$ entsprechenden Phasen der elementaren Schwingungen, welche Anfangsphasen derselben genannt werden sollen, $t_1, t_2, \ldots t_n$, also die der Zeit t entsprechenden $t+t_1$, $t+t_2, \ldots t+t_n$, und sind die Amplituden dieser Schwingungen $a_1, a_2, \ldots a_n$, so sind in Folge der Zusammensetzung der Bewegungen

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos 2\pi \frac{t+t_1}{T_1}, \\ x_2 &= a_2 \cos 2\pi \frac{t+t_2}{T_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_n \cos 2\pi \frac{t+t_n}{T_n} \end{aligned} \qquad (1)$$

die Coordinaten des der Zeit t entsprechenden Punktes der Schwingungscurve.

Die derselben Zeit entsprechenden Coordinatgeschwindigkeiten des schwingenden Punktes, wenn

$$c_1 = \frac{2\pi a_1}{T_1},$$
$$c_2 = \frac{2\pi a_2}{T_2},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$c_n = \frac{2\pi a_n}{T_n}$$

die Schwingungsintensitäten der elementaren Schwingungen vorstellen, sind

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = -c_1 \sin 2\pi \frac{t+t_1}{T_1},$$
$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -c_2 \sin 2\pi \frac{t+t_2}{T_2}, \qquad (2)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$v_n = \frac{dx_n}{dt} = -c_n \sin 2\pi \frac{t+t_n}{T_n}.$$

Dieselben geben zugleich die Richtung der Tangente an die Schwingungscurve im Punkte (1) an, diese Richtung im Sinne der Bewegungsrichtung genommen.

Da über den Sinn der positiven Coordinataxen keine besondere Unterstellung gemacht worden ist, so werden die Ausdrücke (1) und (2) keine ersichtliche Zeichenänderung durch den Umstand erleiden, dass man zu positiven Richtungen einiger Coordinataxen statt der angenommenen die gerade entgegengesetzten nimmt, wofern nur der Anfangspunkt der zugehörigen Phasen auf die oben angegebene Art bestimmt wird.

Das System der Gleichungen (1) drückt die Schwingungscurve aus, welcher n elementare Schwingungen zu Grunde liegen, und welche wir kurzweg Schwingungscurve nennen wollen. Nennt man Projection des Punktes $x_1, x_2, \ldots x_n$ auf den Coordinatraum x_{n_k} den Punkt, dessen Coordinaten aus jenen des

ersteren dadurch hervorgehen, dass man die k derselben, auf welche z_k hinweiset, nimmt, und die übrigen gleich 0 setzt, so drückt das System der Gleichungen, die aus (1) dadurch hervorgehen, dass man die k derselben, auf welche z_k hinweiset, nimmt, und die übrigen gleich 0 setzt, die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum x_{z_k} aus. Da dieses System der Gleichungen dem Systeme jener k Gleichungen gleich gilt, so stimmt diese Projection mit der Schwingungscurve überein, welcher die k elementaren Schwingungen, auf welche z_k hinweiset, und welche wir z_k-Schwingungscurve nennen wollen, zu Grunde liegen. Es stimmt daher insbesondere die Projection der Schwingungscurve auf die Coordinatebene $x_{a,b}$ mit der a, b-Schwingungscurve überein.

Ebenso drücken die Gleichungen (2) die Coordinatgeschwindigkeiten des in Folge n elementaren Schwingungen schwingenden Punktes, hingegen die k derselben, auf welche z_k hinweiset, die Coordinatgeschwindigkeiten der Projection desselben auf den Coordinatraum x_{z_k}, sowie jene des in Folge der betreffenden elementaren Schwingungen schwingenden Punktes aus.

Ertheilt man k der Coordinaten (1), auf welche z_k hinweiset, bestimmte Werthe, so drückt das System der Gleichungen (1) die $\underline{z_k}$-Schwingungscurve aus, welcher der Punkt x_{zk} als Gleichgewichtsort des schwingenden Punktes entspricht. Die Gleichungen (2) drücken unter derselben Voraussetzung die Coordinatgeschwindigkeiten des in dieser Schwingungscurve schwingenden Punktes aus.

Curven, welche aus den Gleichungen (1) durch Variation mehrerer der Grössen $t_1, t_2, \ldots t_n$ hervorgehen, wollen wir mit einander verwandt nennen.

§. 2.

Allgemeine Bemerkungen.

Indem wir nun zur Enthüllung der Eigenschaften der Schwingungscurven aus den Gleichungen derselben übergehen, schicken wir folgende Bemerkungen voran.

Ein Zuwachs der a-Phase $t+t_a$, der den numerischen Werth von x_a und v_a nicht ändert, ist entweder

$$\Delta(t+t_a)=r_a\frac{T_a}{2}, \quad (3)$$

oder

$$\Delta(t+t_a)=r_a\frac{T_a}{2}-2(t+t_a), \quad (4)$$

unter r_a eine ganze Zahl verstanden. x_a und v_a werden durch (3) in

$$(-1)^{r_a}x_a, \quad (-1)^{r_a}v_a, \quad (5)$$

durch (4) in

$$(-1)^{r_a}x_a, \quad -(-1)^{r_a}v_a \quad (6)$$

umgewandelt. Dem Zeichen nach wird also, wenn r_a gerad ist, x_a weder durch (3), noch durch (4) geändert, v_a durch (3) ungeändert, durch (4) geändert, und wenn r_a ungerad ist, x_a sowohl durch (3), als durch (4) geändert, v_a durch (3) geändert, durch (4) ungeändert. Der Zuwachs (3) ist von der Phase $t+t_a$ unabhängig, jener (4) davon abhängig.

Wenn man bloss t als veränderlich betrachtet, so geben (3) und (4), in denen nun das unter dem Differenzzeichen erscheinende t_a wegzudenken ist, die Zuwächse der Zeit t an, welche den numerischen Werth von x_a und v_a für dasselbe t_a nicht ändern. Wenn man hingegen blos t_a als veränderlich ansieht, so geben (3) und (4), in denen nun das unter dem Differenzzeichen erscheinende t zu unterdrücken ist, die Zuwächse der Anfangsphase t_a an, welche den numerischen Werth von x_a und v_a für dasselbe t nicht ändern.

Den zunächst folgenden Untersuchungen möge die blosse Veränderlichkeit der Zeit zu Grunde liegen. Von denselben werden sich die Untersuchungen im §. 3 weder auf besondere Werthe der Anfangsphasen, noch jene der Zeit, die Untersuchungen im §. 4 auf besondere Werthe der Anfangsphasen, nicht aber jene der Zeit, die Untersuchungen im §. 5 auf besondere Werthe der Zeit, nicht aber jene der Anfangsphasen, die Untersuchungen im §. 6 endlich sowohl auf besondere Werthe der Anfangsphasen, als jene der Zeit beziehen.

§. 3.

Allgemeine Eigenschaften der Schwingungscurven überhaupt.

Soll ein Zeitzuwachs (3) den numerischen Werth aller Coordinaten und Coordinatgeschwindigkeiten ungeändert lassen, so müssen die Gleichungen

$$r_1 T_1 = r_2 T_2 = \ldots = r_n T_n$$

in ganzen Zahlen für $r_1, r_2, \ldots r_n$ lösbar sein. Die allgemeine Bedingung dafür ist, dass

$$r_1 T_1 = r_2 T_2 = \ldots = r_n T_n = r T$$

ist. Hieraus erhalten wir für $r_1, r_2, \ldots r_n$

$$r_1 = r(1),\ r_2 = r(2), \ldots r_n = (n), \tag{7}$$

und mit Hilfe eines beliebigen dieser Werthe aus (3) für den gesuchten Zeitzuwachs

$$\Delta t = r \frac{T}{2}. \tag{8}$$

Er bewirkt zu Folge (5), dass der schwingende Punkt, der vor demselben den Punkt

$$x_1, x_2, \ldots x_n \tag{9}$$

mit den Coordinatgeschwindigkeiten

$$v_1, v_2, \ldots v_n \tag{10}$$

passirte, in den Punkt

$$(-1)^{r_1} x_1, (-1)^{r_2} x_2, \ldots (-1)^{r_n} x_n \tag{11}$$

mit den Coordinatgeschwindigkeiten

$$(-1)^{r_1} v_1, (-1)^{r_2} v_2, \ldots (-1)^{r_n} v_n \tag{12}$$

gelangt.

Ist r eine Zahl von der Form $2r$, so übergeht (8) in

$$\Delta t = rT, \tag{13}$$

und, da die Zahlen (7) gerad werden, (11) und (12) in (9) und (10). Nach jedesmaligem Zeitzuwachse (13) kehren hiemit dieselben Werthe aller Coordinaten und Coordinatgeschwindigkeiten zurück, die vor demselben bestanden. Erwägt man überdies, dass den Gleichungen (1) und (2) zufolge alle Coordinaten und Coordinatgeschwindigkeiten für jedes Zeitintervall stetig und endlich bleiben, so sieht man ein, dass die Schwingungscurve ein stetiger und endlicher Linienzug ist, der vom schwingenden Punkte in der Zeit

$$\Delta t = T \tag{14}$$

einmal umlaufen wird. Der Sinn der Bewegung wird durch die Gleichungen (2) angezeigt.

Ist aber r eine Zahl von der Form $2r + 1$, so übergeht (8) in

$$\Delta t = (2r + 1)\frac{T}{2}, \tag{15}$$

und, da die Zahlen (7) in Bezug auf Geradheit oder Ungeradheit mit den Schwingungszahlen

$$(1), (2), \ldots (n) \tag{16}$$

beziehungsweise von gleicher Natur, oder, wie wir diese Eigenschaft nennen wollen, gleichgeltend werden, (11) und (12) in

$$(-1)^{(1)} x_1, (-1)^{(2)} x_2, \ldots (-1)^{(n)} x_n, \tag{17}$$

$$(-1)^{(1)} v_1, (-1)^{(2)} v_2, \ldots (-1)^{(n)} v_n. \tag{18}$$

Nennt man die Punkte (9) und (11) symmetrisch in Bezug auf ihre Projection auf den Coordinatraum, auf welchen sich die geraden der Exponenten r beziehen, so lässt sich das gefundene Resultat in folgende Worte kleiden: Die Schwingungscurve besteht aus zwei Ästen, die in Bezug auf die Projection derselben auf den Coordinatraum, auf welchen sich die geraden der Schwingungszahlen (16) beziehen, symmetrisch sind. Wenn daher keine der Schwingungszahlen (16) gerad ist, so ist die Schwin-

gungscurve in Bezug auf ihre Projection auf den Coordinat ursprung symmetrisch, d. i. sie besitzt einen Mittelpunkt im Ursprunge der Coordinaten. Zum Anfangspunkte der symmetrischen Äste der Schwingungscurve kann ein beliebiger Punkt der Curve genommen werden. Jeder der symmetrischen Äste der Schwingungscurve wird vom schwingenden Punkte in der Zeit

$$\Delta t = \frac{1}{2} T$$

einmal und mit Coordinatgeschwindigkeiten umlaufen, die mit denen des andern im angegebenen Sinne symmetrisch sind.

Aus obigen Resultaten, und der bekannten Beziehung der Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum x_{zk} zu der, diesem Coordinatraume entsprechenden Schwingungscurve ziehen wir nachstehende Folgerungen:

1. Nach jedesmaligem Zeitzuwachse

$$\Delta t = r T_{zk} \tag{19}$$

kehren dieselben Werthe der Coordinaten x_{zk} und Coordinatgeschwindigkeiten v_{zk} zurück, die vor demselben bestanden.

2. Die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum x_{zk} wird von der Projection des schwingenden Punktes in der Zeit

$$\Delta t = T_{zk}$$

einmal, also in der Zeit (14), (z_k)mal umlaufen. Dieselbe besteht aus zwei Ästen, die in Bezug auf die Projection derselben auf den Coordinatraum, auf welchen sich die geraden der Schwingungszahlen

$$(a)_{zk}, (b)_{zk}, \ldots (i)_{zk} \tag{20}$$

beziehen, symmetrisch sind. Wenn keine der Schwingungszahlen (20) gerad ist, so ist die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum x_{zk} in Bezug auf ihre Projection auf den Coordinatursprung symmetrisch, d. i. sie besitzt einen Mittelpunkt im Ursprunge der Coordinaten. Zum Anfangspunkte der symmetrischen Äste der Projection kann ein beliebiger Punkt der Curve genommen werden. Jeder der symmetrischen Äste der

Projection wird von der Projection des schwingenden Punktes in der Zeit

$$\Delta t = \frac{1}{2} T_{zk}$$

einmal und mit Coordinatgeschwindigkeiten umlaufen, die mit denen des andern im angegebenen Sinne symmetrisch sind.

Die Zeitzuwächse

$$\Delta t = r T_{\underline{a}} \tag{21}$$

ertheilen den Coordinaten $x_{\underline{a}}$ nach (19) keine Werthänderung, hingegen der Coordinate x_a wegen

$$\frac{\Delta t}{T_a} = \frac{r T_{\underline{a}}}{T_a} = \frac{r(a)}{(\underline{a})}$$

$(\underline{a})$ verschiedene Werthe, die im nachstehenden Ausdrucke

$$x_a = a_a \cos 2\pi \left(\frac{t + t_a}{T_a} \right) = \frac{r(a)}{(\underline{a})} \Big) \tag{22}$$

enthalten sind. Nennt man Punkte, die verschiedenen Werthsystemen der Coordinaten entsprechen, verschieden, so ist die Zahl der verschiedenen Punkte der Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der $\underline{a}$-Schwingungscurve für verschiedene Zeitzuwächse (21) angehören, sonach

$$(\underline{a}).$$

Die Zeitzuwächse

$$\Delta t = r T_{\underline{a,b}} \tag{23}$$

ertheilen den Coordinaten $x_{\underline{a,b}}$ keine Werthänderung, hingegen den Coordinaten $x_{a,b}$ wegen

$$\frac{\Delta t}{T_a} = \frac{r T_{\underline{a,b}}}{T_a} = \frac{r(a)_b}{(\underline{a,b})_b} = \frac{r(a)}{(\underline{a,b})},$$

$$\frac{\Delta t}{T_b} = \frac{r T_{\underline{a,b}}}{T_b} = \frac{r(b)_a}{(\underline{a,b})_a} = \frac{r(b)}{(\underline{a,b})}$$

$(\underline{a,b})$ verschiedene Werthsysteme, die in nachstehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} x_a &= a_a \cos 2\pi \left(\frac{t + t_a}{T_a} + \frac{r(a)}{\underline{(a,b)}} \right), \\ x_b &= a_b \cos 2\pi \left(\frac{t + t_b}{T_b} + \frac{r(b)}{\underline{(a,b)}} \right) \end{aligned} \tag{24}$$

enthalten sind. Die Zahl der verschiedenen Punkte der Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der $\underline{a,b}$-Schwingungscurve für verschiedene Zeitzuwächse (23) angehören, ist sonach

$$\underline{(a,b)}.$$

Die Zeitzuwächse

$$\Delta t = r T_{\underline{a,b,c}} \tag{25}$$

ertheilen den Coordinaten $x_{\underline{a,b,c}}$ keine Werthänderung, hingegen den Coordinaten $x_{a,b,c}$ wegen

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{T_a} &= \frac{r T_{\underline{a,b,c}}}{T_a} = \frac{r(a)_{\underline{b,c}}}{\underline{(a,b,c)}_{\underline{b,c}}} = \frac{r(a)}{\underline{(a,b,c)}}, \\ \frac{\Delta t}{T_b} &= \frac{r T_{\underline{a,b,c}}}{T_b} = \frac{r(b)_{\underline{c,a}}}{\underline{(a,b,c)}_{\underline{c,a}}} = \frac{r(b)}{\underline{(a,b,c)}}, \\ \frac{\Delta t}{T_c} &= \frac{r T_{\underline{a,b,c}}}{T_c} = \frac{r(c)_{\underline{a,b}}}{\underline{(a,b,c)}_{\underline{a,b}}} = \frac{r(c)}{\underline{(a,b,c)}} \end{aligned}$$

$\underline{(a,b,c)}$ verschiedene Werthsysteme, die in nachstehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} x_a &= a_a \cos 2\pi \left(\frac{t + t_a}{T_a} + \frac{r(a)}{\underline{(a,b,c)}} \right), \\ x_b &= a_b \cos 2\pi \left(\frac{t + t_b}{T_b} + \frac{r(b)}{\underline{(a,b,c)}} \right), \\ x_c &= a_c \cos 2\pi \left(\frac{t + t_c}{T_c} + \frac{r(c)}{\underline{(a,b,c)}} \right) \end{aligned} \tag{26}$$

enthalten sind. Die Zahl der verschiedenen Punkte der Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der $\underline{a,b,c}$-Schwingungscurve für verschiedene Zeitzuwächse (25) angehören, ist sonach

$$\underline{(a,b,c)}.$$

Analoge Schlüsse lassen ersehen, dass überhaupt die Zeitzuwächse

$$\Delta t = r T_{\underline{z_k}} \tag{27}$$

den Coordinaten x_{z_k} keine Werthänderung, hingegen den Coordinaten $x_{\bar{z}_k}$, $(\underline{z_k})$ verschiedene Werthsysteme ertheilen, die in nachstehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} x_a &= a_a \cos 2\pi \left(\frac{t + t_a}{T_a} + \frac{r(a)}{(\underline{z_k})} \right), \\ x_b &= a_b \cos 2\pi \left(\frac{t + t_b}{T_b} + \frac{r(b)}{(\underline{z_k})} \right), \\ &\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ x_i &= a_i \cos 2\pi \left(\frac{t + t_i}{T_i} + \frac{r(i)}{(\underline{z_k})} \right) \end{aligned} \tag{28}$$

enthalten sind, und dass die Zahl der verschiedenen Punkte der Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der $\underline{z_k}$-Schwingungscurve für verschiedene Zeitzuwächse (27) angehören,

$$(\underline{z_k})$$

ist.

Für die directe Bezeichnungsart der Zeigergruppe in (27) sprechen sich diese Sätze folgendermassen aus: Die Zeitzuwächse

$$\Delta t = r T_{z_k} \tag{29}$$

ertheilen den Coordinaten x_{z_k} keine Werthänderung, hingegen den Coordinaten $x_{\bar{z}_k}$, (z_k) verschiedene Werthsysteme, die in nachstehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} x_p &= a_p \cos 2\pi \left(\frac{t + t_p}{T_p} + \frac{r(p)}{(z_k)} \right), \\ x_q &= a_q \cos 2\pi \left(\frac{t + t_q}{T_q} + \frac{r(q)}{(z_k)} \right), \\ &\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ x_s &= a \cos 2\pi \left(\frac{t + t_s}{T_s} + \frac{r(s)}{(z_k)} \right) \end{aligned} \tag{30}$$

enthalten sind. Die Zahl der verschiedenen Punkte der Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der z_k-Schwingungscurve für verschiedene Zeitzuwächse (29) angehören, ist

$$(z_k).$$

Aus der Reihe der speciellen Fälle, deren allgemeines Gesetz soeben angegeben worden ist, heben wir noch die zwei Endglieder hervor.

Die Zeitzuwächse

$$\Delta t = rT_{a,b} \tag{31}$$

ertheilen den Coordinaten $x_{a,b}$ keine Werthänderung, hingegen den Coordinaten $x_{\underline{a,b}}$, (a, b) verschiedene Werthsysteme, die in nachstehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} x_c &= a_c \cos 2\pi \left(\frac{t+t_c}{T_c} + \frac{r(c)}{(a, b)} \right), \\ x_d &= a_d \cos 2\pi \left(\frac{t+t_d}{T_d} + \frac{r(d)}{(a, b)} \right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s &= a_s \cos 2\pi \left(\frac{t+t_s}{T_s} + \frac{r(s)}{(a, b)} \right) \end{aligned} \tag{32}$$

enthalten sind. Die Zahl der verschiedenen Punkte der Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der a, b-Schwingungscurve für verschiedene Zeitzuwächse (31) angehören, ist

$$(a, b).$$

Die Zeitzuwächse

$$\Delta t = rT_a \tag{33}$$

endlich ertheilen nur der Coordinate x_a keine Werthänderung, hingegen den Coordinaten $x_{\underline{a}}$, (a) verschiedene Werthsysteme, die in nachstehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} x_b &= a_b \cos 2\pi \left(\frac{t+t_b}{T_b} + \frac{r(b)}{(a)} \right), \\ x_c &= a_c \cos 2\pi \left(\frac{t+t_c}{T_c} + \frac{r(c)}{(a)} \right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s &= a_s \cos 2\pi \left(\frac{t+t_s}{T_s} + \frac{r(s)}{(a)} \right) \end{aligned} \tag{34}$$

enthalten sind. Die Zahl der verschiedenen Punkte der Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der a-Schwingungscurve für verschiedene Zeitzuwächse (33) angehören, ist

$$(a).$$

§. 4.

Allgemeine Eigenschaften besonderer Schwingungscurven.

Soll ein Zeitzuwachs (4) den numerischen Werth aller Coordinaten und Coordinatgeschwindigkeiten ungeändert lassen, so müssen die Gleichungen

$$r_1 T_1 - 4t_1 = r_2 T_2 - 4t_2 = \ldots = r_n T_n - 4t_n \qquad (35)$$

in ganzen Zahlen für $r_1, r_2, \ldots r_n$ lösbar sein. Diese Forderung schreibt vor allem Andern allen Anfangsphasen besondere Werthformen, und zwar, wenn

$$r_1 T_1 - 4t_1 = r_2 T_2 - 4t_2 = \ldots = r_n T_n - 4t_n = -4t_0$$

gesetzt wird, unter t_0 eine beliebige Zeitgrösse verstanden, die folgenden

$$t_1 = r_1 \frac{T_1}{4} + t_0, \quad t_2 = r_2 \frac{T_2}{4} + t_0, \ldots t_n = r_n \frac{T_n}{4} + t_0 \qquad (36)$$

vor. Es seien also, unter $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots \mathfrak{r}_n$ gegebene ganze Zahlen und unter t_0 eine gegebene Zeitgrösse verstanden,

$$t_1 = \mathfrak{r}_1 \frac{T_1}{4} + t_0, \; t_2 = \mathfrak{r}_2 \frac{T_2}{4} + t_0, \ldots t_n = \mathfrak{r}_n \frac{T_n}{4} + t_0 \qquad (37)$$

gegebene, der Vorschrift entsprechende Werthe der Anfangsphasen. Dieselben wandeln die Gleichungen (35) in folgende

$$(r_1 - \mathfrak{r}_1)\, T_1 = (r_2 - \mathfrak{r}_2)\, T_2 = \ldots = (r_n - \mathfrak{r}_n)\, T_n$$

um. Die allgemeine Bedingung der genannten Lösbarkeit derselben ist, dass

$$(r_1 - \mathfrak{r}_1)\, T_1 = (r_2 - \mathfrak{r}_2)\, T_2 = \ldots = (r_n - \mathfrak{r}_n)\, T_n = rT$$

ist. Hieraus erhalten wir für $r_1, r_2, \ldots r_n$

$$r_1 = r(1) + \tau_1,\ r_2 = r(2) + \tau_2,\ \ldots\ r_n = r(n) + \tau_n, \tag{38}$$

und mit Hilfe eines beliebigen der Werthe (38), und des entsprechenden der Werthe (37) aus (4) für den gesuchten Zeitzuwachs

$$\Delta t = r\frac{T}{2} - 2(t + t_0). \tag{39}$$

Er bewirkt zu Folge (6), dass der schwingende Punkt, der vor demselben den Punkt (9) mit den Coordinatgeschwindigkeiten (10) passirte, in den Punkt

$$(-1)^{r_1}x_1,\quad (-1)^{r_2}x_2,\ \ldots\ (-1)^{r_n}x_n \tag{40}$$

mit den Coordinatgeschwindigkeiten

$$-(-1)^{r_1}v_1,\ -(-1)^{r_2}v_2, \ldots\ -(-1)^{r_n}v_n \tag{41}$$

gelangt.

Ist r eine Zahl von der Form $2r$, so übergeht (39) in

$$\Delta t = rT - 2(t + t_0), \tag{42}$$

und, da die Zahlen (38) mit den Zahlen

$$\tau_1,\ \tau_2, \ldots\ \tau_n \tag{43}$$

gleichgeltend werden, (40) und (41) in

$$(-1)^{\tau_1}x_1,\quad (-1)^{\tau_2}x_2,\ \ldots\ (-1)^{\tau_n}x_n \tag{44}$$

$$-(-1)^{\tau_1}v_1, -(-1)^{\tau_2}v_2, \ldots -(-1)^{\tau_n}v_n. \tag{45}$$

Ist aber r eine Zahl von der Form $2r+1$, so übergeht (39) in

$$\Delta t = (2r + 1)\frac{T}{2} - 2(t + t_0), \tag{46}$$

und, da die Zahlen (38) mit den Zahlen

$$\tau_1 + (1),\ \tau_2 + (2), \ldots\ \tau_n + (n) \tag{47}$$

gleichgeltend werden, (40) und (41) in

$$(-1)^{\tau_1+(1)}x_1,\quad (-1)^{\tau_2+(2)}x_2,\ \ldots\ (-1)^{\tau_n+(n)}x_n, \tag{48}$$

$$-(-1)^{\tau_1+(1)}v_1, -(-1)^{\tau_2+(2)}v_2, \ldots -(-1)^{\tau_n+(n)}v_n. \tag{49}$$

Wenn die Zahlen (43) entweder alle gerad, oder mit den Schwingungszahlen (16) gleichgeltend sind, so ist im ersten Falle (44) von (9), und (48) von (17); im zweiten (48) von (9), und (44) von (17) nicht verschieden. Es führt sonach im ersten Falle der Zeitzuwachs (42) zum Punkte (9), jener (46) zum Punkte (17); im zweiten der Zeitzuwachs (46) zum Punkte (9), jener (42) zum Punkte (17). Die Coordinatgeschwindigkeiten (45) und (49) sind aber immer alle entgegengesetzt denjenigen der Coordinatgeschwindigkeiten (10) und (18), welche sich auf die zusammenfallenden Punkte beziehen.

Wenn dagegen die Zahlen (43) weder alle gerad, noch mit den Schwingungszahlen (16) gleichgeltend sind, so sind sowohl (44) als (48) sowohl von (9) als (17) verschieden. Dem Punkte (9) der Schwingungscurve entspricht sonach nicht nur der symmetrische Punkt (17) sondern auch noch jeder der symmetrischen Punkte (44) und (48). Die letzteren Punkte stehen zu einander in demselben Symmetrieverhältnisse, wie die ersteren.

Die gefundenen Resultate lassen sich in folgende Worte kleiden:

Wenn alle Anfangsphasen die durch (37) angegebenen Werthformen besitzen, in denen die Zahlen (43) entweder alle gerad, oder mit den Schwingungszahlen (16) gleichgeltend sind, so fallen zwei Äste der Schwingungscurve, die bei anderen Werthformen der Anfangsphasen gesondert sind, in einander zusammen. Die beiden zusammenfallenden Äste werden vom schwingenden Punkte im entgegengesetzten Sinne durchwandert. Wir wollen diese besondere Schwingungscurve die zusammenfallende nennen.

Wenn alle Anfangsphasen die durch (37) angegebenen Werthformen besitzen, in denen die Zahlen (43) weder alle gerad, noch mit den Schwingungszahlen (16) gleichgeltend sind, so ist die Schwingungscurve nicht nur in Bezug auf ihre Projection auf den Coordinatraum, auf welchen sich die geraden der Schwingungszahlen (16) beziehen, sondern auch in Bezug auf ihre Projection auf den Coordinatraum, auf welchen sich die geraden der Zahlen (43), so wie auch auf den Coordinatraum, auf welchen sich die geraden der Zahlen (47) beziehen, symme-

trisch. Wir wollen diese besondere Schwingungscurve die **doppelt symmetrische** nennen.

Die angegebenen Kriterien der genannten besonderen Schwingungscurven setzen uns in den Stand, zu entscheiden, ob eine Schwingungscurve, deren Anfangsphasen in den Formen $t_1, t_2, \ldots t_n$ gegeben sind, der einen oder anderen Art dieser Curven angehört, oder nicht. Man bilde zu dem Ende die Gleichungen (36), und aus ihnen die folgenden

$$\frac{1}{4}(r_a T_a - r_b T_b) = t_a - t_b, \ \frac{1}{4}(r_a T_a - r_c T_c) = t_a - t_c, \ \ldots \\ \frac{1}{4}(r_a T_a - r_s T_s) = t_a - t_s,$$

oder, wenn im Allgemeinen

$$4(h)_{a,h}\frac{t_a - t_h}{T_a} = 4(a)_{a,h}\frac{t_a - t_h}{T_h} = \tau_{a,h}$$

gesetzt wird, die folgenden

$$r_a(b)_{a,b} - r_b(a)_{a,b} = \tau_{a,b}, \ r_a(c)_{a,c} - r_c(a)_{a,c} = \tau_{a,c}, \ \ldots \\ r_a(s)_{a,s} - r_s(a)_{a,s} = \tau_{a,s}. \quad (50)$$

Die erwähnte Entscheidung wird nun auf Grundlage der Untersuchung vorgenommen, ob die Gleichungen (50) in ganzen Zahlen für $r_1, r_2, \ldots r_n$ lösbar sind, oder nicht. Im ersten Falle gehört die Schwingungscurve der einen oder anderen Art der genannten besonderen Schwingungscurven an, im zweiten nicht. Ist im ersten Falle

$$\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n \quad (51)$$

ein System der Werthe von $r_1, r_2, \ldots r_n$, welches die Gleichungen (50) auf die genannte Art löst, so ist jedes andere derartige System entweder mit dem Systeme (51), oder mit dem folgenden

$$\tau_1 + (1), \tau_2 + (2), \ldots \tau_n + (n) \quad (52)$$

gleichgeltend, da die Schwingungscurve, im Falle sie überhaupt zu den genannten besonderen Schwingungscurven gehört, nur der einen, oder nur der andern Art derselben angehören kann.

Die Art der Besonderheit der Curve kann sonach aus der Beschaffenheit der Zahlen (51) oder (52) erkannt werden.

Hat man sich für das System (51) entschieden, so liefert eine beliebige der Gleichungen (37) den Werth von t_0. Die Kenntniss dieses Werthes erlaubt in jeder der betrachteten Schwingungscurven den Anfangspunkt der Zeit t so anzunehmen, dass die Anfangsphasen die Werthformen

$$t_1 = \tau_1 \frac{T_1}{4}, \quad t_2 = \tau_2 \frac{T_2}{4}, \quad \ldots \quad t_n = \tau_n \frac{T_n}{4} \tag{53}$$

bekommen. Man braucht zu diesem Ende nur den Anfangspunkt der Zeit um

$$\tau \frac{T}{4} + t_0 \tag{54}$$

zurückzuschieben. Für den neuen Anfangspunkt der Zeit erhält der Zeitzuwachs (39) die Werthform

$$\Delta t = r \frac{T}{2} - 2t. \tag{55}$$

In der zusammenfallenden Schwingungscurve lässt sich der Anfangspunkt der Zeit gleichzeitig immer so annehmen, dass die Anfangsphasen die Werthformen

$$t_1 = \tau_1 \frac{T_1}{2}, \; t_2 = \tau_2 \frac{T_2}{2}, \quad \ldots \quad t_n = \tau_n \frac{T_n}{2} \tag{56}$$

bekommen. Man braucht zu diesem Ende nur die Zahl τ in (54), wenn die Zahlen (51) alle gerad sind, eine gerade, und wenn dies nicht der Fall ist, eine ungerade sein lassen. Für den neuen Anfangspunkt der Zeit ist von den Zeitzuwächsen (42), (46) derjenige, der den Punkt (9) ungeändert lässt, jener (42); er erhält nun die Werthform

$$\Delta t = rT - 2t. \tag{57}$$

Wir wollen eine Zeitzählung, in Bezug auf welche die Anfangsphasen, in der zusammenfallenden Schwingungscurve die Werthformen (56), in der doppelt symmetrischen jene (53) bekommen, eine der betreffenden Curve entsprechende natürliche

nennen, und uns derselben in diesen Curven immer bedienen, weil dadurch alle auf dieselben sich beziehenden Formeln eine einfachere Gestalt bekommen.

Aus obigen Resultaten, und der bekannten Beziehung der Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum x_{z_k} zu der, diesem Coordinatraume entsprechenden Schwingungscurve ziehen wir nachstehende Folgerungen:

1. Wenn die Anfangsphasen, auf welche z_k hinweiset, die Werthformen

$$t_a = \tau_a \frac{T_a}{4} + t_0, \; t_b = \tau_b \frac{T_b}{4} + t_0, \; \ldots \; t_i = \tau_i \frac{T_i}{4} + t_0 \quad (58)$$

besitzen, so ist die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum x_{z_k} eine besondere, und zwar zusammenfallend, wenn die τ entweder alle gerad, oder mit den Schwingungszahlen (20) gleichgeltend sind, und doppelt symmetrisch, wenn die τ anders beschaffene ganze Zahlen sind. Eine Zeitzählung, in Bezug auf welche die Anfangsphasen (58) in der zusammenfallenden Projection die Werthformen

$$t_a = \tau_a \frac{T_a}{2}, \; t_b = \tau_b \frac{T_b}{2}, \; \ldots \; t_i = \tau_i \frac{T_i}{2},$$

in der doppelt symmetrischen jene

$$t_a = \tau_a \frac{T_a}{4}, \; t_b = \tau_b \frac{T_b}{4}, \; \ldots \; t_i = \tau_i \frac{T_i}{4}$$

bekommen, ist eine der betreffenden besonderen Projection entsprechende natürliche, deren wir uns in Schwingungscurven, welchen diese Projection zukommt, bei Betrachtung der sich auf diese Projection beziehenden Eigenschaften derselben immer bedienen wollen. In einer Schwingungscurve, deren Projection auf den Coordinatraum x_{z_k} zusammenfallend ist, kehren nach jedesmaligem Zeitzuwachse

$$\Delta t = rT_{z_k} - 2t \quad (59)$$

dieselben Werthe der Coordinaten x_{z_k} zurück, die vor demselben bestanden, und in einer Schwingungscurve, deren Projection auf

den Coordinatraum x_{z_k} doppelt symmetrisch ist, entspricht dem Punkte

$$x_a, x_b, \ldots x_i$$

der Projection nicht nur der Symmetriepunkt

$$(-1)^{(a)z_k} x_a,\ (-1)^{(b)z_k} x_b, \ldots (-1)^{(i)z_k} x_i,$$

sondern auch noch die Symmetriepunkte

$$(-1)^{\tau_a} x_a, \quad (-1)^{\tau_b} x_b, \quad \ldots \quad (-1)^{\tau_i} x_i:$$
$$(-1)^{\tau_a+(a)z_k} x_a,\ (-1)^{\tau_b+(b)z_k} x_b, \ldots (-1)^{\tau_i+(i)z_k} x_i.$$

2. Die Projection der zusammenfallenden Schwingungscurve auf den Coordinatraum x_{z_k} ist immer zusammenfallend, und eine Zeitzählung, die in Bezug auf die zusammenfallende Schwingungscurve eine natürliche ist, ist es auch in Bezug auf jene Projection. Die Projection der doppelt symmetrischen Schwingungscurve auf den Coordinatraum x_{z_k} ist zusammenfallend oder doppelt symmetrisch, ersteres, wenn die τ in (37), auf welche z_k hinweiset, entweder alle gerad, oder mit den Schwingungszahlen (20) gleichgeltend sind, letzteres wenn diese τ anders beschaffene ganze Zahlen sind.

Wenn die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{\underline{a}}$ zusammenfallend ist, so ertheilen die Zeitzuwächse

$$\Delta t = r T_{\underline{a}} - 2t \tag{60}$$

den Coordinaten $x_{\underline{a}}$ nach (59) keine Werthänderung, hingegen der Coordinate x_a, $(\underline{a})$ verschiedene Werthe, die im nachstehenden Ausdrucke

$$x_a = u_a \cos 2\pi \left(\frac{t - t_a}{T_a} - \frac{r(a)}{(\underline{a})} \right) \tag{61}$$

enthalten sind. Die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der $\underline{a}$-Schwingungscurve für verschiedene Zeitzuwächse (60) angehören, ist sonach

$$(\underline{a}).$$

Wenn die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{\underline{a,b}}$ zusammenfallend ist, so ertheilen die Zeitzuwächse

$$\Delta t = r T_{\underline{a,b}} - 2t \tag{62}$$

den Coordinaten $x_{\underline{a,b}}$ keine Werthänderung, hingegen den Coordinaten $x_{a,b}$, $(\underline{a,b})$ verschiedene Werthsysteme, die in nachstehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} x_a &= a_a \cos 2\pi \left(\frac{t-t_a}{T_a} - \frac{r(a)}{(\underline{a,b})} \right), \\ x_b &= a_b \cos 2\pi \left(\frac{t-t_b}{T_b} - \frac{r(b)}{(\underline{a,b})} \right) \end{aligned} \tag{63}$$

enthalten sind. Die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der a,b-Schwingungscurve für verschiedene Zeitzuwächse (62) angehören, ist sonach

$$(\underline{a,b}).$$

Analoge Schlüsse lassen ersehen, dass, wenn überhaupt die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{\underline{z_k}}$ zusammenfallend ist, die Zeitzuwächse

$$\Delta t = r T_{\underline{z_k}} - 2t \tag{64}$$

den Coordinaten $x_{\underline{z_k}}$ keine Werthänderung, hingegen den Coordinaten x_{z_k}, $(\underline{z_k})$ verschiedene Werthsysteme ertheilen, die in nachstehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} x_a &= a_a \cos 2\pi \left(\frac{t-t_a}{T_a} - \frac{r(a)}{(\underline{z_k})} \right), \\ x_b &= a_b \cos 2\pi \left(\frac{t-t_b}{T_b} = \frac{r(b)}{(\underline{z_k})} \right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i &= a_i \cos 2\pi \left(\frac{t-t_i}{T_i} - \frac{r(i)}{(\underline{z_k})} \right) \end{aligned} \tag{65}$$

enthalten sind, und dass die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der

z_k-Schwingungscurve für verschiedene Zeitzuwächse (64) angehören,

$$(\underline{z_k})$$

ist.

Für die directe Bezeichnungsart der Zeigergruppe in (64) sprechen sich diese Sätze folgendermassen aus: Wenn die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum x_{z_k} zusammenfallend ist, so ertheilen die Zeitzuwächse

$$\Delta t = rT_{z_k} - 2t \tag{66}$$

den Coordinaten x_{z_k} keine Werthänderung, hingegen den Coordinaten $x_{\underline{z_k}}$, (z_k) verschiedene Werthsysteme, die in nachstehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} x_p &= a_p \cos 2\pi \left(\frac{t-t_p}{T_p} - \frac{r(p)}{(z_k)}\right), \\ x_q &= a_q \cos 2\pi \left(\frac{t-t_q}{T_q} - \frac{r(q)}{(z_k)}\right), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_s &= a_s \cos 2\pi \left(\frac{t-t_s}{T_s} - \frac{r(s)}{(z_k)}\right) \end{aligned} \tag{67}$$

enthalten sind. Die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der z_k-Schwingungscurve für verschiedene Zeitzuwächse (66) angehören, ist

$$(z_k).$$

Aus der Reihe der speciellen Fälle, deren allgemeines Gesetz soeben angegeben worden ist, heben wir noch die zwei Endglieder hervor.

Wenn die Projection der Schwingungscurve auf die Coordinatebene $x_{a,b}$ zusammenfallend ist, so ertheilen die Zeitzuwächse

$$\Delta t = rT_{a,b} - 2t \tag{68}$$

den Coordinaten $x_{a,b}$ keine Werthänderung, hingegen den Coordinaten $x_{\underline{a,b}}$, (a,b) verschiedene Werthsysteme, die in nachstehenden Ausdrücken

$$x_c = a_c \cos 2\pi \left(\frac{t - t_c}{T_c} - \frac{r(c)}{(a,b)} \right),$$
$$x_d = a_d \cos 2\pi \left(\frac{t - t_d}{T_d} - \frac{r(d)}{(a,b)} \right), \qquad (69)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_s = a_s \cos 2\pi \left(\frac{t - t_s}{T_s} - \frac{r(s)}{(a,b)} \right)$$

enthalten sind. Die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der a, b-Schwingungscurve für verschiedene Zeitzuwächse (68) angehören, ist

$$(a, b).$$

Da die Projection der Schwingungscurve auf die Coordinataxe x_a, d. i. die dieser Axe entsprechende Schwingungscurve immer zusammenfallend ist, so ertheilen die Zeitzuwächse

$$\Delta t = r T_a - 2t \qquad (70)$$

der Coordinate x_a keine Werthänderung, hingegen den Coordinaten $x_{\underline{a}}$, (a) verschiedene Werthsysteme, die in nachstehenden Ausdrücken

$$x_b = a_b \cos 2\pi \left(\frac{t - t_b}{T_b} - \frac{r(b)}{(a)} \right),$$
$$x_c = a_c \cos 2\pi \left(\frac{t - t_c}{T_c} - \frac{r(c)}{(a)} \right), \qquad (71)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_s = a_s \cos 2\pi \left(\frac{t - t_s}{T_s} - \frac{r(s)}{(a)} \right)$$

enthalten sind. Die Zahl der verschiedenen Punkte der Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der a-Schwingungscurve für verschiedene Zeitzuwächse (70) angehören, ist

$$(a).$$

Wenn die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{\underline{a}}$ nicht zusammenfallend ist, so gibt es ausser den Zeitzuwächsen (21) keine anderen, welche den Coordinaten $x_{\underline{a}}$

keine Werthänderung ertheilen. Einem bestimmten Werthsysteme der Coordinaten $x_{\underline{a}}$ entsprechen daher nur die verschiedenen Werthe (22) der Coordinate x_a. Die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der $\underline{a}$-Schwingungscurve angehören, ist sonach

$$(\underline{a}).$$

Dieselben liegen in einer a-Schwingungscurve.

Wenn die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{\underline{a,b}}$ nicht zusammenfallend ist, so gibt es ausser den Zeitzuwächsen (23) keine anderen, welche den Coordinaten $x_{\underline{a,b}}$ keine Werthänderung ertheilen. Einem bestimmten Werthsysteme der Coordinaten $x_{\underline{a,b}}$ entsprechen daher nur die verschiedenen Werthsysteme (24) der Coordinaten $x_{a,b}$. Die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der $\underline{a},\underline{b}$-Schwingungscurve angehören, ist sonach

$$(a, \underline{b}).$$

Dieselben liegen in einer a,b-Schwingungscurve, und zwar gleichzeitig in $(\underline{a,b})_{\underline{a}}$, a-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{a})$ enthält, und in $(a,\underline{b})_{\underline{b}}$, b-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{b})$ besitzt.

Wenn die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{\underline{a,b,c}}$ nicht zusammenfallend ist, so gibt es ausser den Zeitzuwächsen (25) keine anderen, welche den Coordinaten $x_{\underline{a,b,c}}$ keine Werthänderung ertheilen. Einem bestimmten Werthsysteme der Coordinaten $x_{\underline{a,b,c}}$ entsprechen daher nur die verschiedenen Werthsysteme (26) der Coordinaten $x_{a,b,c}$. Die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der $\underline{a,b,c}$-Schwingungscurve angehören, ist sonach

$$(\underline{a,b,c}).$$

Dieselben liegen in einer a,b,c-Schwingungscurve, und zwar gleichzeitig in $(\underline{a,b,c})_{\underline{a}}$, a-Schwingungscurven, deren jede ihrer

$(\underline{a})$ enthält, in $(\underline{a,b,c})_{\underline{b}}$, b-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{b})$ besitzt, und in $(\underline{a,bc})_{\underline{c}}$, c-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{c})$ aufnimmt. Sie liegen auch gleichzeitig in $(\underline{a,b,c})_{\underline{a,b}}$, a,b-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{a,b})$ enthält, in $(\underline{a,bc})_{\underline{b,c}}$, b,c-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{b,c})$ besitzt, und in $(\underline{a,b,c})_{\underline{c,a}}$, c,a-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{c,a})$ aufnimmt.

Analoge Schlüsse lassen ersehen, dass, wenn überhaupt die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{\underline{z_k}}$ nicht zusammenfallend ist, einem bestimmten Werthsysteme der Coordinaten $x_{\underline{z_k}}$ nur die verschiedenen Werthsysteme (28) der Coordinaten x_{z_k} entsprechen, und dass die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der $\underline{z_k}$-Schwingungscurve angehören,

$$(\underline{z_k})$$

ist. Dieselben liegen in einer z_k-Schwingungscurve, und zwar, unter $z_{k,,}$ überhaupt eine Zeigergruppe verstanden, welche in z_k ganz begriffen ist, in $(\underline{z_k})_{\underline{z_{k,,}}}$, $z_{k,,}$-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{z_{k,,}})$ enthält.

Für die directe Bezeichnungsart der Zeigergruppe in (27) sprechen sich diese Sätze folgendermassen aus: Wenn die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum x_{z_k} nicht zusammenfallend ist, so entsprechen einem bestimmten Werthsysteme der Coordinaten x_{z_k} nur die verschiedenen Werthsysteme (30) der Coordinaten $x_{\underline{z_k}}$. Die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der z_k-Schwingungscurve angehören, ist

$$(z_k).$$

Dieselben liegen in einer $\underline{z_k}$-Schwingungscurve, und zwar, unter $z_{k,}$ überhaupt eine Zeigergruppe verstanden, in welcher z_k ganz begriffen ist, in $(z_k)_{z_{k,}}$, $\underline{z_{k,}}$-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(z_{k,})$ enthält.

Aus der Reihe der speciellen Fälle, deren allgemeines Gesetz so eben angegeben worden ist, heben wir noch das Endglied hervor.

Wenn die Projection der Schwingungscurve auf die Coordinatebene $x_{a,b}$ nicht zusammenfallend ist, so entsprechen einem bestimmten Werthsysteme der Coordinaten $x_{a,b}$ nur die verschiedenen Werthsysteme (32) der Coordinaten $x_{\underline{a,b}}$. Die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der a, b-Schwingungscure angehören, ist

$$(a, b).$$

Dieselben liegen in einer $\underline{a,b}$-Schwingungscurve, und zwar in $(a, b)_{z_{k,}}$, $\underline{z_{k,}}$-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(z_{k,})$ enthält.

Wenn aber die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{\underline{a}}$ zusamenfallend ist, so gibt es ausser den Zeitzuwächsen (21) noch jene (60), welche den Coordinaten $x_{\underline{a}}$ keine Werthänderung ertheilen. Einem bestimmten Werthsysteme der Coordinaten $x_{\underline{a}}$ entsprechen daher nicht nur die verschiedenen Werthe (22), sondern auch jene (61) der Coordinate x_a. Da in Bezug auf dieDarstellung aller verschiedenen Werthe (22) und (61), insofern dieselben durch r erzeugt werden das Zeichen von r gleichgültig ist, so sind beide Arten der Werthe im nachstehenden Ausdrucke

$$x_a = a_a \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_a}{T_a} + \frac{r(a)}{(\underline{a})} \right) \tag{72}$$

enthalten. Wenn nicht zugleich die Schwingungscurve selbst zusammenfallend ist, so gehört bei keiner, der genannten Projection entsprechenden natürlichen Zeitzählung die Anfangsphase t_a der betreffenden der Werthformen (56) an, und daher ist jeder der Werthe (72) für das obere Zeichen des Doppelzeichens von dem entsprechenden für das untere verschieden. Die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der $\underline{a}$-Schwingungscurve angehören, ist sonach

$$2(\underline{a}).$$

Dieselben liegen in einer a-Schwingungscurve.

Wenn die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{\underline{a,b}}$ zusammenfallend ist, so gibt es ausser den Zeitzuwächsen (23) noch jene (62), welche den Coordinaten $x_{\underline{a,b}}$

keine Werthänderung ertheilen. Einem bestimmten Werthsysteme der Coordinaten $x_{\underline{a,b}}$ entsprechen daher nicht nur die verschiedenen Werthsysteme (24), sondern auch jene (63) der Coordinaten $x_{a,b}$. Beide Arten der Werthsysteme sind in nachstehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} x_a &= a_a \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_a}{T_a} + \frac{r(a)}{\underline{(a,b)}} \right), \\ x_b &= a_b \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_b}{T_b} + \frac{r(b)}{\underline{(a,b)}} \right) \end{aligned} \qquad (73)$$

enthalten. Wenn nicht zugleich die Schwingungscurve selbst zusammenfallend ist, so gehören bei keiner, der genannten Projection entsprechenden, natürlichen Zeitzählung beide Anfangsphasen t_a und t_b den betreffenden der Werthformen (56) an, und daher ist jeder der Werthsysteme (73) für das obere Zeichen des Doppelzeichens von dem entsprechenden für das untere verschieden. Die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der $\underline{a,b}$-Schwingungscurve angehören, ist sonach

$$2\,\underline{(a,b)}.$$

Dieselben liegen in einer a,b-Schwingungscurve, und zwar gleichzeitig in $2\,\underline{(a,b)}_{\underline{a}}$, a-Schwingungscurven, deren jede ihrer $\underline{(a)}$ enthält, oder in $\underline{(a,b)}_{\underline{a}}$, a-Schwingungscurven, deren jede ihrer $2\,\underline{(a)}$ besitzt, je nachdem die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{\underline{a}}$ nicht zusammenfallend, oder zusammenfallend ist, und in $2\,\underline{(a,b)}_{\underline{b}}$, b-Schwingungscurven, deren jede ihrer $\underline{(b)}$ enthält, oder in $\underline{(a,b)}_{\underline{b}}$, b-Schwingungscurven, deren jede ihrer $2\,\underline{(b)}$ besitzt, je nachdem die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{\underline{b}}$ nicht zusammenfallend, oder zusammenfallend ist.

Analoge Schlüsse lassen ersehen, dass, wenn überhaupt die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{\underline{2k}}$ zusammenfallend ist, einem bestimmten Werthsysteme der Coordinaten $x_{\underline{2k}}$ nicht nur die verschiedenen Werthsysteme (28), son-

dern auch jene (65) der Coordinaten x_{z_k} entsprechen. Beide Arten der Werthsysteme sind in nachstehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} x_a &= a_a \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_a}{T_a} + \frac{r(a)}{(\underline{z_k})} \right), \\ x_b &= a_b \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_b}{T_b} + \frac{r(b)}{(\underline{z_k})} \right), \\ & \dots\dots\dots\dots \\ x_i &= a_i \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_i}{T_i} + \frac{r(i)}{(\underline{z_k})} \right) \end{aligned} \tag{74}$$

enthalten. Wenn nicht zugleich die Schwingungscurve selbst zusammenfallend ist, so ist die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der $\underline{z_k}$-Schwingungscurve angehören

$$2(\underline{z_k}).$$

Dieselben liegen in einer z_k-Schwingungscurve, und zwar in $2(\underline{z_k})_{z_{k,,}}$, $z_{k,,}$-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{z_{k,,}})$ enthält, oder in $(\underline{z_k})_{z_{k,,}}$, $z_{k,,}$-Schwingungscurven, deren jede ihrer $2(\underline{z_{k,,}})$ besitzt, je nachdem die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{\underline{z_{k,,}}}$ nicht zusammenfallend, oder zusammenfallend ist.

Für die directe Bezeichnungsart der Zeigergruppe in (27) sprechen sich diese Sätze folgendermassen aus: Wenn die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum x_{z_k} zusammenfallend ist, so entsprechen einem bestimmten Werthsysteme der Coordinaten x_{z_k} nicht nur die verschiedenen Werthsysteme (30), sondern auch jene (67) der Coordinaten $x_{\underline{z_k}}$. Beide Arten der Werthsysteme sind in nachstehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} x_p &= a_p \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_p}{T_p} + \frac{r(p)}{(z_k)} \right), \\ x_q &= a_q \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_q}{T_q} + \frac{r(q)}{(z_k)} \right), \\ & \dots\dots\dots\dots \\ x_s &= a_s \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_s}{T_s} + \frac{r(s)}{(z_k)} \right) \end{aligned} \tag{75}$$

enthalten. Wenn nicht zugleich die Schwingungscurve selbst zusammenfallend ist, so ist die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der z_k-Schwingungscurve angehören

$$2(z_k).$$

Dieselben liegen in einer $\underline{z_k}$-Schwingungscurve, und zwar in $2(z_k)_{z_{k_1}}$, $\underline{z_{k_1}}$-Schwingungscurven, deren jede ihrer (z_{k_1}) enthält, oder in $(z_k)_{z_{k_1}}$, $\underline{z_{k_1}}$-Schwingungscurven, deren jede ihrer $2(z_{k_1})$ besitzt, je nachdem die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{z_{k_1}}$ nicht zusammenfallend, oder zusammenfallend ist.

Aus der Reihe der speciellen Fälle, deren allgemeines Gesetz so eben angegeben worden ist, heben wir noch die zwei Endglieder hervor.

Wenn die Projection der Schwingungscurve auf die Coordinatebene $x_{a,b}$ zusammenfallend ist, so entsprechen einem bestimmten Werthsysteme der Coordinaten $x_{a,b}$ nicht nur die verschiedenen Werthsysteme (32), sondern auch jene (69) der Coordinaten $x_{\underline{a,b}}$. Beide Arten der Werthsysteme sind in nachstehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} x_c &= a_c \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_c}{T_c} + \frac{r(c)}{(a,b)}\right), \\ x_d &= a_d \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_d}{T_d} + \frac{r(d)}{(a,b)}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_s &= a_s \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_s}{T_s} + \frac{r(s)}{(a,b)}\right) \end{aligned} \qquad (76)$$

enthalten. Wenn nicht zugleich die Schwingungscurve selbst zusammenfallend ist, so ist die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der a,b-Schwingungscurve angehören,

$$2(a,b).$$

Dieselben liegen in einer $\underline{a,b}$-Schwingungscurve, und zwar in $2(a,b)_{z_{k_1}}$, $\underline{z_{k_1}}$-Schwingungscurven, deren jede ihrer (z_{k_1}) enthält,

oder in $(a,b)_{z_{k,}}$, $z_{\underline{k,}}$-Schwingungscurven, deren jede ihrer $2(z_{k,})$ besitzt, je nachdem die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{z_{k,}}$ nicht zusammenfallend, oder zusammenfallend ist.

Da die Projection der Schwingungscurve auf die Coordinataxe x_a immer zusammenfallend ist, so entsprechen einem bestimmten Werthe der Coordinate x_a nicht nur die verschiedenen Werthsysteme (34) sondern auch jene (71) der Coordinaten $x_{\underline{a}}$. Beide Arten der Werthsysteme sind in nachstehenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} x_b &= a_b \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_b}{T_b} + \frac{r(b)}{(a)}\right), \\ x_c &= a_c \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_c}{T_c} + \frac{r(c)}{(a)}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_s &= a_s \cos 2\pi \left(\frac{t \pm t_s}{T_s} + \frac{r(s)}{(a)}\right) \end{aligned} \tag{77}$$

enthalten. Wenn nicht zugleich die Schwingungscurve selbst zusammenfallend ist, so ist die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der a-Schwingungscurve angehören,

$$2(a).$$

Dieselben liegen in einer $\underline{a}$-Schwingungscurve, und zwar in $2(a)_{z_{k,}}$, $z_{\underline{k,}}$-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(z_{k,})$ enthält, oder in $(a)_{z_{k,}}$, $z_{\underline{k,}}$-Schwingungscurven, deren jede ihrer $2(z_{k,})$ besitzt, je nachdem die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum $x_{z_{k,}}$ nicht zusammenfallend, oder zusammenfallend ist.

Wenn die Schwingungscurve selbst zusammenfallend ist, so übergehen wegen (56) die Ausdrücke (72), (73) ... (76) und (77) der Reihe nach in folgende

$$x_a = (-1)^{\varkappa} \cdot a_a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_a} + \frac{r(a)}{(\underline{a})}\right);$$

$$x_a = (-1)^{\varkappa} \cdot a_a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_a} + \frac{r(a)}{(\underline{a,b})}\right),$$

$$x_b = (-1)^{\nu_b} a_b \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_b} + \frac{r(b)}{(a,\underline{b})} \right);$$

. . . .

$$x_c = (-1)^{\nu_c} a_c \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_c} + \frac{r(c)}{(a,b)} \right),$$

$$x_d = (-1)^{\nu_d} a_d \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_d} + \frac{r(d)}{(a,b)} \right),$$

. . . .

$$x_s = (-1)^{\nu_s} a_s \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_s} + \frac{r(s)}{(a,b)} \right);$$

$$x_b = (-1)^{\nu_b} a_b \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_b} + \frac{r(b)}{(a)} \right),$$

$$x_c = (-1)^{\nu_c} a_c \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_c} + \frac{r(c)}{(a)} \right),$$

. . . .

$$x_s = (-1)^{\nu_s} a_s \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_s} + \frac{r(s)}{(a)} \right).$$

Die Zahl der verschiedenen Punkte dieser Schwingungscurve, welche einem bestimmten Punkte der $\underline{a}$-, $a,\underline{b}$-, ... a,b-, und a-Schwingungscurve angehören, ist sonach der Reihe nach

$$(\underline{a}),$$
$$(\underline{a,b}),$$
$$\cdots$$
$$(a,b)$$
$$(a).$$

Die ersteren Punkte liegen in einer a-Schwingungscurve, die zweiten in einer a,b-Schwingungscurve, und zwar gleichzeitig in $(\underline{a,b})_{\underline{a}}$, a-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{a})$ enthält, und in $(\underline{a,b})_{\underline{b}}$, b-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{b})$, besitzt, ... die vorletzten in einer $\overline{a,b}$-Schwingungscurve, und zwar in $(a,b)_{z_{k_1}}$, $\underline{z_{k_1}}$-Schwingungscurven, deren jede ihrer (z_{k_1}) enthält, und die letzten in einer $\underline{a}$-Schwingungscurve, und zwar in $(a)_{z_{k_1}}$, $\underline{z_{k_1}}$-Schwingungcurven, deren jede ihrer (z_{k_1}) enthält.

§. 5.

Besondere Punkte der Schwingungscurven überhaupt.

Es sei

$$t_a = \tau_a \frac{T_a}{2}$$

die Anfangsphase der a-Schwingung.

Setzt man den Zeitzuwachs (70), d. i.

$$\Delta t = r_a T_a - 2t,$$

welcher x_a gar nicht, und v_a nur dem Zeichen nach ändert, dem Zeitzuwachse (21), d. i.

$$\Delta t = r_{\underline{a}} T_{\underline{a}},$$

welcher $x_{\underline{a}}$ und $v_{\underline{a}}$ gar nicht ändert, gleich, so erhält man

$$r_a T_a - 2t = r_{\underline{a}} T_{\underline{a}}.$$

Man findet hieraus

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}(r_a T_a - r_{\underline{a}} T_{\underline{a}}) = \frac{r_a(\underline{a}) - r_{\underline{a}}(a)}{(\underline{a})(a)} T \\ &= \frac{1}{2} \frac{\bar{\tau}_a}{(\underline{a})(a)} T = \frac{1}{2} \frac{\bar{\tau}_a}{(\underline{a})} T_a = \frac{1}{2} \frac{\bar{\tau}}{(a)} T_{\underline{a}}, \end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned} t + \Delta t &= \frac{1}{2}(r_a T_a + r_{\underline{a}} T_{\underline{a}}) = \frac{r_a(\underline{a}) + r_{\underline{a}}(a)}{(\underline{a})(a)} T \\ &= \frac{1}{2} \frac{\overset{+}{\tau}_a}{(\underline{a})(a)} T = \frac{1}{2} \frac{\overset{+}{\tau}_a}{(\underline{a})} T_a = \frac{1}{2} \frac{\overset{+}{\tau}_a}{(a)} T_{\underline{a}} \end{aligned} \tag{79}$$

wenn

$$\begin{aligned} r_a(\underline{a}) - r_{\underline{a}}(a) &= \bar{\tau}_a \\ r_a(\underline{a}) + r_{\underline{a}}(a) &= \overset{+}{\tau}_a \end{aligned} \tag{80}$$

gesetzt wird. In den Zeiten (78) und (79) geht sonach der schwingende Punkt durch denselben Punkt der Schwingungs-

bahn, und mit denselben Coordinatgeschwindigkeiten $v_{\underline{a}}$ hindurch, während die Coordinatgeschwindigkeit v_a in beiden Zeiten numerisch gleich, aber dem Zeichen nach entgegengesetzt ist. Die diesen Zeiten entsprechenden Punkte der Schwingungscurve wollen wir *a*-**Punkte** nennen. Für die Zeit dieser Punkte haben wir nach (78) und (79), wenn der Kürze wegen

$$(\underline{a})(a) = z$$

gesetzt wird, allgemein

$$t = \frac{1}{2} \frac{\iota}{z} T. \tag{81}$$

Bezeichnet man den vorletzten der nach der Theorie der Kettenbrüche bestimmten Näherungswerthe des Bruches $\frac{(\underline{a})}{(a)}$ mit $\frac{\alpha}{\beta}$, und den Stellenzeiger dieses Näherungswerthes mit s, so erhält man für jedes ι, als $\bar{\iota}_a$ betrachtet, das zugehörige $\overset{+}{\iota}_a$ einfach auf folgende Weise: Die Auflösung der ersten Gleichung in (80) in ganzen Zahlen für r_a und $r_{\underline{a}}$ gibt

$$r_a = (-1)^s \iota \beta + r(a), \quad r_{\underline{a}} = (-1)^s \iota \alpha + r(\underline{a}).$$

Mit diesen Werthen gibt die zweite in (80)

$$\overset{+}{\iota}_a = (-1)^s \iota [\beta(\underline{a}) + \alpha(a)] + 2r(\underline{a})(a),$$

oder unter Beachtung der durch eine Eigenschaft des vorletzten Näherungswerthes eines Kettenbruches gelieferten Relation

$$(-1)^s = \beta(\underline{a}) - \alpha(a),$$

$$\overset{+}{\iota}_a = \iota u_a + 2r(\underline{a})(a),$$

worin

$$u_a = 1 + (-1)^s 2\alpha(a) = -1 + (-1)^s 2\beta(\underline{a})$$

ist. Der Werth von $\overset{+}{\iota}_a$ lässt ersehen, dass $\overset{+}{\iota}_a$ von ι um ein **Vielfaches** oder Nichtvielfaches von $2(\underline{a})(a)$ verschieden ist, je **nach-**

dem ι ein Vielfaches oder Nichtvielfaches von $(\underline{a})$ ist, und dass ein schicklicher Werth von r immer bewirken kann, dass $\overset{+}{\iota}_a$ positiv und kleiner als $2\,(\underline{a})\,(a)$ ausfällt.

Aus (81) und (1) erhält man für die betrachteten Punkte

$$
\begin{aligned}
x_a &= (-1)^{\iota_a} a_a \cos \pi \, \frac{\iota(a)}{z}, \\
x_b &= a_b \cos \pi \left(\frac{2t_b}{T_b} + \frac{\iota(b)}{z}\right), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_s &= a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\iota(s)}{z}\right).
\end{aligned}
\qquad (82)
$$

Der Charakter dieser Punkte bringt es mit sich, dass für

$$\iota \text{ und } \overset{+}{\iota}_a$$

die Coordinaten dieselben Werthsysteme, hingegen die Coordinatgeschwindigkeiten 2 Werthsysteme erhalten, welche, wenn das der Zahl ι entsprechende Werthsystem der Coordinatgeschwindigkeiten v_a und $v_{\underline{a}}$ mit

$$\nu_a, \qquad \nu_{\underline{a}}$$

bezeichnet wird, durch nachstehende Ausdrücke

$$
\begin{array}{cc}
\underset{\sim}{v_a}, & \underset{\sim}{v_{\underline{a}}} \\
+\nu_a, & +\nu_{\underline{a}} \\
- & +,
\end{array}
\qquad (83)
$$

angegeben werden. Wegen der in (2) enthaltenen Relationen

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = v_2, \quad \ldots \quad \frac{dx_n}{dt} = v_n$$

erhält die Schwingungscurve in jedem dieser Punkte 2 Tangenten, deren Richtungen gleichfalls durch (83) angegeben werden. Wenn v_a gleich 0 ist, fallen die 2 Werthsysteme der Coordinatgeschwindigkeiten, sowie die 2 Tangenten in einander zusammen; wenn hingegen v_a nicht gleich 0 ist, sind die 2 Werth-

systeme der Coordinatgeschwindigkeiten, sowie die 2 Tangenten von einander verschieden.

Da die Zeitzuwächse (21) der Zeit (81) hinzugefügt, Zeiten darstellen, die unter die Zeiten (81) gehören, so bezieht sich der Ausdruck (22) für die Zeit (81) durchgehends auf a-Punkte. Dieser Ausdruck übergeht nun, wenn man statt der Zahl

$$\iota + 2r(\underline{a})$$

die derselben an Wirkung in (22) gleiche

$$\overset{=}{r},$$

darunter jede mit ι gleichgeltende Zahl verstanden, setzt, in

$$x_a = (-1)^{\iota} \cdot a_a \cos \pi \frac{\overset{=}{r}}{(\underline{a})} \cdot \tag{84}$$

Alle verschiedenen, einem bestimmten ι entsprechenden Werthe von x_a in (84) können durch die geraden oder ungeraden Glieder der Reihe

$$0, 1, 2, \ldots (\underline{a}).$$

als Werthe von $\overset{=}{r}$ bestimmt werden, und zwar sind die diesen Gliedern entsprechenden Werthe von x_a sämmtlich von einander verschieden. Von den Gliedern dieser Reihe sind aber, wenn $(\underline{a})$ ungerad ist, $\frac{(\underline{a})+1}{2}$ gerad, und eben soviel ungerad, und wenn $(\underline{a})$ gerad ist, $\frac{(\underline{a})}{2}+1$ gerad, und $\frac{(\underline{a})}{2}$ ungerad. Die Zahl der verschiedenen a-Punkte, welche einem bestimmten Punkte der a-Schwingungscurve angehören, ist sonach, wenn $(\underline{a})$ ungerad ist,

$$\frac{(\underline{a})+1}{2},$$

und wenn $(\underline{a})$ gerad ist,

$$\frac{(\underline{a})}{2}+1 \text{ oder } \frac{(\underline{a})}{2},$$

je nachdem das genommene Werthsystem der Coordinaten $x_{\underline{a}}$ einem geraden, oder ungeraden ι entspricht.

Da für die Zeit (81) sowohl die Zeitzuwächse (33), als jene (70) der Zeit (81) hinzugefügt, Zeiten darstellen, die unter die Zeiten (81) gehören, so beziehen sich die Ausdrücke (77) für die Zeit (81) gleichfalls durchgehends auf a-Punkte. Diese Ausdrücke übergehen nun, wenn man statt der Zahl

$$\iota + 2r\,(\underline{a})$$

die derselben an Wirkung in (77) gleiche

$$\overset{=}{r}$$

setzt, in

$$\begin{aligned} x_b &= a_b \cos\pi\left(\frac{2t_b}{T_b} + \frac{\overset{=}{r}(b)_{\underline{a}}}{(a)}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_s &= a_s \cos\pi\left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\overset{=}{r}(s)_{\underline{a}}}{(a)}\right). \end{aligned} \qquad (85)$$

Alle verschiedenen, einem bestimmten ι entsprechenden Werthsysteme von $x_{\underline{a}}$ in (85) können durch die geraden, oder ungeraden Glieder der Reihe

$$0,\ 1,\ 2, \ldots 2(a) - 1,$$

als Werthe von $\overset{=}{r}$ bestimmt werden, und zwar sind die diesen Gliedern entsprechenden Werthsysteme von $x_{\underline{a}}$ sämmtlich von einander verschieden. Von den Gliedern dieser Reihe sind aber (a) gerad, und eben soviel ungerad. Die Zahl der verschiedenen a-Punkte, welche einem bestimmten Punkte der a-Schwingungscurve angehören, ist sonach

$$(a).$$

Die Gleichungen (82) liefern die betrachteten Punkte in der Ordnung, in welcher sie vom schwingenden Punkte passirt werden; die n—1 letzten der (82) in Verbindung mit (84) in Gruppen, die in a-Schwingungscurven, die erste der (82) in Verbindung mit (85) in Gruppen, die in $\underline{a}$-Schwingungscurven liegen.

Da nach jedesmaligem Zuwachse des τ um $2z = 2\,(\underline{a})(a)$ dieselben Werthsysteme aller Coordinaten und Coordinatgeschwindigkeiten zurückkehren, die vor demselben bestanden, so ist die Anzahl der τ, die alle verschiedenen Punkte (82) bestimmen können, gleich

$$2(\underline{a})(a). \tag{86}$$

Die Punkte (82) theilen wir ein in solche, deren τ Vielfaches von $(\underline{a})$ ist, und in solche, deren τ es nicht ist. Für die Punkte der ersten Art bekommt man aus (82), wenn man statt τ, $\tau(\underline{a})$, und

$$(a) = z'$$

setzt,

$$\left.\begin{aligned} x_a &= (-1)^{\tau_a + \tau}\, a_a, \\ x_b &= a_b \cos\pi \left(\frac{2t_b}{T_b} + \frac{\tau(b)}{z'}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s &= a_s \cos\pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z'}\right); \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

und für die Punkte der zweiten Art

$$\left.\begin{aligned} x_a &= (-1)^{\tau_a}\, a_a \cos\pi \frac{\tau(a)}{z}, \\ x_b &= a_b \cos\pi \left(\frac{2t_b}{T_b} + \frac{\tau(b)}{z}\right), \qquad \{(\underline{a})\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s &= a_s \cos\pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Das Symbol rechts deutet an, dass τ Nichtvielfaches der in die Symbolklammer gefassten Zahl sein soll.

In jedem der Punkte (87) erhält die Coordinate

$$x_a \tag{89}$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Coordinatgeschwindigkeit

$$v_a \tag{90}$$

den Werth 0. Wegen des letzteren Umstandes erhält die Schwingungscurve in jedem dieser Punkte nach (83) nur Eine Tangente, deren Richtung durch

$$\begin{array}{cc} \underset{\sim}{v_a}, & \underset{\sim}{v_{\underline{a}}} \\ 0, & \nu_{\underline{a}} \end{array}$$

angegeben wird, und welche daher zu ihrer Projection auf den Coordinatraum $x_{\underline{a}}$ parallel ist. Der genannten Eigenschaften wegen wollen wir die Punkte (87) a-Gipfel nennen.

In jedem der Punkte (88) erhält die Coordinate (89) nicht einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Coordinatgeschwindigkeit (90) nicht den Werth 0. Wegen des letzteren Umstandes erhält die Schwingungscurve in jedem dieser Punkte 2 verschiedene Tangenten, deren Richtungen durch

$$\begin{array}{cc} \underset{\sim}{v_a}, & \underset{\sim}{v_{\underline{a}}} \\ +\nu_a, & +\nu_{\underline{a}} \\ - & + \end{array}$$

angeben werden, und welche daher gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den Coordinatraum $x_{\underline{a}}$ symmetrisch sind. Der genannten Eigenschaften wegen wollen wir die Punkte (88) a-Knoten nennen.

Da die Anzahl der Vielfachen von $(\underline{a})$, welche positiv und kleiner als (86) sind, $2(a)$ ist, und von denselben sich nur Eines auf denselben Punkt bezieht, so ist die Anzahl aller verschiedenen a-Gipfel

$$2(a);$$

und da die Anzahl der Nichtvielfachen von $(\underline{a})$, welche positiv und kleiner als (86) sind, $2(\underline{a})a - 2(a) = 2[(\underline{a}) - 1](a)$ ist, und von denselben sich je zwei auf denselben Punkt beziehen, so ist die Anzahl aller verschiedenen a-Knoten

$$[(\underline{a}) - 1](a).$$

Die Anzahl aller verschiedenen a-Punkte ist daher

$$[(\underline{a}) + 1](a).$$

Die Anzahl aller verschiedenen 1-, 2-, ... n-Gipfel ist

$$2(1)+2(2)+\ldots+2(n);$$

die Anzahl aller verschiedenen 1-, 2-, ... n-Knoten

$$[(\underline{1})-1](1)+[(\underline{2})-1](2)+\ldots+[(\underline{n})-1](n),$$

und die Anzahl aller verschiedenen 1-, 2-, ... n-Punkte

$$[(\underline{1})+1](1)+[(\underline{2})+1](2)+\ldots+[(\underline{n})+1](n).$$

Bezieht man die Zeiten der a-, und b-Punkte auf denselben Anfangspunkt, und sucht die Bedingungen der Gleichheit beider Zeiten auf, so findet man als eine der ersten, dass die Anfangsphasen t_a und t_b auf die Werthformen

$$t_a=r_a\frac{T_a}{2},\quad t_b=r_b\frac{T_b}{2}$$

gebracht werden können, dass somit die Projection der Schwingungscurve auf die Coordinatebene $x_{a,b}$ eine zusammenfallende sei. Ist also die Projection der Schwingungscurve auf keine Coordinatebene zusammenfallend, so sind alle besonderen Punkte derselben von einander verschieden.

§. 6.

Besondere Punkte besonderer Schwingungscurven.

Um die besonderen Punkte der Schwingungscurve kennen zu lernen, deren Projection auf irgend einen Coordinatraum zusammenfallend ist, wollen wir annehmen, dass die Projection der Schwingungscurve auf den Coordinatraum x_{z_m} zusammenfallend ist, ohne dass die Projection derselben auf den Coordinatraum $x_{z_{m'}}$ es ist, unter $z_{m'}$ jede Zeigergruppe verstanden, in welcher jene z_m ganz begriffen ist. Die Zeiger der Schwingungen, welche sich auf diese besondere Projection beziehen, mögen besondere Zeiger genannt, und mit

$$a, b, \ldots i, j, \ldots l$$

bezeichnet werden. Eine beliebige Gruppe dieser Zeiger, k an der Zahl, etwa die Gruppe

$$a, b, \ldots i$$

möge mit

$$z_k,$$

jene der zugehörigen Coordinaten und Coordinatgeschwindigkeiten mit

$$x_{z_k}, \quad v_{z_k}$$

bezeichnet werden. Endlich seien

$$t_a = r_a \frac{T_a}{2}, \quad t_b = r_b \frac{T_b}{2}, \ldots t_i = r_i \frac{T_i}{2}$$

die Anfangsphasen der Schwingungen, welche sich auf die besonderen Zeiger beziehen.

Setzt man den Zeitzuwachs (70), d. i.

$$\Delta t = r_{z_k} T_{z_k} - 2t,$$

welcher x_{z_k} gar nicht, und v_{z_k} nur dem Zeichen nach ändert, dem Zeitzuwachse (27), d. i.

$$\Delta t = r_{\underline{z_k}} T_{\underline{z_k}},$$

welcher $x_{\underline{z_k}}$ und $v_{\underline{z_k}}$ gar nicht ändert, gleich, so erhält man

$$r_{z_k} T_{z_k} - 2t = r_{\underline{z_k}} T_{\underline{z_k}}.$$

Man findet hieraus

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} (r_{z_k} T_{z_k} - r_{\underline{z_k}} T_{\underline{z_k}}) = \frac{1}{2} \frac{r_{z_k}(\underline{z_k}) - r_{\underline{z_k}}(z_k)}{(\underline{z_k})(z_k)} T \\ &= \frac{1}{2} \frac{\bar{\tau}_{z_k}}{(\underline{z_k})(z_k)} T = \frac{1}{2} \frac{\bar{\tau}_{z_k}}{(\underline{z_k})} T_{z_k} = \frac{1}{2} \frac{\bar{\tau}_{z_k}}{(z_k)} T_{\underline{z_k}}, \end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned} t + \Delta t &= \frac{1}{2} (r_{z_k} T_{z_k} + r_{\underline{z_k}} T_{\underline{z_k}}) = \frac{1}{2} \frac{r_{z_k}(\underline{z_k}) + r_{\underline{z_k}}(z_k)}{(\underline{z_k})(z_k)} T \\ &= \frac{1}{2} \frac{\overset{+}{\tau}_{z_k}}{(z_k)(z_k)} T = \frac{1}{2} \frac{\overset{+}{\tau}_{z_k}}{(\underline{z_k})} T_{z_k} = \frac{1}{2} \frac{\overset{+}{\tau}_{z_k}}{(z_k)} T_{z_k}, \end{aligned} \tag{92}$$

wenn

$$r_{z_k}(\underline{z_k}) - r_{z_k}(z_k) = \bar{\iota}_{z_k},$$

$$r_{z_k}(\underline{z_k}) + r_{\underline{z}_k}(z_k) = \overset{+}{\iota}_{z_k}$$

gesetzt wird. In den Zeiten (91) und (92) geht sonach der schwingende Punkt durch denselben Punkt der Schwingungsbahn und mit denselben Coordinatgeschwindigkeiten r_{z_k} hindurch, während die Coordinatgeschwindigkeiten $r_{\underline{z}_k}$ in beiden Zeiten numerisch gleich, aber dem Zeichen nach entgegengesetzt sind. Die diesen Zeiten entsprechenden Punkte der Schwingungscurve wollen wir z_k-Punkte nennen. Für die Zeit dieser Punkte haben wir nach (91) und (92), wenn der Kürze wegen

$$(\underline{z_k})(z_k) = z$$

gesetzt wird, allgemein

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{\iota}{z}\,T. \tag{93}$$

Bezeichnet man den vorletzten der nach der Theorie der Kettenbrüche bestimmten Näherungswerthe des Bruches $\frac{(\underline{z_k})}{(z_k)}$ mit $\frac{\alpha}{\beta}$, und den Stellenzeiger dieses Näherungswerthes mit s, so erhält man für jedes gegebene ι, als $\bar{\iota}_{z_k}$ betrachtet, das zugehörige $\overset{+}{\iota}_{z_k}$, aus der Formel

$$\overset{+}{\iota}_{z_k} = \iota u_{z_k} + 2r(\underline{z_k})(z_k),$$

worin

$$u_{z_k} = 1 + (-1)^s 2\alpha(z_k) = -1 + (-1)^s 2\beta(\underline{z_k})$$

ist. Der Werth von $\overset{+}{\iota}_{z_k}$ lässt ersehen, dass $\overset{+}{\iota}_{z_k}$ von ι um ein Vielfaches oder Nichtvielfaches von $2(\underline{z_k})(z_k)$ verschieden ist, je nachdem ι ein Vielfaches oder Nichtvielfaches von $(\underline{z_k})$ ist, und dass ein schicklicher Werth von r immer bewirken kann, dass $\overset{+}{\iota}_z$ positiv und kleiner als $2(\underline{z_k})(z_k)$ ausfällt.

Aus (93) und (1) erhält man für die betrachteten Punkte

$$\begin{aligned}
x_a &= (-1)^{\varkappa_a} a_a \cos \pi \frac{\iota(a)}{z}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_l &= (-1)^{\varkappa_l} a_l \cos \pi \frac{\iota(l)}{z}, \\
x_p &= a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\iota(p)}{z}\right), \qquad (94) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_s &= a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\iota(s)}{z}\right).
\end{aligned}$$

Der Charakter dieser Punkte als z_k-Punkte bringt es mit sich, dass für

$$\iota \text{ und } \overset{+}{\iota}_{z_k}$$

die Coordinaten dieselben Werthsysteme, hingegen die Coordinatgeschwindigkeiten 2 Werthsysteme erhalten, welche, wenn das der Zahl ι entsprechende Werthsystem der Coordinatgeschwindigkeiten v_{z_k} und v_{z_k} mit

$$\nu_{z_k}, \quad \underline{\nu}_{z_k}$$

bezeichnet wird, durch nachstehende Ausdrücke

$$\begin{array}{cc} \underset{\sim}{v}_{z_k}, & \underset{\sim}{v}_{z_k} \\ +\nu_{z_k}, & +\nu_{z_k} \\ - & + \end{array} \qquad (95)$$

angegeben werden. Es erhält daher auch die Schwingungscurve in jedem dieser Punkte, als z_k-Punkte 2 Tangenten, deren Richtungen gleichfalls durch (95) angegeben werden. Wenn jede der Coordinatgeschwindigkeiten v_{z_k} gleich 0 ist, fallen die 2 Werthsysteme der Coordinatgeschwindigkeiten, so wie die 2 Tangenten in einander zusammen; wenn hingegen nicht jede der Coordinatgeschwindigkeiten v_{z_k} gleich 0 ist, sind die 2 Werthsysteme der Coordinatgeschwindigkeiten, so wie die 2 Tangenten von einander verschieden.

Da die Zeitzuwächse (27) der Zeit (93) hinzugefügt, Zeiten darstellen, die unter die Zeiten (93) gehören, so beziehen sich die Ausdrücke (28) für die Zeit (93) durchgehends auf z_k-Punkte. Diese Ausdrücke übergehen nun, wenn man statt

$$\frac{\iota + 2r(z_k)}{\overset{=}{r}}$$

setzt, in

$$\begin{aligned} x_a &= (-1)^{\iota_a} a_a \cos \pi \frac{\overset{=}{r}(a)_{z_k}}{(\underline{z_k})}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i &= (-1)^{r_i} a_i \cos \pi \frac{\overset{=}{r}(i)_{z_k}}{(\underline{z_k})}. \end{aligned} \tag{96}$$

Die Zahl der verschiedenen z_k-Punkte, welche einem bestimmten Punkte der $\underline{z_k}$-Schwingungscurve angehören, ist daher, wenn $(\underline{z_k})$ ungerad ist,

$$\frac{(\underline{z_k}) + 1}{2},$$

und wenn $(\underline{z_k})$ gerad ist,

$$\frac{(\underline{z_k})}{2} + 1 \text{ oder } \frac{(\underline{z_k})}{2},$$

je nachdem das genommene Werthsystem der Coordinaten $x_{\underline{z_k}}$ einem geraden oder ungeraden ι entspricht.

Da für die Zeit (93) sowohl die Zeitzuwächse (29), als jene (70) der Zeit (93) hinzugefügt, Zeiten darstellen, die unter die Zeiten (93) gehören, so beziehen sich die Ausdrücke (71) für die Zeit (93) gleichfalls durchgehends auf z_k-Punkte. Diese Ausdrücke übergehen nun, wenn man statt

$$\frac{\iota + 2r(\underline{z_k})}{\overset{=}{r}}$$

setzt, in

$$
\begin{aligned}
x_j &= (-1)^{\iota_j} a_j \cos\pi \frac{\overline{\overline{r}}(j)_{z_k}}{(z_k)}, \\
& \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
x_l &= (-1)^{\iota_l} a_l \cos\pi \frac{\overline{\overline{r}}(l)_{z_k}}{(z_k)}, \\
x_p &= a_p \cos\pi\left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\overline{\overline{r}}(p)_{z_k}}{(z_k)}\right), \\
& \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
x_s &= a_s \cos\pi\left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\overline{\overline{r}}(s)_{z_k}}{(z_k)}\right).
\end{aligned}
\tag{97}
$$

Die Zahl der verschiedenen z_k-Punkte, welche einem bestimmten Punkte der z_k-Schwingungscurve angehören, ist daher

$$(z_k).$$

Die Gleichungen (94) liefern die betrachteten Punkte in der Ordnung, in welcher sie vom schwingenden Punkte passirt werden; die $n-k$ letzten der (94) in Verbindung mit (96) in Gruppen, die in z_k-Schwingungscurven, die k ersten in (94) in Verbindung mit (97) in Gruppen, die in z_k-Schwingungscurven liegen.

Die Anzahl der ι, die alle verschiedenen Punkte (94) bestimmen können, ist gleich

$$2\underline{(z_k)}\,(z_k).$$

Die Punkte (94) theilen wir ein in solche, deren ι Vielfaches von $\underline{(z_k)}$ ist, und in solche, deren ι es nicht ist. Für die Punkte der ersten Art bekommt man aus (94), wenn man statt ι, $\iota\underline{(z_k)}$, und

$$
\begin{aligned}
(z_k) &= z' \\
\frac{(a)}{z'} &= (a)' \\
& \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
\frac{(i)}{z'} &= (i)'
\end{aligned}
$$

setzt,

$$
\begin{aligned}
x_a &= (-1)^{\nu_a + \nu(a)'} a_a\,, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
x_i &= (-1)^{\nu_i + \nu(i)'} a_i\,, \\
x_j &= (-1)^{\nu_j} a_j \cos \pi \frac{\nu(j)}{z'}\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_l &= (-1)^{\nu_l} a_l \cos \pi \frac{\nu(l)}{z'}\,, \\
x_p &= a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\nu(p)}{z'}\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_s &= a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\nu(s)}{z'}\right),
\end{aligned}
\tag{98}
$$

und für die Punkte der zweiten Art

$$
\left.
\begin{aligned}
x_a &= (-1)^{\nu_a} a_a \cos \pi \frac{\nu(a)}{z}\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_l &= (-1)^{\nu_l} a_l \cos \pi \frac{\nu(l)}{z}\,, \\
x_p &= a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\nu(p)}{z}\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_s &= a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\nu(s)}{z}\right).
\end{aligned}
\right\} \{(z_k)\}
\tag{99}
$$

In jedem der Punkte (98) erhält jede der Coordinaten

$$x_{z_k} \tag{100}$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und jede der Coordinatgeschwindigkeiten

$$v_{z_k} \tag{101}$$

den Werth 0. Wegen des letzteren Umstandes erhält die Schwingungscurve in jedem dieser Punkte, als z_k-Punkte nach (95) nur Eine Tangente, deren Richtung durch

$$\underbrace{v_{z_k}}_{0},\quad \underbrace{\mathfrak{v}_{z_k}}_{\nu_{z_k}}$$

angegeben wird, und welche daher zu ihrer Projection auf den Coordinatraum $x_{\underline{z_k}}$ parallel ist. Der genannten Eigenschaften wegen wollen wir die Punkte (98) z_k-**Gipfel** nennen.

In jedem der Punkte (99) erhält nicht jede der Coordinaten (100) einen Maximal- oder Minimalwerth, und nicht jede der Coordinatgeschwindigkeiten (101) den Werth 0. Wegen des letzteren Umstandes erhält die Schwingungscurve in jedem dieser Punkte, als z_k-Punkte 2 verschiedene Tangenten, deren Richtungen durch

$$\begin{array}{cc} \underbrace{v_{z_k}}, & \underbrace{v_{\underline{z_k}}} \\ +\nu_{z_k}, & +\nu_{\underline{z_k}} \\ - & + \end{array}$$

angegeben werden, und welche daher gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den Coordinatraum $x_{\underline{z_k}}$ symmetrisch sind. Der genannten Eigenschaften wegen wollen wir die Punkte (99) z_k-**Knoten** nennen.

Die Anzahl aller verschiedenen z_k-Gipfel ist

$$2(z_k),$$

jene aller verschiedenen z_k-Knoten

$$[(\underline{z_k}) - 1](z_k);$$

die Anzahl aller verschiedenen z_k-Punkte ist daher

$$[(\underline{z_k}) + 1](z_k).$$

Die Anzahl aller verschiedenen **Arten** der besonderen Punkte der Schwingungscurve, welche m besonderen Zeigern entsprechen, ist der Anzahl aller Verbindungen von m Elementen zur ersten Classe, also

$$2^m - 1$$

gleich.

Eine ähnliche Betrachtung, wie die zu Ende des vorhergehenden §. angedeutete, lässt ersehen, dass die besonderen Punkte, welche den besonderen Zeigern z_m entsprechen, von anderen besonderen Punkten verschieden sind; dagegen finden sich die

ersteren besonderen Punkte selbst mannigfaltig in denselben Punkten vor, so, dass **mehrfache** besondere Punkte entstehen, deren Gesetze wir nun entwickeln wollen.

Für die Zeit der z_{k_1}-, z_{k_2}-, ... z_{k_h}-Punkte, unter

$$z_{k_1} \mid z_{k_2} \mid \ldots \mid z_{k_h} \tag{102}$$

eine beliebige Verbindung der m besonderen Zeiger zur h^{ten} Classe verstanden, hat man nach (93)

$$t = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{t}_1}{(\underline{z}_{k_1})(z_k)} T,\ t = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{t}_2}{(\underline{z}_{k_2})(z_{k_2})} T, \ldots t = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{t}_h}{(\underline{z}_{k_h})(z_{k_h})} T. \tag{103}$$

Die allgemeine Bedingung, unter welcher die Zeiten (103) einander gleich werden, ist

$$\frac{\mathfrak{t}_1}{(\underline{z}_{k_1})(z_{k_1})} = \frac{\mathfrak{t}_2}{(\underline{z}_{k_2})(z_{k_2})} = \ldots = \frac{\mathfrak{t}_h}{(\underline{z}_{k_h})(z_{k_h})} = \frac{\mathfrak{t}}{z},$$

wo der Kürze wegen

$$(\underline{z}_{k_1})(z_{k_2})\ldots(\underline{z}_{k_h})(z_k) = z \tag{104}$$

gesetzt worden ist, unter z_k eine Zeigergruppe verstanden, die aus der Vereinigung aller Zeigergruppen (102) in Eine hervorgeht. Man findet hieraus

$$\mathfrak{t}_1 = \frac{(\underline{z}_{k_1})(z_{k_1})}{z} \mathfrak{t},\ \mathfrak{t}_2 = \frac{(\underline{z}_{k_2})(z_{k_2})}{z} \mathfrak{t}, \ldots \mathfrak{t}_h = \frac{(\underline{z}_{kh})(z_k)}{z} \mathfrak{t},$$

welche Werthe jede der Zeiten (103) in

$$t = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{t}}{z} T \tag{105}$$

verwandeln. Zur Zeit (105) werden nicht nur

$$z_{k_1}\text{-},\ z_{k_2}\text{-}, \ldots z_{k_h}\text{-} \tag{106}$$

Punkte, sondern auch

$$\begin{array}{l} z_{k_1+k_2}\text{-},\ z_{k_1+k_3}\text{-},\ \ldots\ z_{k_{h-1}+k_h}\text{-} \\ z_{k_1+k_2+k_3}\text{-},\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{k_1+k_2+\ldots+k_h}\text{-} \end{array} \tag{107}$$

Punkte bestehen, da die allgemeine Bedingung, unter welcher die Zeit (105) den Zeiten dieser Punkte gleich wird, gleichfalls zur Zeit (105) führt.

Würden wir anstatt von den Verbindungselementen (102), von beliebigen andern Combinationen besonderer Zeiger ausgehen, so würden wir gleichfalls zu einer Zeit von der Form (105), in welcher das zugehörige z auf eine aus (104) und (102) ersichtliche Weise auf diejenigen Verbindungselemente einer Verbindung besonderer Zeiger hinweiset, aus denen jene Combinationen bestehen, als Zeit derjenigen besonderen Punkte, welche durch diese Combinationen bezeichnet sind, gelangen, und finden, dass zu dieser Zeit nicht nur die genannten Punkte, sondern auch diejenigen bestehen, welche durch diese Verbindungselemente, so wie auch durch die übrigen Combinationen derselben bezeichnet sind. Die Zeit (105) stellt sonach die Zeit der mehrfachen besonderen Punkte allgemein dar.

Soll aber, unter $z_{k'}$ eine beliebige Combination der in z_k *nicht* befindlichen besonderen Zeiger verstanden, die Zeit (105) der Zeit der $z_{k'}$-Punkte nicht gleich sein, so muss ι Nichtvielfaches von

$$\frac{(z_k)}{(\underline{z_{k'}})\,(z_{k+k'})} \qquad (108)$$

und soll, unter z_{k_e} ein beliebiges der Verbindungselemente (102), und unter $z_{k_{e'}}$ eine beliebige andere Combination der in z_{k_e} befindlichen Zeiger verstanden, die Zeit (105) der Zeit der $z_{k_{e'}}$-Punkte nicht gleich sein, so muss ι Nichtvielfaches von

$$\frac{(\underline{z_{k_e}})}{(\underline{z_{k_{e'}}})\,(\underline{z_{k_e - k_{e'}}})} \qquad (109)$$

sein. Unter den durch (108) und (109) angegebenen Bedingungen werden zur Zeit (105) nicht nur keine

$$z_{k'}\text{- und } z_{k_{e'}}\text{-} \qquad (110)$$

Punkte, sondern auch keine derartigen bestehen, die durch beliebige Combinationen der durch (110) vorgestellten Zeigergruppen bezeichnet sind, da die allgemeine Bedingung, unter welcher

die Zeit (105) den Zeiten dieser Punkte nicht gleich ist, eine nothwendige Folge der Bedingungen (108) und (109) ist.

Besteht z_k aus m Zeigern, so fällt die Bedingung (108), und bestèht z_{k_r} aus Einem Zeiger, jene (109) hinweg.

Die der Zeit (105) unter den Bedingungen (108) und (109) entsprechenden Punkte der Schwingungscurve vereinigen sonach den Charakter der Punkte (106), sowie jenen der Punkte (107), oder, wie wir uns kurz ausdrücken wollen, den Charakter der aus den Punkten (102) combinirten Punkte in sich, ohne dass denselben der Charakter anderer besonderen Punkte innewohnt. Wir wollen sie kurz z_{k_1}-, z_{k_2}-, ... z_{k_h}-Punkte nennen.

Aus (105) und (1) erhält man für die betrachteten Punkte

$$\left.\begin{aligned} x_a &= (-1)^{\mathfrak{r} a} a_a \cos \pi \frac{\mathfrak{r}(a)}{z}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_l &= (-1)^{\mathfrak{r} l} a_l \cos \pi \frac{\mathfrak{r}(l)}{z}, \\ x_p &= a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\mathfrak{r}(p)}{z}\right), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s &= a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\mathfrak{r}(s)}{z}\right), \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(z_k)}{(z_{\underline{k'}})(z_{k+k'})} \\ &\frac{(z_{k_r})}{(z_{k_r'})(z_{\underline{k_r-k_r'}})} \end{aligned}\right\} \qquad (111)$$

Das Symbol rechts deutet auf die Bedingungen (108) und (109) hin.

Der Charakterencomplex dieser Punkte bringt es mit sich, dass für

$$\mathfrak{r},\ \overset{+}{\mathfrak{r}}_{zk_1},\ \overset{+}{\mathfrak{r}}_{zk_2}, \ldots \overset{+}{\mathfrak{r}}_{zk_h},\ \overset{+}{\mathfrak{r}}_{zk_1+k_2}, \ldots \overset{+}{\mathfrak{r}}_{zk_1+k_2+\cdots+k_h}$$

die Coordinaten dieselben Werthsysteme, hingegen die Coordinatgeschwindigkeiten 2^h Werthsysteme erhalten, welche, wenn das der Zahl $\mathfrak{r}$ entsprechende Werthsystem der Coordinatgeschwindigkeiten $v_{zk_1}, v_{zk_2}, \ldots v_{zk_h}, v_{z\underline{k}}$ mit

$$\nu_{zk_1}, \nu_{zk_2}, \ldots \nu_{zk_h}, \nu_{z\underline{k}}$$

bezeichnet wird, durch nachstehende Ausdrücke



v_{zk_1},	v_{zk_2},	v_{zk_3},	…	$v_{zk_{h-1}}$,	v_{zk_h},	v_{zk}	
$+\nu_{zk_1}$,	$+\nu_{zk_2}$,	$+\nu_{zk_3}$,	…	$+\nu_{zk_{h-1}}$,	$+\nu_{zk_h}$,	$+\nu_{zk}$	
$-$	$+$	$+$	…	$+$	$+$	$+$	
$+$	$-$	$+$	…	$+$	$+$	$+$	
.	.	.	…	.	.	.	
$+$	$+$	$+$	…	$+$	$-$	$+$	(112)
$-$	$-$	$+$	…	$+$	$+$	$+$	
.	.	.	…	.	.	.	
$-$	$-$	$-$	…	$-$	$-$	$+$	

angegeben werden. Es erhält daher auch die Schwingungscurve in jedem dieser Punkte 2^h Tangenten, deren Richtungen gleichfalls durch (112) angegeben werden. Wenn in g der Gruppen

$$v_{zk_1},\ v_{zk_2},\ \ldots\ v_{zk_h} \tag{113}$$

jede Coordinatgeschwindigkeit gleich 0 ist, fallen je 2^g Werthsysteme der Coordinatgeschwindigkeiten, sowie je 2^g Tangenten in einander zusammen; wenn hingegen in jeder der Gruppen (113) nicht jede Coordinatgeschwindigkeit gleich 0 ist, sind die 2^h Werthsysteme der Coordinatgeschwindigkeiten, sowie die 2^h Tangenten von einander verschieden.

Von den Gliedern der Zahlenreihe

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ 2z-1, \tag{114}$$

welche als Werthe von $\mathfrak{x}$ alle verschiedenen Punkte (111) bestimmen können, sind zufolge der Bedingungen (108) und (109) diejenigen auszuschliessen, welche Vielfache irgend einer der Zahlen sind, die durch die in der Symbolklammer stehenden Ausdrücke vorgestellt sind. Die Zahl der übrigbleibenden ergibt sich aus nachstehender, in das Bereich der Arithmetik gehörenden Bemerkung

Es sei

$$z \tag{115}$$

eine ganze Zahl,

$$v_1',\ v_1''\ \ldots \tag{116}$$

Factoren von (115), von denen keiner Vielfaches eines andern ist, und denen überdies eine sogleich anzugebende Beschaf-

fenheit zukommt. Man ordne alle von einander verschiedenen kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen einer, zweier, ... der Zahlen (116) so in Gruppen an, dass von den Zahlen einer jeden, der $h$ten Gruppe keine Vielfaches einer andern, aber jede kleinstes gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen der (h—1)ten, also auch der (h—2)ten ... der ersten ist. Es seien

$$\begin{array}{l} r'_1,\ r''_1\ \ldots \\ r'_2,\ r''_2\ \ldots \\ \ldots\ldots \\ r_p \end{array}$$

der Reihe nach kleinste gemeinschaftliche Vielfache der 1ten, 2ten, ... $p$ten Gruppe, und es seien die Zahlen (116) so beschaffen, dass jede Zahl der $h$ten Gruppe kleinstes gemeinschaftliche Vielfache von nur $c_{h,h-1}$ Zahlen der (h—1)ten, ... von nur $c_{h,2}$ Zahlen der zweiten, und von nur $c_{h,1}$ Zahlen der ersten Gruppe ist. Setzt man

$$\begin{aligned} \frac{z}{r'_1} + \frac{z}{r''_1} + \ldots &= z_1, \\ \frac{z}{r'_2} + \frac{z}{r''_2} + \ldots &= z_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{z}{r_p} \qquad\qquad &= z_p; \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= c_{2,1} f_1 - 1 \\ f_3 &= c_{3,2} f_2 - c_{3,1} f_1 + 1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f_p &= c_{p,p-1} f_{p-1} - c_{p,p-2} f_{p-2} + \ldots + (-1)^{p-2} c_{p,1} f_1 + (-1)^{p-1} \end{aligned}$$

so ist die Zahl derjenigen Glieder der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ z-1,$$

welche durch keine der Zahlen (116) theilbar sind, gleich

$$z - f_1 z_1 + f_2 z_2 - \ldots + (-1)^p f_p z_p.$$

Wendet man diese Bemerkung auf die Zahl $2z$ in (107) und diejenigen an, welche durch die daselbst in der Symbolklammer stehenden vorgestellt sind, indem man sich das im zweiten Theile der Einleitung Gesagte in Erinnerung bringt, so findet man, wenn man

$$\Sigma\,(z_{k'_1})(z_{k'_2})\,\ldots\,(\underline{z_{k'_{h'}}})(z_{k+k'})=(z_k)_{h'}, \tag{117}$$

wo

$$z_{k'_1}|z_{k'_2}|\ldots|z_{k'_{h'}} \tag{118}$$

eine beliebige Verbindung der in

$$z_{m-k}$$

vorkommenden Zeiger zur h'ten Classe, und

$$z_{k'}$$

eine Zeigergruppe ist, die aus der Vereinigung der Zeigergruppen (118) in Eine hervorgeht, und

$$\Sigma\,(-1)^{h'}h'!(z_k)_{h'}=\{(z_k)\}\,, \tag{119}$$

wo das Summenzeichen sich auf h', und zwar zwischen den Grenzen 0 und $m-k$ bezieht; ferner

$$\Sigma\,(\underline{z_{k_{c'_1}}})(\underline{z_{k_{c'_2}}})\,\ldots\,(\underline{z_{k_{c'_{h'}}}})(\underline{z_{k_c-k_c'}})=(z_{k_c})_{h'}\,, \tag{120}$$

wo

$$z_{k_{c'_1}}|z_{k_{c'_2}}|\ldots|z_{k_{c'_{h'}}} \tag{121}$$

eine beliebige Verbindung der in

$$z_{k_c}$$

vorkommenden Zeiger zur h'ten Classe, und

$$z_{k_c'}$$

eine Zeigergruppe ist, die aus der Vereinigung der Zeigergruppen (121) in Eine hervorgeht, und

$$\Sigma\,(-1)^{h'}h'!(\underline{z_{k_c}})=\{(\underline{z_{k_c}})\} \tag{122}$$

wo das Summenzeichen sich auf h' und zwar zwischen den

Grenzen 0 und $k_r - 1$ bezieht, setzt, dass die in Frage stehende Anzahl der Glieder der Reihe (114) gleich

$$2\,\{(\underline{z_{k_1}})\}\,\{(\underline{z_{k_2}})\}\cdots\{(\underline{z_{k_h}})\}\,\{(z_k)\} \tag{123}$$

ist.

Besteht z_k aus m Zeigern, so erhalten wir aus (117) und (119)

$$\{(z_m)\} = (z_m);$$

und besteht z_{k_r} aus Einem Zeiger, ist etwa

$$z_{k_r} = a,$$

so erhalten wir aus (120) und (122)

$$\{(\underline{a})\} = (\underline{a}).$$

Zum Behufe der Eintheilung der Punkte (111) unterscheiden wir die zwei Fälle:

1. dass einige Verbindungselemente der Verbindung

$$z_{k_1} \mid z_{k_2} \mid \ldots \mid z_{k_h} \tag{124}$$

blos aus Einem Zeiger bestehen, und

2. dass keines dieser Verbindungselemente blos aus Einem Zeiger besteht.

Bestehen einige Verbindungselemente (124) blos aus Einem Zeiger, ist etwa

$$z_{k_1} = a,\ z_{k_2} = b,\ \ldots\ z_{k_g} = f, \tag{125}$$

also

$$z = (\underline{a})(\underline{b})\ldots(\underline{f})(\underline{z_{k_{g+1}}})\ldots(\underline{z_{k_h}})(z_k),$$

so theilen wir die Punkte (111) zunächst in solche ein, deren ν Vielfaches einer jeden der Zahlen

$$(\underline{a}),\ (\underline{b}),\ \ldots\ (\underline{f}) \tag{126}$$

ist, und in solche, deren ν es nicht ist, eine Eintheilung, welcher die Bedingungen (108) und (109) nicht im Wege stehen.

Für die Punkte der ersten Art bekommt man aus (111), wenn man statt $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{r}(\underline{a})(\underline{b})\cdots(\underline{f}), \tag{127}$$

wo die Verpflichtung, den Bedingungen (108) und (109) Genüge zu thun, nun das $\mathfrak{r}$ in (127) übernimmt, ferner

$$\left(\underline{z_{k_{g+1}}}\right)\cdots\left(\underline{z_{k_h}}\right)(z_k) = z^{[g]},$$

$$\frac{(a)}{z^{[g]}} = (a)^{[g]},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{(f)}{z^{[g]}} = (f)^{[g]}$$

setzt,

$$\left.\begin{aligned}
x_a &= (-1)^{\mathfrak{r}_a + \mathfrak{r}(a)^{[g]}} a_a, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x_f &= (-1)^{\mathfrak{r}_f + \mathfrak{r}(f)^{[g]}} a_f \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x_l &= (-1)^{\mathfrak{r}} a_l \cos\pi \frac{\mathfrak{r}(l)}{z^{[g]}}, \\
x_p &= a_p \cos\pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\mathfrak{r}(p)}{z^{[g]}}\right), \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x_s &= a_s \cos\pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\mathfrak{r}(s)}{z^{[g]}}\right).
\end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{(z_k)}{(\underline{z_{k'}})(z_{k+k'})} \\
&\frac{(z_{k_e})}{(\underline{z_{k_e'}})(\underline{z_{k_e-k_e'}})}
\end{aligned}\right\} \tag{128}$$

In jedem dieser Punkte erhält jede der Coordinaten

$$x_a, x_b, \ldots x_f$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und jede der Coordinatgeschwindigkeiten

$$v_a, v_b, \ldots v_f$$

den Werth 0. Wegen des letzteren Umstandes erhält die Schwingungscurve in jedem dieser Punkte nach (112) nur 2^{h-g} verschiedene Tangenten, deren Richtungen durch

$\underline{v_a}$,	$\underline{v_b}$,	...	$\underline{v_f}$,	$\underline{v_{zk_{g+1}}}$,	$\underline{v_{zk_{g+2}}}$,	...	$\underline{v_{zk_h}}$,	v_{z_k}
0	0	...	0	$+\nu_{zk_{g+1}}$,	$+\nu_{zk_{g+2}}$,	...	$+\nu_{zk_h}$,	$+\nu_{z_k}$
0	0	...	0	$-$	$+$	...	$+$	$+$
0	0	...	0	$+$	$-$	...	$+$	$+$
.	.	...	.	.	.	...	.	.
0	.	...	0	$+$	$+$	...	$-$	$+$
0	0	...	0	$-$	.	...	$+$	$+$
.	.	...	.	.	.	...	.	.
0	0	...	0	$-$	$-$	...	$-$	$+$

angegeben werden, von welchen daher eine jede zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$\underline{x_{a,b,\dots f}}$$

parallel ist, und je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den zugehörigen der Coordinaträume

$$x_{z\underline{k_{g+1}}},\ x_{z\underline{k_{g+2}}},\ \dots\ x_{z\underline{k_h}}, \tag{129}$$

sowie auch der Coordinaträume

$$x_{z\underline{k_{g+1}+k_{g+2}}},\ \dots\ x_{z\underline{k_{h-1}+k_h}}$$

$$x_{z\underline{k_{g+1}+k_{g+2}+k_{g+3}}},\ \dots\ .$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{z\underline{k_{g+1}+k_{g+2}+\dots+k_h}},$$

oder, wie wir uns kurz ausdrücken wollen, der aus den Coordinaträumen (129) combinirten Coordinaträume symmetrisch sind. Die betrachteten Punkte vereinigen also den Charakter der a-, b-, ... f-Gipfel, der $z_{k_{g+1}}$-, $z_{k_{g+2}}$-, ... z_{k_h}-Knoten, sowie der daraus combinirten Punkte in sich. Da sich in denselben 2^{h-g} verschiedene Äste der Schwingungscurve schneiden, so sind sie 2^{h-g}-fache Punkte. Für die Anzahl aller verschiedenen dieser Punkte erhält man aus (123)

$$2^{-(h-g-1)}\{(z_{\underline{k_{g+1}}})\}\{(z_{\underline{k_{g+2}}})\}\dots\{(z_{\underline{k_h}})\}\{(z_k)\}. \tag{130}$$

Wenn $g=h$, also auch $h=k$ ist, so erhält in jedem der Punkte (128) jede der Coordinaten

$$x_a, x_b, \ldots x_i$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve nur Eine Tangente, deren Richtung durch

$$\underset{\sim}{v_a}, \underset{\sim}{v_b}, \ldots \underset{\sim}{v_i}, \underset{\approx}{v_{3k}}$$

$$0, 0, \ldots 0, \underline{\nu_{3k}}$$

angegeben wird, und welche daher zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$x_{\underline{3k}}$$

parallel ist. Die betrachteten Punkte vereinigen also den Charakter der a-, b-, ... i-Gipfel, sowie der daraus combinirten Punkte in sich. Für die Anzahl aller verschiedenen dieser Punkte erhalten wir aus (130)

$$2\,\{(z_k)\} \tag{131}$$

Die Punkte (111), deren $\mathfrak{r}$ nicht Vielfaches einer jeden der Zahlen (126) ist, theilen wir weiter ein in solche, deren $\mathfrak{r}$ Vielfaches einer jeden von g—1 der Zahlen (126), etwa der Zahlen

$$(\underline{a}), (\underline{b}), \ldots, (\underline{e})$$

ist, und in solche, deren $\mathfrak{r}$ es nicht ist.

Für die Punkte der ersten Art bekommt man aus (111), wenn man statt $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}(\underline{a})(\underline{b})\ldots(\underline{e})$, ferner

$$(\underline{f})(z_{\underline{k_{g+1}}})\ldots(z_{\underline{k_k}})(z_k) = z^{[g-1]},$$

$$\frac{(a)}{z^{[g-1]}} = (a)^{[g-1]},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{(e)}{z^{[g-1]}} = (e)^{[g-1]}$$

setzt,

$$x_a = (-1)^{\tau_a + \tau(a)^{[g-1]}} a_a,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_e = (-1)^{\tau_e + \tau(e)^{[g-1]}} a_e,$$

$$x_f = (-1)^{\tau_f} a_f \cos \pi \frac{\tau(f)}{z^{[g-1]}},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_l = (-1)^{\tau_l} a_l \cos \pi \frac{\tau(l)}{z^{[g-1]}},$$

$$x_p = a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z^{[g-1]}} \right),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_s = a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z^{[g-1]}} \right).$$

$$\left(\begin{array}{c} \dfrac{(z_k)}{(\underline{z_{k'}})(z_{k+k'})} \\ \dfrac{(\underline{z_{k_e}})}{(\underline{z_{k_e'}})(\underline{z_{k_e - k_e'}})} \\ (\underline{f}) \end{array} \right)$$

Eine der soeben angestellten ähnliche Analyse lässt ersehen, dass in jedem dieser Punkte jede der Coordinaten

$$x_a, \; x_b, \; \ldots \; x_e$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2^{h-g+1} verschiedene Tangenten erhält, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$x_{a,b,\ldots e}$$

parallel ist, und je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den zugehörigen der Coordinaträume

$$x_{\underline{f}}, \; x_{\underline{z_{k_{g+1}}}}, \; \ldots \; x_{\underline{z_{k_h}}},$$

sowie der daraus combinirten Coordinaträume symmetrisch sind. Die betrachteten Punkte vereinigen also den Charakter der a-, b-, ... e-Gipfel, der f-, $z_{k_{g+1}}$-, ... z_{k_h}-Knoten, sowie der daraus combinirten Punkte in sich. Sie sind 2^{h-g+1}-fache Punkte. Für die Anzahl aller verschiedenen dieser Punkte erhalten wir aus (123)

$$2^{-(h-g)} [(\underline{f}) - 1] \{(\underline{z_{k_{g+1}}})\} \cdots \{(\underline{z_{k_h}})\} \{(z_k)\}. \tag{132}$$

Wir unterbrechen hier die Reihe analoger Eintheilungen, und betrachten nur noch das Endglied derselben.

Die Punkte (111), deren ι Nichtvielfaches jeder von $g-1$ der Zahlen (125), etwa der Zahlen

$$(\underline{b}), \ldots (\underline{f})$$

ist, theilen wir ein in solche, deren ι Vielfaches von

$$(\underline{a})$$

ist, und in solche, deren ι es nicht ist. Für die Punkte der ersten Art bekommt man aus (111), wenn man statt ι, $\iota(\underline{a})$, ferner

$$(\underline{b})(\underline{c})\ldots(\underline{f})(\underline{z_{k_{g+1}}})\ldots(\underline{z_{k_h}})(z_k) = z'$$
$$\frac{(a)}{z'} = (a)'$$

setzt,

$$\begin{array}{l} x_a = (-1)^{\iota_a + \iota(a)'} a_a, \\ x_b = (-1)^{\iota_b} a_b \cos\pi \frac{\iota(b)}{z'}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_l = (-1)^{\iota_l} a_l \cos\pi \frac{\iota(l)}{z'}, \\ x_p = a_p \cos\pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\iota(p)}{z'}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_s = a_s \cos\pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\iota(s)}{z'}\right). \end{array} \qquad \begin{pmatrix} \frac{(z_k)}{(\underline{z_{k'}})(z_{k+k'})} \\ \frac{(\underline{z_{k_c}})}{(\underline{z_{k_{c'}}})(\underline{z_{k_c - k_c'}})} \\ (\underline{b}) \\ \vdots \\ (\underline{f}) \end{pmatrix}$$

In jedem dieser Punkte erhält nur die Coordinate

$$x_a$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungs curve 2^{k-1} verschiedene Tangenten, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$x_{\underline{a}}$$

parallel ist, und je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den zugehörigen der Coordinaträume

$$x_{\underline{b}}, \ldots x_{\underline{f}}, x_{\underline{z_{k_{g+1}}}}, \ldots x_{\underline{z_{k_h}}},$$

sowie der daraus combinirten Coordinaträume symmetrisch sind. Die betrachteten Punkte vereinigen also den Charakter der a-Gipfel, der b-, ... f-, $z_{k_{g+1}}$- ... z_{k_h}-Knoten, sowie der daraus combinirten Punkte in sich. Sie sind 2^{h-1}-fache Punkte. Die Anzahl aller verschiedenen dieser Punkte ist

$$2^{-(h-1)}[(\underline{b})-1]\ldots[(\underline{f})-1]\{(\underline{z_{k_{g+1}}})\}\ldots\{(\underline{z_{k_h}})\}\{(z_k)\}. \quad (133)$$

Für die Punkte (111) endlich, deren ι Nichtvielfaches einer jeden der Zahlen (126) ist, bekommt man aus (111)

$$\left.\begin{aligned} x_a &= (-1)^{\iota_a} a_a \cos\pi\,\frac{\iota(a)}{z}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_l &= (-1)^{\iota_l} a_l \cos\pi\,\frac{\iota(l)}{z}, \\ x_p &= a_p \cos\pi\left(\frac{2t_p}{T_p}+\frac{\iota(p)}{z}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s &= a_s \cos\pi\left(\frac{2t_s}{T_s}+\frac{\iota(s)}{z}\right). \end{aligned}\right| \quad \left(\begin{matrix} \dfrac{(z_k)}{(\underline{z_{k'}})(z_{k+k'})} \\ \dfrac{(\underline{z_{k_e}})}{(z_{k_e'})(\underline{z_{k_e-k_e'}})} \\ (\underline{a}) \\ \vdots \\ (\underline{f}) \end{matrix}\right)$$

In jedem dieser Punkte erhält keine Coordinate einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2^h verschiedene Tangenten, von denen je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den zugehörigen der Coordinaträume

$$x_{\underline{a}}, \ldots x_{\underline{f}}, x_{\underline{z_{k_{g+1}}}}, \ldots x_{\underline{z_{k_h}}},$$

sowie der daraus combinirten Coordinaträume symmetrisch sind. Die betrachteten Punkte vereinigen also den Charakter der a-, ... f-, $z_{k_{g+1}}$-, ... z_{k_h}-Knoten, sowie der daraus combinirten Punkte in sich. Sie sind 2^h-fache Punkte. Die Anzahl aller verschiedenen dieser Punkte ist

$$2^{-(h-1)}[(\underline{a})]-1]\ldots[(\underline{f})-1]\{(\underline{z_{k_{g+1}}})\}\ldots\{(\underline{z_{k_h}})\}\{(z_k)\}. \quad (134)$$

Für die Anzahl aller verschiedenen Punkte (111), für welche die Relationen (125) bestehen, erhält man aus (130), 132), ... (133) und (134), wenn die Summe der Zahlen

$$(\underline{a})-1,\ (\underline{b})-1, \ldots (\underline{f})-1$$

mit s_1, die Summe der Producte aus je zweien derselben mit s_2, ... die Summe der Producte aus je $g-1$ derselben mit $s_{\underline{1}}$, endlich das Product aller derselben mit $s_{\underline{0}}$ bezeichnet wird

$$2^{-(h-1)}[2^g + 2^{g-1}s_1 + 2^{g-2}s_2 + \ldots + 2s_{\underline{1}} + s_{\underline{0}}] \{(z_{\underline{k_{g+1}}})\} \cdots \{(z_{\underline{k_h}})\} \{(z_k)\}$$
$$= 2^{-(h-1)}[(\underline{a})+1][(\underline{b})+1]\ldots[(\underline{f})+1]\{(z_{\underline{k_{g+1}}})\} \ldots \{(z_{\underline{k_h}})\} \{(z_k)\}.$$

Besteht jedes der Verbindungselemente (124) aus mehr als Einem Zeiger, so erhält immer in jedem der Punkte (111) keine Coordinate einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2^h verschiedene Tangenten, von welchen je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den zugehörigen der Coordinaträume

$$\mathfrak{P}z_{\underline{k_1}}, \mathfrak{P}z_{\underline{k_2}}, \ldots \mathfrak{P}z_{\underline{k_h}},$$

so wie der daraus combinirten Coordinaträume symmetrisch sind. Die betrachteten Punkte sind sonach immer lauter Knoten, und zwar vereinigen sie den Charakter der z_{k_1}-, z_{k_2}-, ... z_{k_h}-Knoten, so wie der daraus combinirten Punkte in sich. Sie sind immer 2^h-fache Punkte. Die Anzahl aller verschiedenen dieser Punkte ist

$$2^{-(h-1)}\{(z_{\underline{k_1}})\}\{(z_{\underline{k_2}})\} \ldots \{(z_{\underline{k_h}})\} \{(z_k)\}.$$

Sieht man einen z_y-Gipfelpunkt, als solchen, als einen 2^g-fachen Punkt an, so sind überhaupt alle Punkte (111) 2^h-fache Punkte.

Nachdem wir die allgemeine Theorie der mehrfachen Punkte der Schwingungscurven gegeben haben, wollen wir die in derselben enthaltenen speciellen Fälle betrachten.

Ist $h = 1$, also

$$z = (z_{\underline{k_1}})(z_k),$$

so sind die Punkte (111) 2-fache Punkte. Die Formeln (111) übergehen in



$$\left.\begin{aligned}
x_a &= (-1)^{\tau_a} a_a \cos \pi \frac{\tau(a)}{z}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_l &= (-1)^{\tau_l} a_l \cos \pi \frac{\tau(l)}{z}, \\
x_p &= a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z}\right), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_s &= a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z}\right).
\end{aligned}\right\}
\left\{\begin{aligned}
&\frac{(z_k)}{(\underline{z_{k'}})(z_{k+k'})} \\
&\frac{(\underline{z_{k_1}})}{(\underline{z_{k_1'}})(\underline{z_{k_1-k_1'}})}
\end{aligned}\right\} \qquad (135)$$

Besteht z_{k_1} blos aus Einem Zeiger, ist etwa

$$z_{k_1} = a,$$

daher

$$z = (\underline{a})(a),$$

so übergehen (135) in

$$\left.\begin{aligned}
x_a &= (-1)^{\tau_a} a_a \cos \pi \frac{\tau(a)}{z}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_l &= (-1)^{\tau_l} a_l \cos \pi \frac{\tau(l)}{z}, \\
x_p &= a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z}\right), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_s &= a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z}\right).
\end{aligned}\right\}
\left\{\frac{(a)}{(\underline{z_{k'}})(a, z_{k'})}\right\} \qquad (136)$$

Die Punkte (136) theilen sich ein in a-Gipfel und a-Knoten. Die ersteren entsprechen den τ-Werthen, welche Vielfache von $(\underline{a})$ sind, die letzteren jenen, welche es nicht sind. Für die ersteren hat man, wenn man statt τ, $\tau(\underline{a})$, ferner

$$(a) = z'$$

setzt,

$$x_a = (-1)^{\tau_a + 1} a_a\,,$$

$$x_b = (-1)^{\tau_b} a_b \cos\pi \frac{\tau(b)}{z'}\,,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$x_l = (-1)^{\tau_l} a_l \cos\pi \frac{\tau(l)}{z'}\,, \qquad \left\{\frac{(a)}{(\underline{z_{k'}})\,(a,\,z_{k'})}\right\}$$

$$x_p = a_p \cos\pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{a'}\right),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$x_s = a_s \cos\pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z'}\right);$$

und für die letzteren

$$x_a = (-1)^{\tau_a} a_a \cos\pi \frac{\tau(a)}{z}\,,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$x_l = (-1)^{\tau_l} a_l \cos\pi \frac{\tau(l)}{z}\,, \qquad \left\{\begin{matrix}\dfrac{(a)}{(\underline{z_{k'}})\,(a,\,z_{k'})}\\[2ex] (\underline{a})\end{matrix}\right\}$$

$$x_p = a_p \cos\pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z}\right),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$x_s = a_s \cos\pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z}\right).$$

In jedem der ersteren erhält die Coordinate

$$x_a$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve Eine Tangente, welche zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$x_a$$

parallel ist; in jedem der letzteren erhält keine Coordinate einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2 verschiedene Tangenten, welche gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$x_a$$

symmetrisch sind. Der ersteren Punkte gibt es

$$2\,\{(a)\},$$

der letzteren

$$[(\underline{a})-1]\,\{(a)\},$$

aller zusammen

$$[(\underline{a})+1]\,\{(a)\}$$

verschiedene.

Besteht z_{k_1} aus mehr als Einem Zeiger, so sind die Punkte (135) lauter z_{k_1}-Knoten. In jedem dieser Punkte erhält keine Coordinate einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2 verschiedene Tangenten, welche gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$x_{\underline{\mathfrak{n}_1}}$$

symmetrisch sind. Der Punkte gibt es

$$\{(\underline{z_{k_1}})\}\,\{(z_k)\}$$

verschiedene.

Ist $h=2$, also

$$z=(\underline{z_{k_1}})(\underline{z_{k_2}})(z_k),$$

so sind die Punkte (111) 2^2-fache Punkte. Die Formeln (111) übergehen in

$$\left.\begin{aligned} x_a &= (-1)^{\tau_a}\, a_a \cos\pi\,\frac{\tau(a)}{z}, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_l &= (-1)^{\tau_l}\, a_l \cos\pi\,\frac{\tau(l)}{z}, \\ x_p &= a_p \cos\pi\left(\frac{2t_p}{T_p}+\frac{\tau(p)}{z}\right), \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_s &= a_s \cos\pi\left(\frac{2t_s}{T_s}+\frac{\tau(s)}{z}\right). \end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned} &\frac{(z_k)}{(\underline{z_{k'}})(z_{k+k'})} \\ &\frac{(\underline{z_{k_1}})}{(\underline{z_{k_1'}})(\underline{z_{k_1-k_1'}})} \\ &\frac{(\underline{z_{k_2}})}{(\underline{z_{k_2'}})(\underline{z_{k_2-k_2'}})} \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

Besteht jedes der Verbindungselemente

$$z_{k_1} | z_{k_2} \tag{138}$$

blos aus Einem Zeiger, ist etwa

$$z_{k_1} = a, \; z_{k_2} = b,$$

daher

$$z = (\underline{a})(\underline{b})(a, b),$$

so übergehen (137) in

$$\left.\begin{aligned} x_a &= (-1)^{\varkappa_a} a_a \cos \pi \frac{\iota(a)}{z}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_l &= (-1)^{\varkappa_l} a_l \cos \pi \frac{\iota(l)}{z}, \\ x_p &= a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\iota(p)}{z}\right), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s &= a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\iota(s)}{z}\right). \end{aligned}\right\} \frac{(a, b)}{(\underline{z_{k'}})(a, b, z_{k'})} \tag{139}$$

Die Punkte (139) theilen sich ein in a-, b-Gipfel, a-Gipfel-b-Knoten, b-Gipfel-a-Knoten und a-, b-Knoten. Die ersten entsprechen den ι-Werthen, welche Vielfache einer jeden der Zahlen

$$(\underline{a}), (\underline{b}),$$

die zweiten jenen, welche Vielfache der ersten, aber Nichtvielfache der zweiten, die dritten jenen, welche Vielfache der zweiten, aber Nichtvielfache der ersten, und die vierten jenen, welche Nichtvielfache einer jeden dieser Zahlen sind. Für die ersten hat man, wenn man statt ι, $\iota(\underline{a})(\underline{b})$, ferner

$$(a, b) = z'',$$
$$\frac{(\underline{a})}{z''} = (a)'',$$
$$\frac{(\underline{b})}{z''} = (b)''$$

setzt,

$$x_a = (-1)^{\mathfrak{r}_a + \mathfrak{r}(a)''} a_a,$$

$$x_b = (-1)^{\mathfrak{r}_b + \mathfrak{r}(b)''} a_b,$$

$$x_c = (-1)^{\mathfrak{r}_c} a_c \cos \pi \frac{\mathfrak{r}(c)}{z''},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_l = (-1)^{\mathfrak{r}_l} a_l \cos \pi \frac{\mathfrak{r}(l)}{z''}, \qquad \left\{ \frac{(a, b)}{(\underline{z_{k'}})\,(a, b, z_{k'})} \right\}$$

$$x_p = a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\mathfrak{r}(p)}{z''} \right),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_s = a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\mathfrak{r}(s)}{z''} \right),$$

für die zweiten, wenn man statt $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}(\underline{a})$, ferner

$$(\underline{b})\,(a, b) = z',$$

$$\frac{(a)}{z'} = (a)'$$

setzt,

$$x_a = (-1)^{\mathfrak{r}_a + \mathfrak{r}(a)'} a_a,$$

$$x_b = (-1)^{\mathfrak{r}_b} a_b \cos \pi \frac{\mathfrak{r}(b)}{z'},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_l = (-1)^{\mathfrak{r}_l} a_l \cos \pi \frac{\mathfrak{r}(l)}{z'}, \qquad \left\{ \begin{matrix} \dfrac{(a, b)}{(\underline{z_{k'}})\,(a, b, z_{k'})} \\ (\underline{b}) \end{matrix} \right\}$$

$$x_p = a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\mathfrak{r}(p)}{z'} \right),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_s = a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\mathfrak{r}(s)}{z'} \right);$$

für die dritten, wenn man statt $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}(\underline{b})$, ferner

$$(\underline{a})\,(a, b) = z',$$

$$\frac{(b)}{z'} = (b)'$$

setzt.

$$x_b = (-1)^{\varkappa_b + \varkappa(b)'} a_b,$$

$$x_a = (-1)^{\varkappa_a} a_a \cos \pi \frac{\varkappa(a)}{z'},$$

. . . .

$$x_l = (-1)^{\varkappa_l} a_l \cos \pi \frac{\varkappa(l)}{z'},$$

$$x_p = a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\varkappa(p)}{z'}\right),$$

. . . .

$$x_s = a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\varkappa(s)}{z'}\right);$$

$$\left\{\begin{matrix} \frac{(a,b)}{(\underline{z_{k'}})(a,b,z_{k'})} \\ (\underline{a}) \end{matrix}\right\}$$

und für die vierten

$$x_a = (-1)^{\varkappa_a} a_a \cos \pi \frac{\varkappa(a)}{z},$$

. . . .

$$x_l = (-1)^{\varkappa_l} a_l \cos \pi \frac{\varkappa(l)}{z},$$

$$x_p = a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\varkappa(p)}{z}\right),$$

. . . .

$$x_s = a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\varkappa(s)}{z}\right).$$

$$\left\{\begin{matrix} \frac{(a,b)}{(\underline{z_{k'}})(a,b,z_{k'})} \\ (\underline{a}) \\ (\underline{b}) \end{matrix}\right\}$$

In jedem der ersten erhält jede der Coordinaten

$$x_a, \; x_b, \qquad (140)$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve Eine Tangente, welche zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$x_{\underline{a,b}}$$

parallel ist; in jedem der zweiten erhält nur die erste der Coordinaten (140) einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2 verschiedene Tangenten, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$x_{\underline{a}} \qquad (141)$$

parallel ist, und beide gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$x_{\underline{l}} \tag{142}$$

symmetrisch sind; in jedem der dritten erhält nur die zweite der Coordinaten (140) einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2 verschiedene Tangenten, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf den Coordinatraum (142) parallel ist, und beide gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den Coordinatraum (141) symmetrisch sind, und in jedem der vierten erhält keine Coordinate einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2^2 verschiedene Tangenten, von welchen je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den zugehörigen der Coordinaträume (141), (142), sowie des daraus combinirten Coordinatraumes symmetrisch sind. Der ersten Punkte gibt es

$$2\{(a, b)\},$$

der zweiten

$$[(\underline{b})-1]\{(a, b)\},$$

der dritten

$$[(\underline{a})-1]\{(a, b)\},$$

der vierten

$$2^{-1}[(\underline{a})-1][(\underline{b})-1]\{(a, b)\};$$

aller zusammen

$$2^{-1}[(\underline{a})+1][(\underline{b})+1]\{(a, b)\}$$

verschiedene.

Besteht nur Eines der Verbindungselemente (138) aus Einem Zeiger, ist etwa

$$z_{k_1} = a,$$

daher

$$z = (\underline{a})(z_{k_2})(z_k),$$

so übergeht (137) in

$$
\left.\begin{aligned}
x_a &= (-1)^{\tau_a} a_a \cos\pi \frac{\tau(a)}{z}, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
x_l &= (-1)^{\tau_l} a_l \cos\pi \frac{\tau(l)}{z}, \\
x_p &= a_p \cos\pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z}\right), \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
x_s &= a_s \cos\pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z}\right).
\end{aligned}\right.
\quad
\left\{\begin{matrix} \dfrac{(z_k)}{(z_{k'})(z_{k+k'})} \\ \dfrac{(z_{k_2})}{(z_{k_2'})(z_{k_2-k_2'})} \end{matrix}\right\}
\qquad (143)
$$

Die Punkte (143) theilen sich ein in a-Gipfel-z_{k_2}-Knoten und a-, z_{k_2}-Knoten. Die ersten entsprechen den τ-Werthen, welche Vielfache von (a) sind, und die zweiten jenen, welche es nicht sind. Für die ersten hat man, wenn man statt τ, $\tau(a)$, ferner

$$
(z_{k_2})(z_k) = z',
$$
$$
\frac{(a)}{z'} = (a)'
$$

setzt,

$$
\left.\begin{aligned}
x_a &= (-1)^{\tau_a + (a)'} a_a, \\
x_b &= (-1)^{\tau_b} \cos\pi \frac{\tau(b)}{z'}, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
x_l &= (-1)^{\tau_l} a_l \cos\pi \frac{\tau(l)}{z'}, \\
x_p &= a_p \cos\pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z'}\right). \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
x_s &= a_s \cos\pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z'}\right),
\end{aligned}\right.
\quad
\left\{\begin{matrix} \dfrac{(z_k)}{(z_{k'})(z_{k+k'})} \\ \dfrac{(z_{k_2})}{(z_{k_2'})(z_{k_2-k_2'})} \end{matrix}\right\}
$$

und für die zweiten

$$x_a = (-1)^{\tau_a} a_a \cos \pi \frac{\tau(a)}{z},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_l = (-1)^{\tau_l} a_l \cos \pi \frac{\tau(l)}{z},$$

$$x_p = a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_s = a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z}\right).$$

$$\left\{ \frac{(z_k)}{(\underline{z_{k'}})(z_{k+k'})} \right\} \left\{ \frac{(\underline{z_{k_2}})}{(\underline{z_{k_2'}})(\underline{z_{k_2-k_2'}})} \right\} !\,(\underline{a})$$

In jedem der ersten erhält nur die Coordinate

$$x_a$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2 verschiedene Tangenten, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$\underline{x_a} \tag{144}$$

parallel ist, und beide gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$\underline{x_{z_{k_2}}} \tag{145}$$

symmetrisch sind; in jedem der zweiten erhält keine Coordinate einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2^2 verschiedene Tangenten, von welchen je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den zugehörigen der Coordinaträume (144), (145), sowie des daraus combinirten Coordinatraumes symmetrisch sind. Der ersten gibt es

$$\{(\underline{z_{k_2}})\}\,\{(z_k)\},$$

der zweiten

$$2^{-1}\left[(\underline{a}) - 1\right]\{(\underline{z_{k_2}})\}\,\{z_k\},$$

aller zusammen

$$2^{-1}\left[(\underline{a}) + 1\right]\{(\underline{z_{k_2}})\}\,\{(z_k)\}$$

verschiedene.

Besteht endlich jedes der Verbindungselemente (138) aus mehr als Einem Zeiger, so sind die Punkte (137) z_{k_1}-, z_{k_2}-Knoten. In jedem derselben erhält keine Coordinate einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2^2 verschiedene Tangenten, von welchen je zwei gegen eine Parallele auf den zugehörigen der Coordinaträume

$$x_{\underline{z_{k_1}}}, \quad x_{\underline{z_{k_2}}},$$

sowie des daraus combinirten Coordinatraumes symmetrisch sind. Derselben gibt es

$$2^{-1}\{(\underline{z_{k_1}})\}\,\{(\underline{z_{k_2}})\}\,\{(z_k)\}$$

verschiedene.

Wir unterbrechen hier die Reihe analoger speciellen Fälle und betrachten nur noch das Endglied derselben.

Ist $h = k$, also

$$z = (\underline{a})(\underline{b}) \ldots (\underline{d})(\underline{i})(z_k),$$

so sind die Punkte (111) 2^k-fache Punkte. Die Formeln (111) übergehen in

$$\left.\begin{aligned}
x_a &= (-1)^{\iota_a} a_a \cos\pi \frac{\iota(a)}{z}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_l &= (-1)^{\iota_l} a_l \cos\pi \frac{\iota(l)}{z}, \\
x_p &= a_p \cos\pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\iota(p)}{z}\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_s &= a_s \cos\pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\iota(s)}{z}\right).
\end{aligned}\right\} \quad \left\{\frac{(z_k)}{(\underline{z_{k'}})(z_{k+k'})}\right\} \qquad (146)$$

Die Punkte (146) theilen sich ein in *a*-, *b*-, ... *i*-Gipfel, *a*-, *b*-, ... *d*-Gipfel-*i*-Knoten, ... *i*-Gipfel-*a*-, ... *d*-Knoten, und *a*-, *b*-, ... *i*-Knoten. Die ersten entsprechen den ι-Werthen, welche Vielfache einer jeden der Zahlen

$$(\underline{a}), (\underline{b}) \ldots (\underline{d}), (\underline{i}),$$

die zweiten jenen, welche Vielfache jeder von $k-1$ ersten, aber Nichtvielfache der letzten, ... die vorletzten jenen, welche Vielfache der letzten, aber Nichtvielfache jeder von $k-1$ ersten, und die letzten jenen, welche Nichtvielfache einer jeden dieser Zahlen sind. Für die ersten hat man, wenn man statt τ, $\tau\underline{(a)}\underline{(b)}\ldots\underline{(i)}$, ferner

$$(z_k) = z^{[k]},$$
$$\frac{(a)}{z^{[k]}} = (a)^{[k]},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{(i)}{z^{[k]}} = (i)^{[k]}$$

setzt,

$$\left.\begin{aligned}
x_a &= (-1)^{\tau_a + \tau(a)^{[k]}} a_a, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x_i &= (-1)^{\tau_i + \tau(i)^{[k]}} a_i, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x_l &= (-1)^{\tau_l} a_l \cos\pi \frac{\tau(l)}{z^{[k]}}, \\
x_p &= a_p \cos\pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z^{[k]}}\right), \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x_s &= a_s \cos\pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z^{[k]}}\right);
\end{aligned}\right\} \quad \left\{\frac{(z_k)}{\underline{(z_{k'})}\,(z_{k+k'})}\right\} \qquad (147)$$

für die zweiten, wenn man statt τ, $\tau\underline{(a)}\,\underline{(b)}\ldots\underline{(d)}$, ferner

$$\underline{(i)}(z_k) = z^{[k-1]},$$
$$\frac{(a)}{z^{[k-1]}} = (a)^{[k-1]},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{(d)}{z^{[k-1]}} = (d)^{[k-1]}$$

setzt,

$$x_a = (-1)^{\tau_a + \tau(a)^{[k-1]}}\, a_a,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x_d = (-1)^{\tau_d + \tau(d)^{[k-1]}}\, a_d,$$

$$x_i = (-1)^{\tau_i}\, a_i \cos\pi \frac{\tau(i)}{z^{[k-1]}},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x_l = (-1)^{\tau_l}\, a_l \cos\pi \frac{\tau(l)}{z^{[k-1]}},$$

$$x_p = a_p \cos\pi\left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z^{[k-1]}}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x_s = a_s \cos\pi\left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z^{[k-1]}}\right),$$

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{(z_k)}{(\underline{z_{k'}})(z_{k+k'})} \\ (\underline{i}) \end{matrix}\right\} \qquad (148)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

für die vorletzten, wenn man statt τ, $\tau(\underline{i})$, ferner

$$(\underline{a})(\underline{b})\dots(\underline{d})(z_k) = z',$$

$$\frac{(i)}{z'} = (i)'$$

setzt,

$$x_i = (-1)^{\tau_i + \tau(i)'}\, a_i,$$

$$x_a = (-1)^{\tau_a}\, a_a \cos\pi \frac{\tau(a)}{z'},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x_d = (-1)^{\tau_d}\, a_d \cos\pi \frac{\tau(d)}{z'},$$

$$x_l = (-1)^{\tau_l}\, a_l \cos\pi \frac{\tau(l)}{z'},$$

$$x_p = a_p \cos\pi\left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z'}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x_s = a_s \cos\pi\left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z'}\right),$$

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{(z_k)}{(\underline{z_{k'}})(z_{k+k'})} \\ (\underline{a}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\underline{d}) \end{matrix}\right\} \qquad (149)$$

und für die letzten

$$\begin{aligned} x_a &= (-1)^{\tau_a} a_a \cos\pi \frac{\tau(a)}{z}, \\ & \dots\dots\dots\dots \\ x_l &= (-1)^{\tau_l} a_l \cos\pi \frac{\tau(l)}{z}, \\ x_p &= a_p \cos\pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z}\right), \\ & \dots\dots\dots\dots \\ x_s &= a_s \cos\pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z}\right). \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{c} \dfrac{(z_k)}{(\underline{z_{k'}})(z_{k+k'})} \\ (\underline{a}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\underline{i}) \end{array}\right) \qquad (150)$$

In jedem der ersten erhält jede der Coordinaten

$$x_a, \dots x_i$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve Eine Tangente, welche zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$\underline{x_{a,b,\dots i}}$$

parallel ist; in jedem der zweiten erhält nur jede der Coordinaten

$$x_a, \dots x_d$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2 verschiedene Tangenten, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$\underline{x_{a,\dots d}}$$

parallel ist, und beide gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$x_i$$

symmetrisch sind; ...... in jedem der vorletzten erhält nur die Coordinate

$$x_i$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve

2^{k-1} verschiedene Tangenten, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$x_{\underline{i}}$$

parallel ist, und je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den zugehörigen der Coordinaträume

$$x_{\underline{a}}, \ldots . x_{\underline{d}},$$

so wie der daraus combinirten Coordinaträume symmetrisch sind, und in jedem der letzten erhält keine Coordinate einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2^k verschiedene Tangenten, von welchen je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den zugehörigen der Coordinaträume

$$x_{\underline{a}}, \ldots . x_{\underline{i}}$$

so wie der daraus combinirten Coordinaträume symmetrisch sind. Der ersten gibt es

$$2\{(z_k)\}, \tag{151}$$

der zweiten

$$[(\underline{i})-1]\{(z_k)\}, \tag{152}$$

. . . .

der vorletzten

$$z^{-(k-2)}[(\underline{a})-1]\ldots[(\underline{d})-1]\{(z_k)\}, \tag{153}$$

der letzten

$$z^{-(k-1)}[(\underline{a})-1]\ldots[(\underline{d})-1][(\underline{i})-1]\{(z_k)\} \tag{154}$$

aller zusammen

$$2^{-(k-1)}[(\underline{a})+1]\ldots[(\underline{d})+1][(\underline{i})+1]\{(z_k)\} \tag{155}$$

verschiedene.

Wenn $h=k=m$, also

$$z=(\underline{a})(\underline{b})\ldots(\underline{d})(\underline{l})(z_m)$$

ist, so übergehen (146), (147), (148) . . . (149) und (150) der Reihe nach in

$$x_a = (-1)^{\tau_a} a_a \cos \pi \frac{\tau(a)}{z},$$

. . . .

$$x_l = (-1)^{\tau_l} a_l \cos \pi \frac{\tau(l)}{z},$$

$$x_p = a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z}\right),$$

. . . .

$$x_s = a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z}\right);$$

$$x_a = (-1)^{\tau_a + \tau(a)^{[m]}} a_a,$$

. . . .

$$x_l = (-1)^{\tau_l + \tau(l)^{[m]}} a_l,$$

$$x_p = a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z^{[k]}}\right),$$

. . . .

$$x_s = a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z^{[k]}}\right),$$

$$x_a = (-1)^{\tau_a + \tau(a)^{[m-1]}} a_a,$$

. . . .

$$x_d = (-1)^{\tau_d + \tau(d)^{[m-1]}} a_d,$$

$$x_l = (-1)^{\tau_l} a_l \cos \pi \frac{\tau(l)}{z^{[m-1]}}, \qquad \{(l)\}$$

$$x_p = a_p \cos \pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z^{[m-1]}}\right),$$

. . . .

$$x_s = a_s \cos \pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z^{[m-1]}}\right);$$

. . . .

. . . .

$$x_l = (-1)^{\tau_l+\tau(l)'} a_l,$$

$$x_a = (-1)^{\tau_a} a_a \cos\pi \frac{\tau(a)}{z'},$$

. . . .

$$x_d = (-1)^{\tau_d} a_d \cos\pi \frac{\tau(d)}{z'},$$

$$x_p = a_p \cos\pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z'}\right), \qquad \left((a)\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (d)\right)$$

. . . .

$$x_s = a_s \cos\pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z'}\right);$$

$$x_a = (-1)^{\tau_a} a_a \cos\pi \frac{\tau(a)}{z},$$

. . . .

$$x_l = (-1)^{\tau_l} a_l \cos x \frac{\tau(l)}{z},$$

$$x_p = a_p \cos\pi \left(\frac{2t_p}{T_p} + \frac{\tau(p)}{z}\right), \qquad \left((a)\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (l)\right)$$

. . . .

$$x_s = a_s \cos\pi \left(\frac{2t_s}{T_s} + \frac{\tau(s)}{z}\right),$$

worin

$$(z_m) = z^{[m]},$$

$$\frac{(a)}{z^{[m]}} = (a)^{[m]},$$

. . . . . .

$$\frac{(l)}{z^{[m]}} = (l)^{[m]};$$

$$(l)\ (z_m) = z^{[m-1]},$$

$$\frac{(a)}{z^{[m-1]}} = (a)^{[m-1]},$$

. . . . . .

$$\frac{(d)}{z^{[m-1]}} = (d)^{[m-1]};$$

. . . .

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\underline{a})\ldots(\underline{d})(z_m)=z',$$

$$\frac{(\underline{l})}{z'}=(l)'$$

ist, und (151), (152)....(153), (154) und (155) übergehen in

$$2(z_m),$$

$$[(\underline{l})-1](z_m),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$2^{-(m-2)}[(\underline{a})-1]\ldots[(\underline{d})-1](z_m),$$

$$2^{-(m-1)}[(\underline{a})-1]\ldots[(\underline{d})-1][(\underline{l})-1](z_m),$$

$$2^{-(m-1)}[(\underline{a})+1]\ldots[(\underline{d})+1][(\underline{l})+1](z_m).$$

Der Fall, dass $m=n$, also die Schwingungscurve selbst zusammenfallend ist, verdient eine besondere Erwähnung.

In diesem Falle besitzt die Schwingungscurve ihrer Besonderheit zufolge in jedem ihrer Punkte einen 2-fachen Punkt mit 2 Tangenten von gerade entgegengesetzter Richtung, d. i. einen z_n'-Punkt. Daraus folgt:

1. dass mit jedem z_k-Punkte der betrachteten Curve immer ein $\underline{z_k}$-Punkt zusammenfällt, was auch aus dem Umstande sich ergibt, dass die Zeit des letzteren auch durch (93) ausgedrückt wird, indem für denselben nur die Factoren von z gegen einander die Rolle austauschen;

2. dass für die 2^h-fachen besonderen Punkte derselben die Verbindung (102) nothwendig eine solche ist, in welcher alle Zeiger in (1) vorkommen, und

3. dass für diese Punkte der kleinste Werth von h, 2 ist.

Da

$$(z_k)=(z_n)=1$$

wird, so erhält z in (104) die Form

$$z=(\underline{z_{k_1}})(\underline{z_{k_2}})\ldots(\underline{z_{k_h}}) \qquad (156)$$
$$=(\underline{z_{k_1}})(\underline{z_{k_2}})\ldots(\underline{z_{k_{h-1}}})(z_k),$$

wo nothwendig

$$k_1+k_2+\ldots+k_h=n$$

ist, und z_k eine Zeigergruppe vorstellt, die aus der Vereinigung der Zeigergruppen

$$z_{k_1} | z_{k_2} | \cdot \cdot \cdot | z_{k_{h-1}}$$

in Eine hervorgeht.

Die Formeln (111) übergehen in

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (-1)^{\tau_1} a_1 \cos \pi \frac{\tau(1)}{z}, \\ & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x_n &= (-1)^{\tau_n} a_n \cos \pi \frac{\tau(n)}{z}, \end{aligned}\right. \quad \left\{ \frac{(\underline{z_{k_c}})}{(\underline{z_{k_c'}})(\underline{z_{k_c - k_c'}})} \right\} \qquad (157)$$

wo die Zahl in der Symbolklammer auf die erste der Formen (156) zu beziehen ist.

Ist $h = 2$, also

$$z = (\underline{z_{k_1}})(z_k),$$

so sind die Punkte (157) 2^2-fache Punkte. Die Formeln (157) übergehen in

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (-1)^{\tau_1} a_1 \cos \pi \frac{\tau(1)}{z}, \\ & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x_n &= (-1)^{\tau_n} a_n \cos \pi \frac{\tau(n)}{z}, \end{aligned}\right. \quad \begin{gathered} \left\{ \frac{(\underline{z_{k_1}})}{(\underline{z_{k_1'}})(\underline{z_{k_1 - k_1'}})} \right\} \\ \left\{ \frac{(z_k)}{(\underline{z_{k'}})(z_{k+k'})} \right\} \end{gathered} \qquad (158)$$

Besteht z_{k_1} blos aus Einem Zeiger, ist etwa

$$z_{k_1} = a,$$

daher

$$z = (\underline{a})(a),$$

so übergehen (158) in

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (-1)^{\tau_1} a_1 \cos \pi \frac{\tau(1)}{z}, \\ & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x_n &= (-1)^{\tau_n} a_n \cos \pi \frac{\tau(n)}{z}. \end{aligned}\right. \quad \left\{ \frac{(\underline{a})}{(\underline{z_{k'}})(a, z_{k'})} \right\} \qquad (159)$$

Die Punkte (159) theilen sich ein in a-Gipfel- $\underline{a}$-Knoten, und a-, $\underline{a}$-Knoten. Die ersteren entsprechen den ι-Werthen, welche Vielfache von $(\underline{a})$ sind, die letzteren jenen, welche es nicht sind.

Für die ersteren hat man, wenn man statt ι, $\iota(\underline{a})$, ferner

$$(a) = z'$$

setzt,

$$\left.\begin{aligned} x_a &= (-1)^{\iota_a+\iota} a_a, \\ x_b &= (-1)^{\iota_b} a_b \cos\pi\frac{\iota(b)}{z'}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s &= (-1)^{\iota_s} a_s \cos\pi\frac{\iota(s)}{z'}; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\frac{(a)}{(\underline{z_{k'}})(a, z_{k'})}\right\}$$

und für die letzteren

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (-1)^{\iota_1} a_1 \cos\pi\frac{\iota(1)}{z}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= (-1)^{\iota_n} a_n \cos\pi\frac{\iota(n)}{z}. \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} \dfrac{(a)}{(\underline{z_{k'}})(a, z_{k'})} \\ (\underline{a}) \end{matrix}\right\}$$

In jedem der ersteren erhält nur die Coordinate x_a einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2 verschiedene Tangenten, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$x_{\underline{a}}$$

parallel ist, und beide gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf die Coordinataxe

$$x_a$$

symmetrisch sind, welche daher ein Paar bilden, das gerad entgegengesetzte Richtungen besitzt; in jedem der letzteren erhält keine der Coordinaten einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2^2 verschiedene Tangenten, von welchen je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den zugehörigen der Coordinaträume

$$x_{\underline{a}}\,,\quad x_a\,,$$

sowie des daraus combinirten Coordinatraumes symmetrisch sind, welche daher 2 Paare bilden, von denen jedes gerad entgegengesetzte Richtungen besitzt. Der ersteren Punkte gibt es

$$\{(a)\}\,,$$

der letzteren

$$2^{-1}\left[(\underline{a})-1\right]\{(a)\}\,;$$

aller zusammen

$$2^{-1}\left[(a)+1\right]\{(a)\}$$

verschiedene.

Besteht z_{k_1} aus mehr als Einem Zeiger, so sind die Punkte (158) z_{k_1}-, $\underline{z_k}$-Knoten. In jedem derselben erhält keine der Coordinaten einen Maximal- oder Minmalwerth, und die Schwingungscurve 2^2 verschiedene Tangenten, von welchen je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den zugehörigen der Coordinaträume

$$x_{\underline{z_{k_1}}}\,,\quad x_{z_k}\,,$$

sowie des daraus combinirten Coordinatraumes symmetrisch sind, welche daher 2 Paare bilden, von denen jedes gerad entgegengesetzte Richtungen besitzt. Der Punkte gibt es

$$2^{-1}\{(\underline{z_{k_1}})\}\{(z_k)\}$$

verschiedene.

Aus der Reihe analoger speciellen Fälle heben wir noch das Endglied hervor.

Ist $h=n$, also

$$z=(\underline{1})(\underline{2})\ldots(\underline{n-1})(\underline{n}),$$

so sind die Punkte (157) 2^n-fache Punkte. Die Formeln (157) übergehen in

$$x_1 = (-1)^{\iota_1} a_1 \cos \pi \frac{\iota(1)}{z},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (160)$$

$$x_n = (-1)^{\iota_n} a_n \cos \pi \frac{\iota(n)}{z}.$$

Die Punkte (160) theilen sich ein in 1-, 2-, ... n-Gipfel, 1-, 2-, ... n—1-Gipfel-n-Knoten, ... n-Gipfel- 1-, 2-, ... n—1-Knoten, und 1-, 2-, ... n-Knoten. Die ersten entsprechen den ι-Werthen, welche Vielfache einer jeden der Zahlen

$$(\underline{1}),\ (\underline{2}), \ldots (\underline{n-1}),\ (\underline{n}),$$

die zweiten jenen, welche Vielfache einer jeden von n—1 ersten, aber Nichtvielfache der letzten, ... die vorletzten jenen, welche Vielfache der letzten, aber Nichtvielfache einer jeden von n—1 ersten, die letzten jenen, welche Nichtvielfache einer jeden dieser Zahlen sind. Für die ersten hat man, wenn man statt ι, $\iota(\underline{1})(\underline{2})\ldots(\underline{n})$ setzt,

$$x_1 = (-1)^{\iota_1 + \iota(1)} a_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (161)$$

$$x_n = (-1)^{\iota_n + \iota(n)} a_n;$$

für die zweiten, wenn man statt ι, $\iota(\underline{1})(\underline{2})\ldots(\underline{n-1})$ ferner

$$(\underline{n}) = z^{[n-1]},$$

$$\frac{(1)}{z^{[n-1]}} = (1)^{[n-1]},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{(n-1)}{z^{[n-1]}} = (n-1)^{[n-1]}$$

setzt,

$$x_1 = (-1)^{\iota_1 + \iota(1)^{[n-1]}} a_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n-1} = (-1)^{\iota_{n-1} + \iota(n-1)^{[n-1]}} a_{n-1}, \qquad \{(\underline{n})\}$$

$$x_n = (-1)^{\iota_n} a_n \cos \pi \frac{\iota(n)}{z^{[n-1]}};$$

. . . .

für die vorletzten, wenn man statt $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_{(n)}$, ferner

$$(1)(2)\ldots(n-1) = z'$$
$$\frac{(n)}{z'} = (n)'$$

setzt,

$$\left.\begin{aligned} x_n &= (-1)^{\mathfrak{t}_n + \mathfrak{t}(n)'} a_n, \\ x_1 &= (-1)^{\mathfrak{t}_1} a_1 \cos\pi \frac{\mathfrak{t}(1)}{z'}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= (-1)^{\mathfrak{t}_{n-1}} a_{n-1} \cos\pi \frac{\mathfrak{t}(n-1)}{z'}, \end{aligned}\right. \quad \begin{pmatrix} (1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (n-1) \end{pmatrix}$$

und für die letzten

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (-1)^{\mathfrak{t}_1} a_1 \cos\pi \frac{\mathfrak{t}(1)}{z}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= (-1)^{\mathfrak{t}_n} a_n \cos\pi \frac{\mathfrak{t}(n)}{z}. \end{aligned}\right. \quad \begin{pmatrix} (1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (n) \end{pmatrix}$$

In jedem der ersten erhält jede der Coordinaten einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve eine Tangente, welche zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$x_{1,2,\ldots n},$$

d. i. auf den Coordinatursprung parallel ist, daher eine **unbestimmte** Richtung besitzt; in jedem der zweiten erhält nur jede der Coordinaten

$$x_{\mu}$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2 verschiedene Tangenten, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf die Coordinataxe

$$x_n$$

parallel ist, und beide gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$\underline{x_n}$$

symmetrisch sind, welche daher ein Paar bilden, das gerad entgegengesetzte Richtungen besitzt, ... in jedem der vorletzten erhält nur die Coordinate

$$x_n$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2^{n-1} verschiedene Tangenten, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf den Coordinatraum

$$\underline{x_n}$$

parallel ist, und je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den zugehörigen der Coordinaträume

$$\underline{x_1}, \underline{x_2}, \ldots \underline{x_{n-1}},$$

sowie der daraus combinirten Coordinaträume symmetrisch sind, welche daher 2^{n-2} Paare bilden, von denen jedes gerad entgegengesetzte Richtungen besitzt, und in jedem der letzten erhält keine der Coordinaten einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2^n verschiedene Tangenten, von welchen je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf den zugehörigen der Coordinaträume

$$\underline{x_1}, \underline{x_2}, \ldots \underline{x_{n-1}}, \underline{x_n},$$

sowie der daraus combinirten Coordinaträume symmetrisch sind, welche daher 2^{n-1} Paare bilden, von denen jedes gerad entgegengesetzte Richtungen besitzt. Der ersten Punkte gibt es

$$\underline{2},$$

der zweiten

$$(\underline{n}) - 1,$$

. . . .

der vorletzten

$$2^{-(n-2)}[(1)-1][(\underline{2})-1]\dots[(\underline{n-1})-1],$$

d letzten

$$2^{-(n-1)}[(\underline{1})-1][(\underline{2})-1]\dots[(\underline{n-1})-1][(\underline{n})-1];$$

aller zusammen

$$2^{-(n-1)}[(\underline{1})+1][(\underline{2})+1]\dots[(\underline{n-1})+1][(\underline{n})+1]$$

verschiedene.

Aus den angegebenen Eigenschaften der zwei 1-, 2-, ... n-Gipfelpunkte schliessen wir, dass in jedem derselben der schwingende Punkt auf den vor denselben beschriebenen Schwingungsast rückkehrt, welcher Eigenschaft wegen wir diese zwei Gipfelpunkte Hörner der betrachteten Schwingungscurve nennen wollen. Für dieselben erhalten wir aus (161)

$$x_1 = (-1)^{\varkappa_1} a_1, \qquad x_1 = (-1)^{\varkappa_1 + (1)} a_1,$$
$$\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$
$$x_n = (-1)^{\varkappa_n} a_n; \qquad x_n = (-1)^{\varkappa_n + (n)} a_n.$$

Zum Beschluss der Theorie der besonderen Punkte der Schwingungscurve, deren Projection auf den Coordinatraum x_{s_m} zusammenfallend ist, ohne dass die Projection derselben auf den Coordinatraum $x_{s_m'}$ es ist, wollen wir noch sagen, wie viel Arten 2^h-facher Punkte es in derselben gibt, welche durch die auf die genannte Projection sich beziehenden besonderen Zeiger veranlasst werden.

Wenn $m < n$ ist, so können die Zeigergruppen (102) einer beliebigen Verbindung der m besonderen Zeiger zur h^{ten} Classe entnommen werden. Die Anzahl A_h aller Arten 2^h-facher Punkte in der betrachteten Schwingungscurve ist daher der Anzahl aller Verbindungen von m Elementen zur h^{ten} Classe, also

$$A_h = V_h^{(m)} = \frac{1}{h!}\sum \frac{m!}{k_1!\,k_2!\dots k_h!\,(m-k)!} = \frac{1}{h!}[h+1)^m - \binom{h}{1} h^m + \dots + (-1)^h] \qquad (162)$$

gleich. Aus (162) haben wir sonach für die Anzahl aller Arten

2^1-, 2^2-, ... 2^m-facher Punkte in dieser Schwingungscurve der Reihe nach

$$A_1 = \frac{1}{1!}\sum\frac{m!}{k_1!(m-k)!} = \frac{1}{1!}(2^m - 1),$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\sum\frac{m!}{k_1!k_2!(m-k)!} = \frac{1}{2!}[3^m - \binom{2}{1}2^m + 1],$$

. . . .

$$A_m = \frac{1}{m!}\sum\frac{m!}{k_1!k_2!\dots k_m!(m-k)} =$$
$$\frac{1}{m!}[(m+1)^m - \binom{m}{1}m^m + \dots + (-1)^m] = 1.$$

Wenn $m = n$ ist, so können die Zeigergruppen (102) nur einer derartigen Verbindung der n besonderen Zeiger zur h^{ten} Classe entnommen werden, in welcher alle n Zeiger vorkommen. Die Anzahl A_h aller Arten 2^h-facher Punkte ist daher der Anzahl aller derartigen Verbindungen von n Elementen zur h^{ten} Classe, in deren jeder alle Zeiger vorkommen, also

$$A_h = W_h^{(n)} = \frac{1}{(h-1)!}\sum\frac{(n-1)!}{k_1!k_2!\dots k_{h-1}!(n-1-k)!} =$$
$$\frac{1}{(h-1)!}[h^{n-1} - \binom{h-1}{1}(h-1)^{n-1} + \dots + (-1)^{h-1}] \tag{163}$$

gleich. Aus (163) haben wir sonach für die Anzahl aller Arten 2^2-, 2^3-, ... 2^n-facher Punkte in der zusammenfallenden Schwingungscurve der Reihe nach

$$A_2 = \frac{1}{1!}\sum\frac{(n-1)!}{k_1!(n-1-k)!} = \frac{1}{1!}(2^{n-1} - 1),$$

$$A_3 = \frac{1}{2!}\sum\frac{(n-1)!}{k_1!k_2!(n-1-k)!} = \frac{1}{2!}[3^{n-1} - \binom{2}{1}2^{n-1} + 1],$$

. . . .

$$A_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum\frac{(n-1)!}{k_1!k_2!\dots k_{n-1}!(n-1-k)!} =$$
$$\frac{1}{(n-1)!}[n^{n-1} - \binom{n-1}{1}(n-1)^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}] = 1.$$

Die Vergleichung von (162) mit (163) zeigt, dass die Anzahl aller Arten 2^h-facher Punkte in der zusammenfallenden Schwin-

gungscurve gleich ist der Anzahl aller Arten 2^{h-1}-facher Punkte in einer solchen verwandten Schwingungscurve, deren Projection auf den Coordinatraum $x_{z_{n-1}}$ zusammenfallend ist, ohne dass die Schwingungscurve selbst es ist.

Was die besonderen Punkte einer Schwingungscurve anbelangt, deren Projection auf irgend einen Coordinatraum doppelt symmetrisch ist, so bieten dieselben zu keiner besonderen Untersuchung Veranlassung.

§. 7.

Einfluss gewisser Änderungen der Anfangsphasen auf die Gestalt der Schwingungscurve.

In den bisherigen Untersuchungen haben wir die Anfangsphasen

$$t_1, t_2, \ldots t_n \qquad (164)$$

als constant, und die Zeit

$$t \qquad (165)$$

als veränderlich angesehen. Wir heben nun die Veränderlichkeit der Zeit (165) auf, und sehen die Anfangsphasen (164) als veränderlich an.

Eine Änderung sämmtlicher Anfangsphasen (164) um einerlei Betrag bewirkt keine Änderung der Gestalt der Schwingungscurve, da dieselbe in den Gleichungen (1) bloss die Wirkung nach sich zieht, wie eine gleiche Änderung der Zeit (165) ohne Änderung der Anfangsphasen (164). Daraus folgt, dass sämmtliche Anfangsphasen um einerlei Betrag geändert werden können, ohne dass die Gestalt der Schwingungscurve eine Änderung erleidet.

Eine Änderung der Gestalt der Schwingungscurve kann sonach nur durch solche Änderungen der Anfangsphasen bewirkt werden, welche nicht sämmtlich einander gleich sind. Wir werden hier nur die Wirkungen nachstehender Änderungen der Anfangsphasen

$$\Delta t_1 = r_1 \frac{T_1}{2} + t_0, \ \Delta t_2 = r_2 \frac{T_2}{2} + t_0, \ldots \Delta t_n = r_n \frac{T_n}{2} + t_0; \qquad (166)$$

$$\Delta t_1 = r_1 \frac{T_1}{2} - 2t_1 + t_0, \ \Delta t_2 = r_2 \frac{T_2}{2} - 2t_2 + t_0, \ldots \Delta t_n = r_n \frac{T_n}{2} - 2t_n + t_0 \qquad (167)$$

auf die Gestalt der Schwingungscurve näher untersuchen.

Die Änderungen (166) der Anfangsphasen üben der so eben gemachten Bemerkung zufolge dieselbe Wirkung auf die Gestalt der Schwingungscurve aus, wie die aus (3) hervorgehenden Änderungen der Anfangsphasen

$$\Delta t_1 = r_1 \frac{T_1}{2}, \ \Delta t_2 = r_2 \frac{T_2}{2}, \ldots \Delta t_n = r_n \frac{T_n}{2}.$$

Letztere bewirken zufolge (5), dass der schwingende Punkt, der vor denselben zur Zeit t den Punkt

$$x_1, x_2, \ldots x_n \qquad (168)$$

mit den Coordinatgeschwindigkeiten

$$v_1, v_2, \ldots v_n \qquad (169)$$

passirt, in derselben Zeit in den Punkt

$$(-1)^{r_1} x_1, (-1)^{r_2} x_2, \ldots (-1)^{r_n} x_n$$

mit den Coordinatgeschwindigkeiten

$$(-1)^{r_1} v_1, (-1)^{r_2} v_2, \ldots (-1)^{r_n} v_n$$

gelangt.

Erwägt man, dass jedem Punkte (9) der Schwingungscurve der symmetrische Punkt (17) nothwendig entspricht, so gelangt man zur Überzeugung, dass die Änderungen (166) der Anfangsphasen, wenn die r entweder alle gerad, oder mit den Schwingungszahlen (16) gleichgeltend sind, die Gestalt der Schwingungscurve nicht ändern, wenn aber die r anders beschaffene ganze Zahlen sind, dieselbe in ihre Symmetriecurve in Bezug auf ihre Projection auf den Coordinatraum, auf welchen sich die geraden der r beziehen, verwandeln. Da jedem Punkte (9) der

doppelt symmetrischen Schwingungscurve nebst dem symmetrischen Punkte (17), noch die symmetrischen Punkte (44) und (48) entsprechen, so wird die Gestalt derselben auch durch diejenigen Änderungen (166) der Anfangsphasen nicht geändert, deren r mit den Exponenten in (44) und (48) gleichgeltend sind.

Der verschiedenen Punkte mit numerisch gleichen Coordinaten gibt es in einem n-axigen Coordinatsysteme

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Mit Rücksicht darauf, dass eine jede Schwingungscurve zwei so beschaffene Punkte nothwendig aufnimmt, ersehen wir, dass einer jeden Schwingungscurve sich im Allgemeinen

$$2^{n-1} - 1$$

verschiedene verwandte symmetrische zuordnen, deren Anfangsphasen von jenen der ersteren um Werthe von den Formen (166) verschieden sind. Der doppelt symmetrischen Schwingungscurve ordnen sich nur

$$2^{n-2} - 1$$

verschiedene verwandte symmetrische zu.

Was die Änderungen (167) der Anfangsphasen anbelangt, so üben sie dieselbe Wirkung auf die Gestalt der Schwingungscurve aus, wie die aus (4) hervorhergehenden Änderungen der Anfangsphasen

$$\Delta t_1 = r_1 \frac{T_1}{2} - 2(t + t_1),\ \Delta t_2 = r_2 \frac{T_2}{2} - 2(t + t_2), \ldots$$
$$\Delta t_n = r_n \frac{T_n}{2} - 2(t + t_n)$$

Letztere bewirken zufolge (6), dass der schwingende Punkt, der vor denselben den Punkt (168) mit den Coordinatgeschwindigkeiten (169) passirt, in derselben Zeit in den Punkt

$$(-1)^{r_1} x_1,\ (-1)^{r_2} x_2, \ldots (-1)^{r_n} x_n$$

mit den Coordinatgeschwindigkeiten

$$-(-1)^{r_1} v_1, -(-1)^{r_2} v_2, \ldots -(-1)^{r_n} v_n$$

gelangt. Die Änderungen (167) der Anfangsphasen ertheilen sonach der Schwingungscurve dieselben Gestaltsänderungen, wie die Änderungen (166) der Anfangsphasen, deren r mit jenen in (167) gleichgeltend sind, nur bewirken sie wegen Umkehrung der Richtung sämmtlicher Coordinatgeschwindigkeiten, dass die Schwingungscurve im entgesetzten Sinne vom schwingenden Punkte durchwandert wird.

§. 8.

Specieller Fall.

Um die vorgetragene Theorie der Schwingungscurven durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die Schwingungscurve, welcher drei elementare Schwingungen zu Grunde liegen, näher betrachten.

Die Coordinaten des der Zeit t entsprechenden Punktes der Curve sind

$$x_1 = a_1 \cos 2\pi \frac{t + t_1}{T_1},$$
$$x_2 = a_2 \cos 2\pi \frac{t + t_2}{T_2},$$
$$x_3 = a_3 \cos 2\pi \frac{t + t_3}{T_3},$$

und die derselben Zeit entsprechenden Coordinatgeschwindigkeiten des schwingenden Punktes

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= - c_1 \sin 2\pi \frac{t + t_1}{T_1}, \\ v_2 &= - c_2 \sin 2\pi \frac{t + t_2}{T_2}, \\ v_3 &= - c_3 \sin 2\pi \frac{t + t_3}{T_3}. \end{aligned}\right\} \quad (170)$$

Die Curve ist ein endlicher, geschlossener Linienzug, der vom schwingenden Punkte in der Zeit

$$T, \quad (171)$$

und im durch (170) angegebenen Sinne einmal umlaufen wird. Dieselbe ist, wenn von den Schwingungszahlen

$$(1),\ (2),\ (3) \tag{172}$$

zweie gerad sind, in Bezug auf ihre Projection auf die Coordinatebene, auf welche sich diese geraden Schwingungszahlen beziehen, wenn nur Eine gerad ist, in Bezug auf ihre Projection auf die Coordinataxe, auf welche sich diese gerade Schwingungszahl bezieht, und wenn keine gerad ist, in Bezug auf ihre Projection auf den Coordinatursprung symmetrisch. Im letzten der genannten Fälle besitzt dieselbe einen Mittelpunkt im Ursprunge der Coordinaten.

Die Projection der Schwingungscurve auf die Coordinatebene $x_{\underline{a}}$ wird von der Projection des schwingenden Punktes in der Zeit

$$T_{\underline{a}}$$

einmal, also in der Zeit (171), $(\underline{a})$mal umlaufen. Dieselbe ist, wenn von den Schwingungszahlen

$$(b)_{\underline{a}},\ (c)_{\underline{a}} \tag{173}$$

Eine gerad ist, in Bezug auf ihre Projection auf die Coordinataxe, auf welche sich diese gerade Schwingungszahl bezieht, und wenn keine gerad ist, in Bezug auf ihre Projection auf den Coordinatursprung symmetrisch. Im letzten der genannten Fälle besitzt dieselbe einen Mittelpunkt im Ursprunge der Coordinaten.

Die Schwingungscurve ist in Bezug auf sich selbst eine besondere, wenn die Anfangsphasen die Werthformen

$$t_1 = \tau_1 \frac{T_1}{4} + t_0,\ t_2 = \tau_2 \frac{T_2}{4} + t_0,\ t_3 = \tau_3 \frac{T_3}{4} + t_0$$

besitzen, und zwar ist sie zusammenfallend, wenn die τ entweder alle gerad, oder mit den Schwingungszahlen (172) gleichgeltend sind, hingegen doppelt symmetrisch, wenn die τ anders beschaffene ganze Zahlen sind. Bei einer der betreffenden besonderen Schwingungscurve entsprechenden natürlichen Zeitzählung sind die Anfangsphasen der zusammenfallenden Schwingungscurve

$$t_1 = \tau_1 \frac{T_1}{2},\ t_2 = \tau_2 \frac{T_2}{2},\ t_3 = \tau_3 \frac{T_3}{2},$$

und der doppelt symmetrischen

$$t_1 = \tau_1 \frac{T_1}{4},\ t_2 = \tau_2 \frac{T_2}{4},\ t_2 = \tau_3 \frac{T_3}{4},$$

wo für die zusammenfallende Schwingungscurve die τ beliebige ganze Zahlen sind.

Die Schwingungscurve ist in Bezug auf ihre Projection auf die Coordinatebene $x_{\underline{a}}$ eine besondere, wenn die Anfangsphasen t_b und t_c die Werthformen

$$t_b = \tau_b \frac{T_b}{4} + t_0,\ t_c = \tau_c \frac{T_c}{4} + t_0$$

besitzen, und zwar ist diese Projection zusammenfallend, wenn die τ entweder beide gerad, oder mit den Schwingungszahlen (173) gleichgeltend sind, hingegen doppelt symmetrisch, wenn die τ anders beschaffene ganze Zahlen sind. Bei einer der betreffenden besonderen Projection entsprechenden natürlichen Zeitzählung sind die Anfangsphasen der zusammenfallenden Projection

$$t_b = \tau_b \frac{T_b}{2},\ t_c = \tau_c \frac{T_c}{2},$$

und der doppelt symmetrischen

$$t_b = \tau_b \frac{T_b}{4},\ t_c = \tau_c \frac{T_c}{4},$$

wo für die zusammenfallende Projection die τ beliebige ganze Zahlen sind.

Einem bestimmten Punkte der $\underline{a}$-Schwingungscurve gehören, wenn diese Projection nicht zusammenfallend ist,

$$(\underline{a}),$$

und wenn sie zusammenfallend ist, ohne dass die Schwingungscurve selbst es ist,

$$2(\underline{a}),$$

und einem bestimmten Punkte der a-Schwingungscurve, wenn die Schwingungscurve selbst nicht zusammenfallend ist

$$2(a)$$

verschiedene Punkte der Schwingungscurve im Allgemeinen an. Die ersteren liegen in einer a-Schwingungscurve, die letzteren in einer $\underline{a}$-Schwingungscurve, und zwar gleichzeitig in $2(a)_{\underline{b}}$, b-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{b})$ enthält, oder in $(a)_{\underline{b}}$, b-Schwingungscurven, deren jede ihrer $2(\underline{b})$ aufnimmt, je nachdem die $\underline{b}$-Schwingungscurve nicht zusammenfallend, oder zusammenfallend ist, und in $2(a)_{\underline{c}}$, c-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{c})$ enthält, oder in $(a)_{\underline{c}}$, c-Schwingungscurven, deren jede ihrer $2(\underline{c})$ besitzt, je nachdem die $\underline{c}$-Schwingungscurve nicht zusammenfallend, oder zusammenfallend ist. Wenn die Schwingungscurve selbst zusammenfallend ist, so gehören einem bestimmten Punkte der $\underline{a}$-Schwingungscurve

$$(\underline{a}),$$

und einem bestimmten Punkte der a-Schwingungscurve

$$(a)$$

verschiedene Punkte der Schwingungscurve im Allgemeinen an. Die ersteren liegen in einer a-Schwingungscurve, und die letzteren in einer $\underline{a}$-Schwingungscurve, und zwar gleichzeitig in $(a)_{\underline{b}}$, b-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{b})$ enthält, und in $(a)_{\underline{c}}$, c-Schwingungscurven, deren jede ihrer $(\underline{c})$ besitzt.

Die Schwingungscurve überhaupt besitzt die a-Punkte

$$\begin{aligned} x_a &= (-1)^{\iota} a_a \cos\pi \frac{\iota(a)}{z}, \\ x_b &= a_b \cos\pi \left(\frac{2t_b}{T_b} + \frac{\iota(b)}{z}\right), \qquad (174) \\ x_c &= a_c \cos\pi \left(\frac{2t_c}{T_c} + \frac{\iota(c)}{z}\right), \end{aligned}$$

worin

$$\tau_a \frac{T_a}{2},\ t_b,\ t_c$$

die Anfangsphasen der a-, b-, und c-Schwingung bei einer der $\underline{a}$-Schwingungscurve entsprechenden natürlichen Zeitzählung vorstellen, und

$$z = (\underline{a})(a)$$

ist.

Einem bestimmten, auf einen a-Punkt sich beziehenden Punkte der $\underline{a}$-Schwingungscurve gehören, wenn $(\underline{a})$ ungerad ist,

$$\frac{(\underline{a})+1}{2},$$

und wenn $(\underline{a})$ gerad ist,

$$\frac{(\underline{a})}{2}+1 \text{ oder } \frac{(\underline{a})}{2},$$

je nachdem der genommene Punkt der $\underline{a}$-Schwingungscurve einem geraden, oder ungeraden τ entspricht, und einem bestimmten, auf einen a-Punkt sich beziehenden Punkte der a-Schwingungscurve

$$(a)$$

verschiedene Punkte der Schwingungscurve an.

Die Punkte (174) theilen sich ein in a-Gipfel

$$x_a = (-1)^{\tau_a+\tau} a_a,$$
$$x_b = a_b \cos\pi\left(\frac{2t_b}{T_b} + \frac{\tau(b)}{z'}\right),$$
$$x_c = a_c \cos\pi\left(\frac{2t_c}{T_c} + \frac{\tau(c)}{z'}\right),$$

wo

$$z' = (a),$$

und in a-Knoten

$$x_a = (-1)^{\tau_a} a_a \cos\pi\frac{\tau(a)}{z},$$
$$x_b = a_b \cos\pi\left(\frac{2t_b}{T_b} + \frac{\tau(b)}{z}\right), \quad \{(\underline{a})\}$$
$$x_c = a_c \cos\pi\left(\frac{2t_c}{T_c} + \frac{\tau(c)}{z}\right).$$

In jedem der ersteren erhält nur die Coordinate

$$x_a$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve Eine Tangente, welche zu ihrer Projection auf die Coordinatebene

$$x_{\underline{a}} \qquad (175)$$

parallel ist, in jedem der letzteren erhält keine Coordinate einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2 verschiedene Tangenten, welche gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf die Coordinatebene (175) symmetrisch sind. Der ersteren Punkte gibt es

$$2(a),$$

der letzteren

$$[(\underline{a})-1](a),$$

aller zusammen

$$[(\underline{a})+1](a)$$

verschiedene.

Die Anzahl aller verschiedenen Gipfel ist

$$2(1)+2(2)+2(3),$$

die Anzahl aller verschiedenen Knoten

$$[(\underline{1})-1](1)+[(\underline{2})-1](2)+[(\underline{3})-1](3),$$

die Anzahl aller verschiedenen besonderen Punkte

$$[(\underline{1})+1](1)+[(\underline{2})+1](2)+[(\underline{3})+1](3).$$

Wenn die Projection der Schwingungscurve auf die Coordinatebene $x_{\underline{a}}$ zusammenfallend ist, ohne dass die Schwingungscurve selbst es ist, so kommen in ihr ausser den eben genannten besonderen Punkten, auch noch $\underline{a}$-Punkte, und sonst keine anderen besonderen Punkte vor.

Die $\underline{a}$-Punkte sind

$$
\begin{aligned}
x_b &= (-1)^{\tau_b} a_b \cos \pi \frac{\tau(b)}{z}, \\
x_c &= (-1)^{\tau_c} a_c \cos \pi \frac{\tau(c)}{z}, \qquad (176) \\
x_a &= a_a \cos \pi \left(\frac{2t_a}{T_a} + \frac{\tau(a)}{z} \right),
\end{aligned}
$$

worin

$$\tau_b \frac{T_b}{2}, \quad \tau_c \frac{T_c}{2}, \quad t_a$$

die Anfangsphasen der b-, c-, und a-Schwingung bei einer der $\underline{a}$-Schwingungscurve entsprechenden natürlichen Zeitzählung vorstellen und

$$z = (a)(\underline{a})$$

ist.

Einem bestimmten, auf einen $\underline{a}$-Punkt sich beziehenden Punkte der a-Schwingungscurve gehören, wenn (a) ungerad ist,

$$\frac{(a)+1}{2},$$

und wenn (a) gerad ist,

$$\frac{(a)}{2} + 1 \text{ oder } \frac{(a)}{2},$$

je nachdem der genommene Punkt der a-Schwingungscurve einem geraden oder ungeraden τ entspricht, und einem bestimmten, auf einen $\underline{a}$-Punkt sich beziehenden Punkte der $\underline{a}$-Schwingungscurve

$$(\underline{a})$$

verschiedene Punkte der Schwingungscurve an.

Die Punkte (176) theilen sich ein in $\underline{a}$-Gipfel

$$
\begin{aligned}
x_b &= (-1)^{\tau_b + \tau(b)'} a_b, \\
x_c &= (-1)^{\tau_c + \tau(c)'} a_c, \\
x_a &= a_a \cos \pi \left(\frac{2t_a}{T_a} + \frac{\tau(a)}{z'} \right),
\end{aligned}
$$

wo

$$z' = (\underline{a}),$$
$$(b') = \frac{(b)}{z'},$$
$$(c') = \frac{(c)}{z'},$$

und $\underline{a}$-Knoten

$$x_b = (-1)^{\tau_b} a_b \cos\pi \frac{\tau(b)}{z},$$
$$x_c = (-1)^{\tau_c} a_c \cos\pi \frac{\tau(c)}{z}, \qquad \{(a)\}$$
$$x_a = a_a \cos\pi \left(\frac{2t_a}{T_a} + \frac{\tau(a)}{z}\right).$$

In jedem der ersteren, als $\underline{a}$-Punkte erhält jede der Coordinaten

$$x_b,\ x_c \tag{177}$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve Eine Tangente, welche zu ihrer Projection auf die Coordinataxe

$$x_a \tag{178}$$

parallel ist; in jedem der letzteren, als $\underline{a}$-Punkte erhält nicht jede der Coordinaten (177) einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2 verschiedene Tangenten, welche gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf die Coordinataxe (178) symmetrisch sind. Der ersteren Punkte gibt es

$$2(\underline{a}),$$

der letzteren

$$[(a) - 1](\underline{a}),$$

aller zusammen

$$[(a) + 1](\underline{a})$$

verschiedene.

Die besonderen Punkte der betrachteten Schwingungscurve, welche sich auf besondere Zeiger beziehen, verbinden sich zu 2-fachen und 2^2-fachen Punkten.

Die 2-fachen Punkte sind b-Punkte, c-Punkte und $\underline{a}$-Punkte. Die ersteren sind

$$\left.\begin{aligned} x_b &= (-1)^{\mathfrak{t}_b} a_b \cos \pi \frac{\mathfrak{t}(b)}{z}, \\ x_c &= (-1)^{\mathfrak{t}_c} a_c \cos \pi \frac{\mathfrak{t}(c)}{z}, \\ x_a &= a_a \cos \pi \left(\frac{2t_a}{T_a} + \frac{\mathfrak{t}(a)}{z} \right), \end{aligned}\right\} \qquad \left\{ \frac{(b)}{(\underline{c})(\underline{a})} \right\} \tag{179}$$

wo

$$z = (\underline{b})(b),$$

die zweiten

$$\left.\begin{aligned} x_c &= (-1)^{\mathfrak{t}_c} a_c \cos \pi \frac{\mathfrak{t}(c)}{z}, \\ x_b &= (-1)^{\mathfrak{t}_b} a_b \cos \pi \frac{\mathfrak{t}(b)}{z}, \\ x_a &= a_a \cos \pi \left(\frac{2t_a}{T_a} + \frac{\mathfrak{t}(a)}{z} \right), \end{aligned}\right\} \qquad \left\{ \frac{(c)}{(\underline{a})(\underline{b})} \right\} \tag{180}$$

wo

$$z = (\underline{c})(c),$$

und die dritten

$$\left.\begin{aligned} x_b &= (-1)^{\mathfrak{t}_b} a_b \cos \pi \frac{\mathfrak{t}(b)}{z}, \\ x_c &= (-1)^{\mathfrak{t}_c} a_c \cos \pi \frac{\mathfrak{t}(c)}{z}, \\ x_a &= a_a \cos \pi \left(\frac{2t_a}{T_a} + \frac{\mathfrak{t}(a)}{z} \right), \end{aligned}\right\} \qquad \left\{ \frac{(a)}{(\underline{b})(\underline{c})} \right\} \tag{181}$$

wo

$$z = (a)(\underline{a}).$$

Die Punkte (179) theilen sich ein in b-Gipfel

$$x_b = (-1)^{\tau_b + \tau} a_b,$$
$$x_c = (-1)^{\tau_c} a_c \cos \pi \frac{\tau(c)}{z'}, \qquad \left\{ \frac{(b)}{(\underline{c})(\underline{a})} \right\}$$
$$x_a = a_a \cos \pi \left(\frac{2t_a}{T_a} + \frac{\tau(a)}{z'} \right),$$

wo

$$z' = (b),$$

und b-Knoten

$$x_b = (-1)^{\tau_b} a_b \cos \pi \frac{\tau(b)}{z},$$
$$x_c = (-1)^{\tau_c} a_c \cos \pi \frac{\tau(c)}{z}, \qquad \left\{ \begin{matrix} \frac{(b)}{(\underline{c})(\underline{a})} \\ (\underline{b}) \end{matrix} \right\}$$
$$x_a = a_a \cos \pi \left(\frac{2t_a}{T_a} + \frac{\tau(a)}{z} \right).$$

Der ersteren gibt es

$$2\left[(b) - (\underline{c})(\underline{a})\right],$$

der letzteren

$$\left[(\underline{b}) - 1\right]\left[(b) - (\underline{c})(\underline{a})\right],$$

aller zusammen

$$\left[(\underline{b}) + 1\right]\left[(b) - (\underline{c})(\underline{a})\right]$$

verschiedene.

Die Punkte (180) theilen sich ein in c-Gipfel

$$x_c = (-1)^{\tau_c + \tau} a_c,$$
$$x_b = (-1)^{\tau_b} a_b \cos \pi \frac{\tau(b)}{z'}, \qquad \left\{ \frac{(c)}{(\underline{a})(\underline{b})} \right\}$$
$$x_a = a_a \cos \pi \left(\frac{2t_a}{T_a} + \frac{\tau(a)}{z'} \right),$$

wo

$$z' = (c),$$

und c-Knoten

$$x_c = (-1)^{\nu_c} a_c \cos \pi \frac{\tau(c)}{z},$$
$$x_b = (-1)^{\nu_b} a_b \cos \pi \frac{\tau(b)}{z},$$
$$x_a = a_a \cos \pi \left(\frac{2t_a}{T_a} + \frac{\tau(a)}{z}\right).$$
$$\left\{\frac{(c)}{(\underline{a})(\underline{b})}\right\} \quad \left\{(\underline{c})\right\}$$

Der ersteren gibt es

$$2\left[(c) - (\underline{b})(\underline{a})\right],$$

der letzteren

$$\left[(\underline{c}) - 1\right]\left[(c) - (\underline{b})(\underline{a})\right],$$

aller zusammen

$$\left[(\underline{c}) + 1\right]\left[(c) - (\underline{b})(\underline{a})\right]$$

verschiedene.

Die Punkte (181) sind blos $\underline{a}$-Knoten,

$$\left[(a) - (\underline{b})(\underline{c})\right](\underline{a})$$

verschiedene an der Zahl.

Die 2^2-fachen Punkte sind b-, c-Punkte, und zwar

$$x_b = (-1)^{\nu_b} a_b \cos \pi \frac{\tau(b)}{z},$$
$$x_c = (-1)^{\nu_c} a_c \cos \pi \frac{\tau(c)}{z}, \qquad (182)$$
$$x_a = a_a \cos \pi \left(\frac{2t_a}{T_a} + \frac{\tau(a)}{z}\right),$$

wo

$$z = (\underline{b})(\underline{c})(\underline{a}).$$

Die Punkte (182) theilen sich ein in b-, c-Gipfel

$$x_b = (-1)^{\nu_b + \tau(b)''} a_b,$$
$$x_c = (-1)^{\nu_c + \tau(c)''} a_c,$$
$$x_a = a_a \cos \pi \left(\frac{2t_a}{T_a} + \frac{\tau(a)}{z''}\right),$$

wo

$$z''=(\underline{a}),$$
$$(b)''=\frac{(b)}{z''},$$
$$(c)''=\frac{(c)}{z''},$$

b-Gipfel-*c*-Knoten

$$\left.\begin{aligned} x_b&=(-1)^{\tau_c+\tau(b)'}a_b,\\ x_c&=(-1)^{\tau_c}a_c\cos\pi\,\frac{\tau(c)}{z'},\\ x_a&=a_a\cos\pi\left(\frac{2t_a}{T_a}+\frac{\tau(a)}{z'}\right),\end{aligned}\right\}\quad\{(\underline{c})\}$$

wo

$$z'=(\underline{c})(\underline{a}),$$
$$(b)'=\frac{(b)}{z'};$$

c-Gipfel-*b*-Knoten

$$\left.\begin{aligned} x_c&=(-1)^{\tau_c+\tau(c)'}a_c,\\ x_b&=(-1)^{\tau_c}a_b\cos\pi\,\frac{\tau(b)}{z'},\\ x_a&=a_a\cos\pi\left(\frac{2t_a}{T_a}+\frac{\tau(a)}{z'}\right),\end{aligned}\right\}\quad\{(\underline{b})\}$$

wo

$$z'=(\underline{b})(\underline{a}),$$
$$(c)'=\frac{(c)}{z'},$$

und *b*-, *c*-Knoten

$$\left.\begin{aligned} x_b&=(-1)^{\tau_c}a_b\cos\pi\,\frac{\tau(b)}{z},\\ x_c&=(-1)^{\tau_c}a_c\cos\pi\,\frac{\tau(c)}{z},\\ x_a&=a_a\cos\pi\left(\frac{2t_a}{T_a}+\frac{\tau(a)}{z}\right).\end{aligned}\right\}\quad\begin{Bmatrix}(\underline{b})\\(\underline{c})\end{Bmatrix}$$

In jedem der ersten erhält jede der Coordinaten

$$x_b, \; x_c \tag{183}$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve Eine Tangente, welche zu ihrer Projection auf die Coordinataxe

$$x_a \tag{184}$$

parallel ist; in jedem der zweiten erhält nur die erste der Coordinaten (183) einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2 verschiedene Tangenten, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf die Coordinatebene

$$x_{\underline{b}} \tag{185}$$

parallel ist, und beide gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf die Coordinataxe (184) symmetrisch sind; in jedem der dritten erhält nur die zweite der Coordinaten (183) einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2 verschiedene Tangenten, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf die Coordinatebene

$$x_{\underline{c}} \tag{186}$$

parallel ist, und beide gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf die Coordinataxe (184) symmetrisch sind, und in jedem der vierten erhält keine Coordinate einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2^2 verschiedene Tangenten, von welchen je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf die zugehörige der Coordinatebenen (185) (186), so wie der Coordinataxe (184) symmetrisch sind. Der ersten gibt es

$$2(\underline{a}),$$

der zweiten

$$[(\underline{c})-1](\underline{a}),$$

der dritten

$$[(b)-1](a),$$

der vierten

$$2^{-1}[(\underline{b})-1][(\underline{c})-1](\underline{a}),$$

aller zusammen

$$2^{-1}[(\underline{b})+1][(\underline{c})+1](\underline{a})$$

verschiedene.

Wenn die Schwingungscurve selbst zusammenfallend ist, so besitzt sie ihrer Besonderheit zufolge in jedem ihrer Punkte einen 2-fachen Punkt mit 2 Tangenten von gerade entgegengesetzter Richtung.

Die besonderen Punkte der betrachteten Schwingungscurve verbinden sich zu 2^2-fachen und 2^3-fachen Punkten.

Die 2^3-fachen sind a-, $\underline{a}$-Punkte, und zwar

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (-1)^{\tau_1} a_1 \cos \pi \frac{\tau(1)}{z}, \\ x_2 &= (-1)^{\tau_2} a_2 \cos \pi \frac{\tau(2)}{z}, \\ x_3 &= (-1)^{\tau_3} a_3 \cos \pi \frac{\tau(3)}{z}, \end{aligned}\right\} \left\{\frac{(a)}{(\underline{b})(\underline{c})}\right\} \qquad (187)$$

worin

$$\tau_1 \frac{T_1}{2}, \ \tau_2 \frac{T_2}{2}, \ \tau_3 \frac{T_3}{2}$$

die Anfangsphasen der 1-, 2- und 3-Schwingung bei einer der betrachteten Schwingungscurve entsprechenden natürlichen Zeitzählung vorstellen, und

$$z = (\underline{a})(a)$$

ist.

Die Punkte (187) theilen sich ein in a-Gipfel- $\underline{a}$-Knoten

$$\begin{aligned} x_a &= (-1)^{\tau_a + \tau} a_a, \\ x_b &= (-1)^{\tau_b} a_b \cos \pi \frac{\tau(b)}{z'}, \\ x_c &= (-1)^{\tau_c} a_c \cos \pi \frac{\tau(c)}{z'}, \end{aligned} \quad \left\{\frac{(a)}{(\underline{b})(\underline{c})}\right\}$$

wo

$$z' = (a);$$

und a-, $\underline{a}$-Knoten

$$x_1 = (-1)^{\mathfrak{t}_1} a_1 \cos \pi \frac{\mathfrak{t}(1)}{z}, \quad x_2 = (-1)^{\mathfrak{t}_2} a_2 \cos \pi \frac{\mathfrak{t}(2)}{z}, \quad x_3 = (-1)^{\mathfrak{t}_3} a_3 \cos \pi \frac{\mathfrak{t}(3)}{z}. \qquad \left\{ \frac{(a)}{(\underline{b})(\underline{c})} \right\} \left((\underline{a}) \right)_i$$

In jedem der ersteren erhält nur die Coordinate

$$x_a$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2 verschiedene Tangenten, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf die Coordinatebene

$$x_{\underline{a}} \tag{188}$$

parallel ist, und beide gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf die Coordinataxe

$$x_a \tag{189}$$

so wie auf den Coordinatursprung symmetrisch sind, welche daher ein Paar bilden, das gerade entgegengesetzte Richtungen besitzt; in jedem der letzteren erhält keine der Coordinaten einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2^2 verschiedene Tangenten, von welchen je zwei gegen eine Parallele auf die zugehörige der Coordinatebene (188) und der Coordinataxe (189), so wie auf den Coordinatursprung symmetrisch sind, welche daher 2 Paare bilden, von denen jedes gerade entgegengesetzte Richtungen besitzt. Der ersteren gibt es

$$(a) - (\underline{b})(\underline{c}),$$

der letzteren

$$2^{-1}\left[(\underline{a}) - 1\right]\left[(a) - (\underline{b})(\underline{c})\right],$$

aller zusammen

$$2^{-1}\left[(\underline{a}) + 1\right]\left[(a) - (\underline{b})(\underline{c})\right]$$

verschiedene.

Die 2^3-fachen Punkte sind 1-, 2-, 3-Punkte, und zwar

$$x_1 = (-1)^{\tau_1} a_1 \cos\pi \frac{\tau(1)}{z},$$
$$x_2 = (-1)^{\tau_2} a_2 \cos\pi \frac{\tau(2)}{z}, \qquad (190)$$
$$x_3 = (-1)^{\tau_3} a_3 \cos\pi \frac{\tau(3)}{z},$$

wo

$$z = (\underline{1})(\underline{2})(\underline{3}).$$

Die Punkte (190) theilen sich ein in 1-, 2-, 3-Gipfel

$$x_1 = (-1)^{\tau_1 + \tau(1)} a_1,$$
$$x_2 = (-1)^{\tau_2 + \tau(2)} a_2,$$
$$x_3 = (-1)^{\tau_3 + \tau(3)} a_3,$$

b-, c-Gipfel- a-Knoten

$$x_b = (-1)^{\tau_b + \tau(b'')} a_b,$$
$$x_c = (-1)^{\tau_c + \tau(c'')} a_c, \qquad \{(\underline{a})\}$$
$$x_a = (-1)^{\tau_a} a_a \cos\pi \frac{\tau(a)}{z''},$$

wo

$$z'' = (\underline{a}),$$
$$(b'') = \frac{(\underline{b})}{z''},$$
$$(c'') = \frac{(\underline{c})}{z''},$$

a-Gipfel- b-, c-Knoten

$$x_a = (-1)^{\tau_a + \tau(a')} a_a,$$
$$x_b = (-1)^{\tau_b} a_b \cos\pi \frac{\tau(b)}{z'}, \qquad \left\{ \begin{matrix} (\underline{b}) \\ (\underline{c}) \end{matrix} \right\}$$
$$x_c = (-1)^{\tau_c} a_c \cos\pi \frac{\tau(c)}{z'},$$

wo

$$z' = (\underline{b})(\underline{c}),$$
$$(a') = \frac{(\underline{a})}{z'},$$

und 1-, 2-, 3-Knoten

$$\begin{aligned} x_1 &= (-1)^{\mathfrak{t}_1} a_1 \cos \pi \frac{\mathfrak{t}(1)}{z}, \\ x_2 &= (-1)^{\mathfrak{t}_2} a_2 \cos \pi \frac{\mathfrak{t}(2)}{z}, \\ x_3 &= (-1)^{\mathfrak{t}_3} a_3 \cos \pi \frac{\mathfrak{t}(3)}{z}. \end{aligned} \qquad \left\{\begin{matrix} (\underline{1}) \\ (\underline{2}) \\ (\underline{3}) \end{matrix}\right\}$$

In jedem der ersten, welche die Hörner der betrachteten Schwingungscurve bilden, erhält jede der Coordinaten einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve eine Tangente von unbestimmter Richtung; in jedem der zweiten erhält nur jede der Coordinaten

$$x_b, \; x_c$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2 verschiedene Tangenten, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf die Coordinataxe

$$x_a$$

parallel ist, und beide gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf die Coordinatebene

$$x_{\underline{a}}$$

so wie auf den Coordinatursprung symmetrisch sind, welche daher ein Paar bilden, das gerad entgegengesetzte Richtungen besitzt; in jedem der dritten erhält nur die Coordinate

$$x_a$$

einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2^2 verschiedene Tangenten, von welchen eine jede zu ihrer Projection auf die Coordinatebene

$$x_{\underline{a}}$$

parallel ist, und je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf die zugehörige der Coordinatebenen

$$x_{\underline{b}}, \; x_{\underline{c}},$$

so wie der Coordinataxe

$$x_a,$$

oder auf den Coordinatursprung symmetrisch sind, welche daher 2 Paare bilden, von denen jedes gerad entgegengesetzte Richtungen besitzt; in jedem der vierten erhält keine der Coordinaten einen Maximal- oder Minimalwerth, und die Schwingungscurve 2^3 verschiedene Tangenten, von welchen je zwei gegen eine Parallele zu ihrer Projection auf die zugehörige der Coordinatebenen

$$x_{\underline{1}},\ x_{\underline{2}},\ x_3,$$

so wie der Coordinataxen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,$$

oder auf den Coordinatursprung symmetrisch sind, welche daher 2^2 Paare bilden, von denen jedes gerad entgegengesetzte Richtungen besitzt. Der ersten gibt es

$$2,$$

der zweiten

$$(\underline{a})-1,$$

der dritten

$$2^{-1}[(\underline{b})-1][(\underline{c})-1],$$

der vierten

$$2^{-2}[(\underline{1})-1][(\underline{2})-1][(\underline{3})-1],$$

aller zusammen

$$2^{-2}[(\underline{1})+1][(\underline{2})+1][(\underline{3})+1]$$

verschiedene.

Was die Anzahl der Arten der mehrfachen Punkte anbelangt, so besitzt die Schwingungscurve überhaupt

$$\frac{1}{1!}(2^1-1)=1$$

Art der 2-fachen Punkte, welche dem Zeiger a entsprechen, die

Schwingungscurve, deren Projection auf die Coordinatebene $x_{\underline{a}}$ zusammenfallend ist, ohne dass die Schwingungscurve selbst es ist

$$\frac{1}{1!}(2^2-1)=3$$

Arten der 2-fachen, und

$$\frac{1}{2!}[3^2-\binom{2}{1}2^2+1]=1$$

Art der 2^2-fachen Punkte, welche den besonderen Zeigern b, c entsprechen, und die zusammenfallende Schwingungscurve

$$\frac{1}{1!}(2^2-1)=3$$

Arten der 2^2-fachen, und

$$\frac{1}{2!}[3^2-\binom{2}{1}2^2+1]=1$$

Art der 2^3-fachen Punkte.

Zuwächse der Anfangsphasen, welche den Formen

$$\Delta t_1=r_1\frac{T_1}{2}+t_0, \quad \Delta t_2=r_2\frac{T_2}{2}+t_0, \quad \Delta t_3=r_3\frac{T_3}{2}+t_0 \quad (191)$$

angehören, ändern die Gestalt der Schwingungscurve nicht, wenn die r entweder alle gerad, oder mit den Schwingungszahlen

(1), (2), (3)

gleichgeltend sind; im entgegengesetzten Falle verwandeln sie die Schwingungscurve in ihre Symmetriecurve in Bezug auf ihre Projection auf denjenigen Coordinatraum, auf welchen sich die geraden der r beziehen. In der doppelt symmetrischen Schwingungscurve, deren Anfangsphasen

$$t_1=\tau_1\frac{T_1}{4}, \quad t_2=\tau_2\frac{T_2}{4}, \quad t_3=\tau_3\frac{T_3}{4}$$

sind, ändern überdies diejenigen Zuwächse (191) der Anfangsphasen die Gestalt der Curve nicht, deren r mit den Zahlen

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3,$$

oder mit den folgenden

$$\tau_1 + (1), \tau_2 + (2), \tau_3 + (3)$$

gleichgeltend sind.

Jeder Schwingungscurve ordnen sich im Allgemeinen

$$2^2 - 1 = 3$$

verwandte symmetrische zu, deren Anfangsphasen von jenen der ersteren um Werthe von den Formen (191) verschieden sind; der doppelt symmetrischen ordnen sich nur

$$2^1 - 1 = 1$$

verwandte symmetrische zu.

Zuwächse der Anfangsphasen, welche den Formen

$$\begin{aligned} \Delta t_1 = r_1 \frac{T_1}{2} - 2t_1 + t_0, \quad \Delta t_2 = r_2 \frac{T_2}{2} - 2t_2 + t_0, \\ \Delta t_3 = r_3 \frac{T_3}{2} - 2t_3 + t_0 \end{aligned} \tag{192}$$

angehören, ertheilen der Schwingungscurve dieselben Gestaltsänderungen, wie die Zuwächse (191) der Anfangsphasen, deren r mit jenen in (192) gleichgeltend sind, nur bewirken sie, dass die Schwingungscurve vom schwingenden Punkte im entgegengesetzten Sinne durchwandert wird [1].

---

[1] Eine umständliche, auf denselben Principien beruhende „Theorie der Schwingungscurven, denen zwei elementare Schwingungen zu Grunde liegen", habe ich in den „Jahresberichten des technischen Vereines in Lemberg" vom J. 1867 veröffentlichet.

Bericht über die von den Herren: Director C. Bruhns, Director W. Förster, Prof. E. Weiss ausgeführten Bestimmungen der Meridiandifferenzen Berlin—Wien—Leipzig.

Von **Karl v. Littrow,**
wirklichem Mitgliede der k. Akademie der Wissenschaften.

(Auszug einer am 11. April 1872 für die Denkschriften vorgelegten Abhandlung.)

Im Anschlusse an die für die Europäische Gradmessung im J. 1864 durchgeführte, der k. Akademie am 20. Juli 1871 vorgelegte [1] Bestimmung der Breite und des Azimuthes auf dem Laaer Berge bei Wien wird hier die im J. 1865 unternommene Bestimmung der geographischen Länge desselben Feldobservatoriums gegen Leipzig und Berlin mitgetheilt.

Die Messung geschah auf telegraphischem Wege in Bezug auf Leipzig durch die sogenannte Coïncidenzmethode, hinsichtlich Berlins durch diese und eine zweite, von Dir. Förster vorgeschlagene, hier zuerst angewendete Beobachtungsart, bei welcher die Sterndurchgänge local und eine Reihe von Signalen sowohl local als in die Linie registrirt werden und man so den sehr grossen Vortheil einer ungemein kurzen Benützung der telegraphischen Leitungen erreicht. Die angewandten Instrumente waren an allen drei Stationen völlig ähnlich gebaute transportable Mittagsrohre mit Gebrochenem Fernrohre von 30‴ Öffnung aus der Werkstätte von Pistor und Martins. Die persönliche Gleichung wurde nicht durch Wechseln der Beobachter eliminirt, sondern durch unmittelbare Vergleichung derselben an demselben Instrumente bestimmt.

---

[1] Denkschriften mathem.-naturw. Cl. XXXII. Bd., Auszug Sitzungsberichte LXIV. Bd.

Es ergab sich:

Sternwarte Leipzig (Hauptpfeiler)
vom Observatorium Laaer Berg
(Pfeiler) . . . . 12ᵐ2ˢ241 W. ±0ˢ016 w. F.
Sternwarte Berlin (Hauptpfeiler)
vom Observatorium Laaer Berg
(Pfeiler) . . . . 12ᵐ1ˢ335 W. ±0ˢ018 „ „

Obschon die erste dieser beiden Bestimmungen ungeachtet ihres kleineren wahrscheinlichen Fehlers durch das Detail ihrer Grundlagen, namentlich durch eine bedeutende Unsicherheit der persönlichen Gleichung weniger Vertrauen erweckt als die zweite, so haben sich doch auch bei jener Bestimmung die verschiedenen Fehlerquellen äusserst glücklich ausgeglichen, wie aus Nachstehendem folgt.

Die Herren Directoren: Förster und Bruhns führten im J. 1864 eine ähnliche Operation in Bezug auf Leipzig und Berlin durch und fanden so

Sternwarte Berlin (Hauptpfeiler)
von Sternwarte Leipzig (Haupt-
pfeiler) . . . . 4ᵐ0ˢ895 O. ±0ˢ020 w. F.

Aus unseren obigen Daten würde dieselbe Längendifferenz abgeleitet über Wien lauten . . . 4ᵐ0ˢ906 O. ±0ˢ024 w. F. also nur um 0ˢ011 und ganz innerhalb der wahrscheinlichen Fehler von der unmittelbaren Bestimmung verschieden.

Übrigens beträgt nach den Angaben des k. k. Militär-geographischen Institutes

Distanz: Laaer Berg — Wiener Sternwarte (Meridiankreis)
3093·02 Wien. Klftr. (= 5865·9 Meter)

Azimuth: Laaer Berg — Wiener Sternw. 166°6′6″0 W.

woraus folgt:

Observatorium Laaer Berg 3′4″34 südlich von Wien. Sternw.
„ „ „ 4ˢ563 östlich „ „ „

XI. SITZUNG VOM 18. APRIL 1872.

Herr Hofrath Dr. J. Hyrtl übersendet eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung über „die Kopfarterien der Haifische.“

Die Direction des k. k. Gymnasiums zu Trebitsch dankt mit Zuschrift am 17. April für die Betheilung dieser Lehranstalt mit Publicationen der Classe.

Herr Director Dr. J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Über die dynamische Theorie der Diffusion der Gase.“

Herr Dr. L. Ritter v. Schrötter, Vorstand der Klinik für Laryngoskopie, übergibt eine „Mittheilung über ein von der Herzaction abhängiges, aus der Lungenspitze einzelner Kranker wahrnehmbares Geräusch.“

Herr Prof. Dr. S. Stern legt eine Abhandlung: „Beiträge zur Theorie der Resonanz lufthältiger Hohlräume“ vor.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Imp. des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Rouen: Précis analytique des travaux pendant l'année 1869—70. Rouen & Paris, 1870; 8°.

Accademia Pontificia de' nuovi Lincei: Atti. Anno XXV, Sess. 3ª. Roma, 1872; 4°.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. Januar 1872. Berlin; 8°.

Association, The American Pharmaceutical: Proceedings at the XIXth Annual Meeting, held in St. Louis, Mo., September, 1871. Philadelphia, 1872; 8°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome XLIII, Nr. 171. Génève, Lausanne, Paris, 1872; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nr. 14. Paris, 1872; 4°.

Fleury-Flobert, Congrès scientifique d'Anvers en 1871. Rapport à l'Académie Nationale agricole, manufacturière te commerciale. Paris, 1872; 12°.

Gesellschaft, k. k. zoolog.-botan., in Wien: Verhandlungen. Jahrgang 1871. XXI. Band. Wien; 8°. — Nowicki, Max. Über die Weizenverwüsterin *Chlorops taeniopus* Meig. und die Mittel zu ihrer Bekämpfung. Wien, 1871; 8°. — Künstler, Gustav, Die unseren Kulturpflanzen schädlichen Insekten. Wien, 1871; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VII. Band, Nr. 7. Wien, 1872; 4°.

— zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg: Schriften. Band X. Cassel, 1871; 8°.

Istituto, R., Veneto di Scienze, Lettere ed Arti: Atti. Tomo I°, Serie IV*, Disp. 4ª. Venezia, 1871—72; 8°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band V, 5. Heft. Leipzig, 1872; 8°.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 8. Graz, 1872; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k. in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 9. Wien; 8°.

Listing, J. B., Über das Reflexionsprisma. (Nachrichten der k. Ges. d. Wiss. in Göttingen.) Göttingen, 1871; 12°.

Mittheilungen des k. k. techn. & administrat. Militär-Comité. Jahrgang 1872. 4. Heft. Wien; 8°.

— aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 18. Band, 1872. III. Heft. Gotha; 4°.

Nature. Nr. 128, Vol. V. London, 1872; 4°.

Observatorio astronómico Arjentino: Discursos sobre su inauguracion verificada el 24 de Octubre de 1871. Buenos Aires, 1872; gr. 8°.

— de Marina de San Fernando: Anales. Mayo — Diciembre 1870. — Seccion 1ª. Observaciones Astronomicas. San Fernando, 1871; 4°.

Ohrtmann, Carl, Das Problem der Tautochronen. (Jahres-Bericht über d. k.. Realschule, Vorschule und Elisabethschule zu Berlin. 1872.) 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1872, Nr. 6. Wien; 4°.

„Revue politique et littéraire“ et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger. I[re] Année (2[e] série) Nr. 42. Paris & Bruxelles, 1872; 4⁰.

Sangalli, Giacomo, Studj fisio-patologici sopra alcuni casi di chirurgia e d'anatomia pratica. Milano, 1871; 4⁰.

Schlagintweit-Sakünlünski, Hermann von, Untersuchungen über die Salzseen im westlichen Tibet und in Turkistán. I. Theil. (Abhdlgn. der k. bayer. Akad. d. Wiss. II. Cl. XI. Bd. 1. Abth.) München, 1871; 4⁰.

Schrauf, Albrecht, Atlas der Krystall-Formen des Mineralreiches. II. & III. Lieferung. Wien, 1872; 4⁰.

Sociedad de Naturalistas-colombianos: Catálogo de los objetos enviados a la exposicion nacional de 1871. Bogota, 1871; 8⁰. — Informe de los esploradores del territorio de San Martin. Bogota, 1871; 4⁰. — Ensayo descriptivo de las Palmas de San Martin i Casanare, por Jenaro Balderrama. Bogota, 1871; 4⁰. — Catálogo del estado S. de Antioquia. Bogota, 1871; 4⁰.

Société botanique de France: Bulletin. Tome XVIII, 1871. Revue bibliographique A. Paris; 8⁰.

— des Ingénieurs civils: Séances du 6 Octobre 1871 au 15 Mars 1872. Paris; 8⁰.

Verein, naturforschender, in Brünn: Verhandlungen. IX. Band. 1870. Brünn, 1871; 8⁰.

— Entomologischer, in Berlin: Berliner Entomologische Zeitschrift. XV. Jahrgang (1871). 2. & 3. Vierteljahrsheft; XVI. Jahrgang (1872). 1. Vierteljahrsheft. Berlin; 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 15. Wien, 1872; 4⁰.

Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Band, 19. Heft. Leipzig, 1871; 8⁰.

— des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIV. Jahrgang. 4. Heft. Wien, 1872; 4⁰.

Beiträge zur Theorie der Resonanz lufthältiger Hohlräume.

Von Prof. Dr. S. Stern.

Anschliesend an die in frühern Aufsätzen [1] enthaltenen Mittheilungen möge hier über einige Beobachtungen berichtet werden, die sich auf die Resonanz der Luft in Hohlräumen beziehen. Auch hier werden gewissermassen im Hintergrunde die theoretischen Fragen erscheinen, in wiefern die freie Luft sich an der Schallbildung betheilige? und ob nicht auch die Form der Schwingungen auf die Schallstärke einen Einfluss habe? Nebenher können die anzuführenden Daten vielleicht auch noch an gewisse praktische Fragen allgemeiner Natur — abgesehen von denen der medicinischen Diagnostik — erinnern, so z. B. an die Frage des Baues grosser akustischer Räume. — Den Ausgangspunkt der vorgenommenen Untersuchung bildete die im Aufsatz II, S. 3 angeführte Thatsache, dass die Resonanz von lufthältigen Hohlräumen auch im Innern derselben sofort verschwindet, wenn ihre Mündung geschlossen wird. Um nämlich diese Thatsache eingehender zu prüfen, wurde die Resonanz einer grossen Anzahl von Gefässen von verschiedener Grösse und Form genau beobachtet, und zwar zunächst im natürlichen Zustande der Gefässe, dann aber auch während einer bis zum vollständigen Verschluss sich steigernden, allmäligen Verengerung ihrer Mündung, und schliesslich auch noch, während zwei Hohlräume in mannigfacher Weise mit einander combinirt wurden. Die Methode der Untersuchung ist die schon in frühern Aufsätzen berührte. Es dient nämlich ein Kautschukrohr von ca. 40 Cm. Länge 4—5

[1] I. „Beiträge zur Theorie des gemeinen Schalles mit Rücksicht auf die medic. Diagnostik“ (Febr. 1870); II. „Über die Resonanz der Luft im freien Raume“ (März 1870); III. „Beiträge zur Theorie der Resonanz fester Körper mit Rücksicht auf das Mitschwingen der Luft“ (Febr. 1871).



Mm. Durchmesser im Lumen, welches an einem Ende ein Ansatzstück zum Einfügen in den äussern Gehörgang trägt, als Hörrohr. Das freie Ende dieses Rohres wird in den zu prüfenden Hohlraum gesenkt, das Ansatzstück in den äussern Gehörgang eingefügt, und nun die Tasten eines Claviers in unmittelbarer Nähe der Reihe nach angeschlagen. Sowie der Eigenton des Hohlraumes erklingt, dringt die Resonanz desselben durch das Hörrohr mächtig in's Ohr und wird sofort erkannt. — Die zur Untersuchung benützten Gefässe sind grösstentheils den gewöhnlichsten Haushaltungs-Objecten entnommen, und lassen sich ihrer Hauptform nach in einfache (cylindrische, sphäroidische, ellipsoidische etc.) und in zusammengesetzte unterscheiden; bei letztern sind zwei oder auch mehrere einfache Formen mit einander combinirt (cylinder und ellipsoid, cylinder und sphäroid etc.). Es wurden durch die directe Beobachtung eine Reihe von Thatsachen constatirt, die theils zu bestimmten Schlüssen über einzelne Bedingungen der Stärke und Dauer der Resonanz im Allgemeinen führen, theils einzelne Momente der Bildung von Schallschwingungen einigermassen zu beleuchten geeignet sind. Die zu ziehenden Schlüsse können allerdings wegen der Zufälligkeit bei der Wahl des Beobachtungsmaterials, trotz der grossen Zahl dieses letztern (es waren über 60 Gefässe), nicht den Anspruch auf Endgiltigkeit erheben, aber immerhin kömmt ihnen ein hoher Grad von Wahrscheinlichkeit zu, so dass sie mindestens zur Grundlage weiterer exacter Untersuchungen dienen können.

Vor Allem dürfte es vielleicht nicht überflüssig sein hervorzuheben, dass die Eigentöne aller Hohlräume, selbst die der im Handel vorkommenden Resonatoren ziemlich weit begrenzt sind, so dass ausser einem bestimmten Ton stärkster Resonanz immer auch noch dessen höhere und tiefere Second, oft auch Terz mehr weniger deutlich resoniren, mithin ausser dem Haupteigenton auch noch mehrere Nebeneigentöne zu unterscheiden sind. Es scheint nun Zahl und Stärke der letzteren um so grösser zu sein, je weniger scharf und laut der erstere hervortritt, und umgekehrt. Man kann diesen Satz u. a. ziemlich leicht an einem beiderseits offenen Glascylinder constatiren. Hält man das eine Ende des Cylinders unter Wasser und zwar verschieden tief, und prüft jedesmal die Resonanz, so wird man diese bei einer bestimmten

Höhe der Luftsäule sehr laut und bei nur geringen Veränderungen dieser Höhe viel schwächer finden. Im ersteren Falle findet man nun die Zahl und Stärke der Nebentöne merklich geringer als im letzteren.

Was nun die Stärke der Resonanz anbelangt, so beruhen die folgenden Angaben allerdings nur, wie auch die analogen frühern, auf subjectiver Schätzung; bevor diese den Werth objectiver Messung annähernd erreicht, müssen natürlich unzählige Wiederholungen der genauesten Beobachtung vorgenommen werden. Als Bedingungen der Resonanzstärke, zunächst mit Beziehung auf Claviertöne, ergaben sich: die Grösse der Hohlräume, ihre Form und die Grösse ihrer Mündung. Der Einfluss der Grösse äussert sich am deutlichsten bei einfachen Formen. So z. B. nimmt die Resonanz cylindrischer Hohlräume an Stärke zu, wenn ihr Durchmesser von 3—4 Cm. bis 7—8 Cm. anwächst. Vergrössert sich der Durchmesser über 10—12 Cm. hinaus, so wird die Resonanz merklich schwächer, und verschwindet fast ganz, wenn derselbe über 16—18 Cm. beträgt. Kuglige Hohlräume mit einer grössten Peripherie bis zu 40—50 Cm. resoniren wesentlich stärker als solche mit einer Peripherie über 60 Cm. Ähnlich verhält es sich aber auch bei Hohlräumen von zusammengesetzter Form, überall scheint eine Zunahme der Resonanzstärke mit der Grösse der Räume aber nur innerhalb bestimmter Grenzen stattzufinden, ebenso eine Verminderung und allmäliges Verschwinden der Resonanz jenseits dieser Grenzen. — Der Einfluss der Form der Hohlräume auf die Resonanzstärke ist jedenfalls noch auffallender. Es resoniren nämlich Gefässe mit combinirten Formen im Allgemeinen merklich stärker als gleichgrosse mit einfachen, z. B. als Cylinder und Kugeln. Der Einfluss der Mündung ist selbstverständlich nicht von ihrer absoluten Weite, sondern von der Weite im Verhältnisse zum Gesammtvolum abhängig. Man bemerkt diesen Einfluss, wenn man die Mündungen der Gefässe mit Deckeln, die allmälig grösser werdende Ausschnitte haben, versieht, und bei jedem die Resonanz prüft. Es zeigt sich da, dass die relative Weite der Mündung auf die Stärke der Resonanz einen fast so grossen Einfluss hat, als auf deren Höhe. Wenigstens findet man constant, dass, wenn die Weite der Mündung unter eine gewisse Grenze gesunken ist, die Resonanz auffallend

schwächer wird, und sogar ganz schwindet; wenn sie über eine gewisse Grenze sich vergrössert, auch jedesmal schwächer wird. Innerhalb dieser extremen Grenzen ist wohl derselbe Einfluss notorisch vorhanden, lässt sich aber vorläufig nicht in einem einfachen Satz ausdrücken. So findet man z. B. bei cylindrischen Hohlräumen, dass sie, wenn sie lang oder eng sind, lauter resoniren, wenn beide Mündungen offen sind; sind sie hingegen weiter oder kürzer, so resoniren sie lauter, wenn sie einerseits geschlossen sind. Ähnliches findet man auch bei kugeligen Hohlräumen mit 2 gegenüberstehenden Öffnungen.

Was die Dauer der Resonanz anbelangt, so ist selbe durch einen mehr weniger lauten, oft nur geräuschähnlichen Nachhall bedingt, der dem ursprünglichen Tone anhängt. Die Dauer des Nachhalls hängt wohl von der Grösse des Hohlraumes überhaupt, aber speciell auch noch von einer Dimension, nämlich der Länge desselben ab. Je länger der Hohlraum, um so länger der Nachhall. Bei Cylindern ist der Nachhall viel länger, wenn sie nur einerseits offen sind, aber nur der geräuschähnliche. Bei sehr grossen Gefässen besteht die Resonanz eben nur in einem geräuschähnlichen Nachhall, wobei der Ton selbst gar nicht verstärkt erscheint.

Combinirt man 2 Hohlräume mit einander, während man ihre Resonanz prüft, so ergeben sich einige ganz bemerkenswerthe Erscheinungen. Während nämlich 2 Hohlräume mit ungleichen Eigentönen sich gar nicht beeinflussen, geschieht dies bei solchen mit gleichen Eigentönen in auffälliger Weise.

Hält man 2 ungleich gestimmte Hohlräume mit je einer Mündung einander mit den Mündungen zugekehrt, während man ihre Resonanz behorcht, so findet man letztere erst dann sich ändern, wenn beide einander etwa bis auf 1 Zoll und noch mehr genähert sind; es wird nämlich in diesem Falle der Eigenton beider um so tiefer, je grösser die Annäherung analog dem Verhältnisse, wenn man etwa einen Deckel allmälig der Mündung nähert. Hält man die beiden Mündungen möglichst parallel neben einander, so ändert sich die Resonanz gar nicht. Hält man jedoch 2 ganz gleichgestimmte Hohlräume mit den Mündungen einander zugekehrt, so ändert sich die Resonanz beider schon wenn sie in einer Entfernung von $1^1/_2$—2 Zoll von einander

stehen. Der frühere Haupteigenton verschwindet nämlich in beiden total, ebenso auch die höhern Nebeneigentöne, hingegen resonirt die tiefere kleine Second constant sehr laut, und die nächst tiefern Halbtöne allmälig schwächer. Haben die Hohlräume mehrere Haupteigentöne, so erleidet blos der höhere die hier erwähnte Veränderung, während der tiefere auffallend verstärkt wird. Dieses Verhältniss bleibt unverändert, wenn man die beiden Hohlräume einander mehr nähert, und erst wenn sie sehr nahe gerückt sind, näher als $1/2$ Zoll, werden ihre Eigentöne durch Verdeckung der Mündungen noch tiefer. Übrigens tritt die Erscheinung auch bei zwei ungleichgrossen Hohlräumen auf, deren einer die Mündung des andern nur zum kleinen Theile deckt, so dass selbst bei grösster Annäherung beider eine weitere Vertiefung des Eigentones nur im kleinern, nicht aber im grössern Hohlraum stattfindet. Hält man hingegen die 2 gleichgestimmten Hohlräume parallel, oder nur wenig einander zugeneigt, neben einander, so erscheint die ursprüngliche Resonanz in beiden deutlich verstärkt. Hat man es mit kleinen Hohlräumen oder wenigstens mit engen Mündungen zu thun, so darf nicht übersehen werden, dass die Eigentöne schon durch das Einlegen des Hörrohres etwas vertieft werden, so dass 2 ursprünglich gleichgestimmte Hohlräume ungleich gestimmt werden, wenn in dem einen ein Hörrohr liegt, im andern nicht. Sind die beiden Hohlräume nur nahezu aber nicht vollkommen gleichgestimmt, so kann es geschehen, dass in dem einen der ursprüngliche Eigenton total, in dem andern nur theilweise schwindet.

Alle bisher erwähnten Resonanzphänomene treten auch dann auf, wenn man zur Erregung der Resonanz die primäre Schallquelle in die Hohlräume hinein verlegt. Es geschieht dies am einfachsten in der Weise, dass man die menschliche Stimme in Form von Singtönen durch ein Kautschukrohr leitet, das beliebig lang, circa 1—$1\frac{1}{2}$ Cm. Durchmesser hat, und dessen ein Ende in den Hohlraum hineingelegt wird. Das zweite Ende des Rohres wird entweder bei offener Lippenöffnung lose zwischen den Zähnen gehalten oder mit den Lippen dicht umfasst, während man Singtöne hervorbringt. In letzterem Falle kann man den ganzen Luftstrom, mithin auch die ganze Schallmasse in den Hohlraum leiten, oder auch den Luftstrom durch die Nasenhöhle

entweichen lassen, in welchem Falle die Stimme im Hohlraum nur jene Stärke hat, wie im erstern Falle. Diese Untersuchungsmethode eignet sich besonders in jenen Fällen, wenn man die Luft im Hohlraume isolirt von der äussern Luft untersuchen will. Man braucht zu diesem Zwecke nur Deckel mit blos 2 Ausschnitten, durch welche das die Stimme leitende und das Hörrohr luftdicht durchtreten, in Anwendung zu bringen, und sämmtliche Töne der Scala der Reihe nach in das Rohr hineinsingen, während man durch's Hörrohr horcht. Bei dieser Untersuchung findet man, wie schon früher erwähnt, all' die Thatsachen, die früher beschrieben wurden, in ganz gleicher Weise, was immerhin, da hier die Schallquelle verschieden gelagert ist, für einzelne der Phänomene auffallend ist. Man findet aber auch, dass bei vollständigem Verschluss der Hohlraummündungen die Resonanz in der That total schwindet; man überzeugt sich hiervon sehr leicht, da jeder Erwachsene mit Zuhilfenahme von Kopf- und Falsett-Tönen, und bei Verzicht auf besondere Reinheit der Töne ganz bequem 3 volle Octaven mit der Stimme umfasst. Ein hermetischer Verschluss der Hohlräume ist gar nicht nöthig, um die Resonanz schwinden zu machen, es geschieht dies selbst dann schon, wenn der Deckel nur lose aufliegt, so dass der Luftstrom allenfalls noch entweichen kann. Erst wenn die Spalten zwischen Deckel und Gefässrand merkliche Dimensionen haben, tritt für tiefe Töne schwache Resonanz auf. Hier darf es selbstverständlich noch weniger ausser Acht gelassen werden, dass durch das Einlegen zweier Röhren die ursprünglichen Eigentöne der Hohlräume noch mehr abgeändert werden können, als früher. Erwähnenswerth ist es, dass auch beim gänzlichen Fehlen der Resonanz die ursprüngliche Stimme denn doch unverändert stark, nur mit etwas verändertem Timbre vernommen wird aus dem Hohlraume, und zwar ist sie in kleinern Hohlräumen stärker, in grössern schwächer. Man überzeugt sich hiervon, wenn man während des Horchens das freie Ohr luftdicht verstopft. Es dringt allerdings durch die Nasenhöhle, Kopfknochen etc. immer noch vom freien Luftraume etwas Schall in's Gehörorgan, wenn auch beide Gehörgänge verstopft sind, aber wenn man diese schwachen Schallspuren nur einmal percipirt hat, wird man sie immer leicht von jenem Schall unterscheiden, der durch ein Hörrohr aus einem Hohlraum eindringt.

Nicht unwichtig ist diesen Thatsachen gegenüber, gewissermassen als Pendant zu denselben, das Verhalten der Resonanz an Stimmgabel-Resonanzkästen. Es liegen hier allerdings nur Thatsachen von einem solchen für eine a'-Gabel gestimmten Kasten vor, die zunächst noch zu einer fortgesetzten Untersuchung an mehreren verschieden gestimmten Kästen herausfordern, allein wegen ihres Zusammenhanges mit den frühern Angaben dürfte die Mittheilung dieser Thatsachen schon jetzt nicht ungerechtfertigt sein. Vor Allem ist daran zu erinnern, dass die Resonanz der genannten Kästen auch von der Möglichkeit, dass ihre Wandungen transversal schwingen, wesentlich abhängt. So z. B. ist die Resonanz viel lauter, wenn man den Kasten an dem zur Aufnahme des Gabelstieles bestimmten Zapfen frei in der Luft hält, als wenn er mit einer seiner Wände auf einer festen Unterlage, sei es direct oder mittelst zweier schmaler Stege, aufruht. Man vermeidet so manchen Fehler in der Beobachtung, wenn man hierauf von Anfang an Rücksicht nimmt. Die erste der oben erwähnten Thatsachen besteht nun darin, dass auch hier die Resonanz ebenso von der äussern Luft abhängt, wie unter den früher beschriebenen Verhältnissen. Zur Constatirung dieser Thatsache kann man ein dem früher beschriebenen analoges Verfahren anwenden. Man legt nämlich ein Hörrohr, welches durch irgend eine Scheibe luftdicht durchgeht, mit dem freien Ende in den Resonanzkasten hinein und behorcht den Resonanzton im Innern desselben. So lange die Scheibe in grösserer Entfernung von der Mündung des Kastens steht, hört man die Resonanz aus dem Innern ebenso oder noch lauter als von aussen; nähert man aber die Scheibe der Mündung, um sie zu verdecken, so bemerkt man bald ein auffälliges Schwächerwerden der Resonanz, und zwar im Innern ebenso wie von aussen. Ist die Mündung ganz verdeckt, so bleibt von dem ursprünglichen lauten Resonanzton nur eine schwache Spur zurück, gleich jener Resonanz, die die Holzplatten des Kastens für sich allein im freien Zustande geben würden, und diese schwache Spur ist aus dem Innenraume des Kastens nur wenig lauter als im freien, im Timbre jedoch merklich verschieden von der vollen Resonanz des Kastens. Dieser schwache Rest der Resonanz bleibt ganz unverändert, wenn man den Deckel an die freien Ränder des Kastens fest

andrückt, und dadurch die transversalen Schwingungen der Platten ganz oder doch theilweise aufhebt. Lässt man den im Innern des geschlossenen Kastens hörbaren Ton längere Zeit auf sich einwirken, um seine Qualität genau im Gedächtnisse zu behalten, und entfernt dann nur langsam die deckende Scheibe von der Mündung während des Horchens, so überzeugt man sich leicht davon, dass es nicht ein- und derselbe Schall ist, der beim Entfernen der Scheibe allmälig stärker wird, sondern dass der aus dem verschlossenen Hohlraum heraus gehörte, auch nach dem Öffnen desselben ganz unverändert fortbesteht, und neben ihm ein ganz selbständiger zweiter Ton von etwas verschiedenem Timbre auftaucht, anfangs sehr schwach, bei zunehmender Entfernung des Deckels immer stärker, und dass dieser neue zweite Ton schliesslich so laut wird, dass er den ersten vollkommen deckt. Bei langsamem Annähern der Scheibe an die Kastenmündung bemerkt man natürlich dieselben Erscheinungen in umgekehrter Reihenfolge. In einer bestimmten Nähe des Deckels zerfällt der einfache laute Resonanzton in 2 deutlich von einander unterscheidbare Töne, deren einer bei fortgesetzter Annäherung immer schwächer wird, und schliesslich schwindet, während der zweite unverändert bleibt. — Hieran reiht sich noch folgende weitere Thatsache. Nimmt man eine genau auf *a'* gestimmte gewöhnliche Resonatorkugel, verschliesst mit einem Finger ihre kleinere, für das Ohr bestimmte Öffnung, und hält sie dann mit der weitern Öffnung der Mündung des tönenden Resonanzkastens zugekehrt, so schwindet die Resonanz fast total, sobald beide Hohlräume in einer bestimmten Entfernung von einander stehen; entfernt man sie wieder von einander, so wird die Resonanz allmälig wieder lauter, und erreicht auch wieder ihr Maximum. Ob dieses Ab- und Anschwellen der Resonanz auch bei grössern Entfernungen der Hohlräume von einander sich wiederhole, liess sich vorläufig weder constatiren, noch auch könnte man es entschieden in Abrede stellen. — Schiebt man das freie Ende eines Hörrohrs über das Ohrende der Resonatorkugel, um den Innenraum der letztern bequemer zu behorchen, während ein tönender Resonanzkasten auf denselben einwirkt, so bemerkt man, dass auch während des totalen Fehlens der lauten Resonanz, aus dem Innern des Resonators ein ähnlicher, jedoch stärkerer Ton in's Ohr dringt,

als derjenige ist, den man aus dem Innern des Resonanzkastens bei verschlossener Mündung hört. Selbstverständlich ist das Resultat dasselbe, wenn man am Resonator direct ohne Hörrohr horcht, nur ist dieses directe Horchen höchst unbequem. Legt man das Hörrohr in's Innere des Resonanzkastens, während die Resonatorkugel ihm gegenüber steht, so hört man ebenfalls blos jenen Ton, nur etwas lauter, den man bei verschlossener Mündung desselben hört. Auch hier überzeugt man sich leicht, wenn man bei langsamem Entfernen der beiden Hohlräume von einander einen von beiden mittelst Hörrohr behorcht, dass Anfangs zwei deutlich getrennte Töne vorhanden sind, deren einer unverändert bleibt, und deren zweiter allmälig stärker wird, und erstern deckt. Zu bemerken ist hier noch, dass die Resonatorkugel die Mündung des Resonanzkastens selbst in unmittelbarer Nähe nur zum kleinsten Theile deckt, und dass anders gestimmte Resonatoren, selbst von grossem Volumen, z. B. ein auf *c'* gestimmter, der jene Mündung in der Nähe viel mehr deckt, die Resonanz kaum merklich schwächt. Hat man die Duplicität des Schalles hier kennen gelernt, so kann man sie an der mittelst der Stimme in beliebigen Hohlräumen erzeugten Resonanz auch wieder erkennen, wenn der Deckel von den Gefässmündungen nur sehr langsam abgehoben wird. Doch ist das Phänomen hier nur sehr kurz und minder deutlich zu unterscheiden.

Die zuletzt angeführten Thatsachen, namentlich die auf die Resonanzkästen bezüglichen, liefern nun offenbar die volle Bestätigung des bereits im Aufsatz II ausgesprochenen Satzes, dass die Resonanz von Hohlräumen, d. i. die den Schall unmittelbar bedingenden Schwingungen nicht so sehr in der innern als vielmehr in der äussern Luft entstehen. Es geht aus diesen Thatsachen aber auch noch hervor, dass das Verhältniss der Schwingungen der äussern Luft zu den ursprünglichen der innern kein solches ist, dass man es als ein einfaches Mitschwingen bezeichnen könnte, sondern es muss angenommen werden, dass die von der innern Luft an die äussere abgegebenen Impulse in ganz neue Bewegungsformen umgesetzt werden. Damit ist aber auch schon die zweite der im Anfang erwähnten Fragen berührt, ob nämlich die subjective Stärke des Schalles nicht auch von der Schwingungsform abhängig sei. Selbstverständlich ist diese Frage noch

lange nicht spruchreif, aber wenn man bedenkt, dass neben der lauten Resonanz die ursprünglichen Schwingungen unverändert fortbestehen, so kann man erstere offenbar nicht durch eine einfache Verstärkung der Amplituden der letztern zu Stande kommen lassen. Wenn man ferner bedenkt, dass Schwingungen in irgend einer Entfernung von ihrer ursprünglichen Quelle nur dadurch verstärkt werden können, dass sich die Wirkung mehrerer, nach einander folgender Impulse summirt, dass dieser Process aber nur an einem ungleicharmigen Hebel denkbar ist, dessen kürzerer Arm den Angriffspunkt bildet, nicht aber an der unbegrenzten freien Luft, so muss man zugeben, dass es kaum denkbar ist, es werden die Amplituden im freien Luftraume grösser als im Hohlraume; da aber der Schall im erstern denn doch viel lauter ist, als im letztern, so ist obige Frage in der That nicht unberechtigt, und zwar in dem Sinne, ob nicht die subjective Stärke des Schalles um so mehr zunimmt, je complicirter die Schwingungsformen werden. — Schwierig sind jene Erscheinungen zu deuten, die sich durch die Combination zweier Hohlräume an ihrer Resonanz zeigen. Auf den ersten Blick möchte man sie für einfache Interferenzphänomene halten, da bleibt aber die Frage unbeantwortet, warum sich blos die Haupt- und nur die höhern Nebeneigentöne aufheben, die tiefern Nebentöne nicht.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass der oben erwähnte Einfluss der Grösse der Hohlräume und ihrer Mündung auf die Stärke der Resonanz vollkommen erklärlich ist, nach der im Aufsatz II, S. 10, 11 gegebenen Erklärung über das Zustandekommen der Resonanz in Hohlräumen.

Über die dynamische Theorie der Diffusion der Gase.

Von dem w. M. J. Stefan.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. April 1872.)

Die Gleichungen des Gleichgewichtes für die einzelnen Gase in einem Gemenge liefert das Dalton'sche Princip und können dieselben in dem Satze zusammengefasst werden, dass in einem Gemenge jeder Bestandtheil sich so ins Gleichgewicht stellt, als wäre er allein in dem vom Gemenge erfüllten Raume vorhanden. Dieser Satz ist durch eine vielfältige Erfahrung bewiesen.

Aber ebenfalls durch vielfältige Erfahrung ist bewiesen, dass sich ein einzelnes Gas in einem Gemenge nicht so bewegt, als wären die übrigen Bestandtheile des Gemenges nicht vorhanden, es ist also bewiesen, dass die aus den Gleichgewichtsgleichungen nach dem Principe von D'Alembert abgeleiteten Gleichungen der Bewegung nicht die richtigen sind.

In der Abhandlung „über das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasgemengen" habe ich gezeigt, dass man zu Gleichungen gelangt, welche mit der Erfahrung in Übereinstimmung stehen, wenn man zu dem Dalton'schen Principe noch folgende Ergänzung hinzufügt: In einem Gasgemenge erfährt jedes einzelne Theilchen eines Gases, wenn es sich bewegt, von jedem andern Gase einen Widerstand proportional der Dichte dieses Gases und der relativen Geschwindigkeit beider.

Auf alle in der Einheit des Volumens befindlichen Theilchen des einen Gases kommt also ein dem Producte der Dichten beider Gase und ihrer relativen Geschwindigkeit proportionaler Widerstand in Rechnung. Er wurde in der genannten Abhandlung durch den Ausdruck

$$W = A_{12}\rho_1\rho_2(u_1 - u_2) \qquad (1)$$

dargestellt, worin ρ_1 und u_1 die Dichte und Geschwindigkeit des ersten, ρ_2 und u_2 die Dichte und Geschwindigkeit des zweiten Gases bedeuten; A_{12} ist eine von der Natur der beiden Gase und auch von ihrer Temperatur abhängige Grösse. Bei der Aufstellung des obigen Ausdruckes ist natürlich vorausgesetzt, dass die Bewegungsrichtungen der beiden Gase in eine Linie fallen, denn nur dann ist $u_1 - u_2$ ihre relative Geschwindigkeit.

Die Gleichungen, welche man mit Hilfe dieses Princips des Widerstandes für die Bewegung zweier Gase durcheinander gewinnt, sind die nämlichen, welche schon Maxwell aus der dynamischen Theorie der Gase abgeleitet hat, in welcher Theorie sowohl das Dalton'sche Princip als der benützte Satz vom Widerstande ihre Begründung finden.

Maxwell hat diese Gleichungen angewendet zur Erklärung der Diffusion zweier Gase in einander und in der citirten Abhandlung habe ich gezeigt, dass die Gleichungen auch in ihrer Erweiterung auf ein Gemenge von drei Gasen mit den über die Diffusion von solchen Gemengen angestellten Versuchen in Übereinstimmung stehen.

Handelt es sich um die Bewegung eines Gemenges von zwei Gasen in einer durchaus gleich weiten geschlossenen Röhre, welcher Fall in den Diffusionsversuchen realisirt ist, so werden die Partialdrücke der beiden Gase als Functionen der Zeit und der Abscisse des Querschnittes, für welchen sie gelten, bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{dp_1}{dt} = k\frac{d^2p_1}{dx^2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = k\frac{d^2p_2}{dx^2}$$

und ist die Constante k der Diffusionscoëfficient der gewählten Gascombination genannt worden. k hängt mit dem oben eingeführten Widerstandscoëfficienten zusammen durch die Gleichung

$$k = \frac{1}{A_{12}} \cdot \frac{p_0 p_0}{d_1 d_2} \cdot \frac{T^2}{T_0^2} \cdot \frac{1}{p}, \tag{2}$$

worin p_0 den Normaldruck, unter welchem die beiden Gase bei der absoluten Temperatur T_0 die Dichten d_1 und d_2 haben, ferner p den Druck und T die absolute Temperatur des Gasgemenges während des Versuchs bedeutet.

Was die Grösse A_{12} anbetrifft, so kann eine Bestimmung derselben nur aus einer Theorie des gasförmigen Aggregatzustandes erfolgen. Der Widerstand, welchen ein Gas bei seiner Bewegung durch ein anderes erfährt, ist eben nichts anderes, als die Bewegungsgrösse, welche von den Molecülen dieses Gases auf die des andern in der Zeiteinheit übertragen wird. Zur Berechnung dieser Bewegungsgrösse ist die Kenntniss der Art der Übertragung nothwendig. Mit Hilfe der dynamischen Gastheorie kann die gestellte Aufgabe gelöst werden.

Es ist aber die dynamische Gastheorie bisher in verschiedenen Formen zur Anwendung gebracht worden.

Die neue, von Maxwell über die Natur der Gase adoptirte Anschauung ist folgende. Ein Gas ist ein System von sehr rasch nach allen möglichen Richtungen im Raume bewegten Molecülen. Die Molecüle sind als materielle Punkte zu betrachten, welche mit abstossenden der fünften Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kräften auf einander wirken.

Aus dem Druck des Gases lassen sich die Geschwindigkeiten berechnen, mit denen sich die Gasmolecüle im Mittel bewegen, auch lässt sich ein Mass für die Intensität der abstossenden Kraft zwischen den gleichartigen Molecülen eines Gases aus der Grösse der inneren Reibung in diesem Gase gewinnen. Die innere Reibung besteht in der Übertragung von Bewegungsgrösse von schneller bewegten an langsamer bewegte Molecüle, und die in einer Zeiteinheit bei gegebener Vertheilung der Geschwindigkeit übertragene Bewegungsmenge wird abhängig von der Intensität der zwischen den Molecülen thätigen abstossenden Kräfte.

Der Widerstand, den ein Molecül eines Gases bei seiner Bewegung durch ein zweites erfährt, wird ebenfalls abhängig von der Intensität der zwischen den zwei Arten von Molecülen thätigen abstossenden Kräfte.

Die Diffusionsversuche können nun ebenso zur Bestimmung der Intensitäten der zwischen verschiedenartigen Molecülen thätigen abstossenden Kräfte benützt werden, wie die Reibungsversuche zur Bestimmung der Abstossungen zwischen gleichartigen Molecülen.

Die Maxwell'sche Theorie liefert nun zunächst A_{12} als von Druck und Temperatur unabhängig. Es bleibt also für die

Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten von diesen beiden Grössen nach der Formel (2) das Gesetz, dass der Diffusionscoëfficient dem Quadrate der absoluten Temperatur direct, dem Drucke, unter dem die diffundirenden Gase stehen, verkehrt proportional ist. Dieses Gesetz hat auch durch die Versuche von Loschmidt seine Bestätigung gefunden.

Durch diese Theorie wird aber auf die Frage nach der Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten von der Natur der beiden Gase keine Antwort gegeben, da ja eine von der Natur der beiden Gase abhängige Intensitätsconstante der gegenseitigen Abstossung in der Formel übrig bleibt. Es ist klar, dass, wenn auch aus Reibungsversuchen die Intensitäten gefunden worden sind, mit denen sich die gleichartigen Molecüle des einen und die gleichartigen Molecüle eines anderen Gases abstossen, aus diesen Intensitäten kein Schluss auf das gegenseitige Verhalten der ungleichartigen Molecüle gezogen werden kann.

Die Sache gestaltet sich jedoch anders, wenn man die dynamische Gastheorie in ihrer ursprünglichen Form zur Anwendung bringt. Nach dieser ist ein Gas als ein System von Molecülen zu betrachten, welche in sehr raschen, nach allen möglichen Richtungen vertheilten Bewegungen sich befinden, nicht mit fernwirkenden Kräften versehen sind, sondern nur beim Zusammentreffen auf einander wirken und dabei wie vollkommen elastische Kugeln sich verhalten.

An die Stelle der Intensitätsconstanten der abstossenden Kräfte treten nun die Durchmesser der die Molecüle darstellenden Kugeln als Bestimmungsstücke der molecularen Beschaffenheiten der Gase und kann nun für diese aus den Reibungsconstanten ein Mass ebenso gewonnen werden, wie früher für die Intensitäten der Abstossung.

Der Widerstand, den ein Molecül eines Gases bei seiner Bewegung durch ein zweites Gas erfährt, wird nun ebenfalls abhängig von den Grössen der Kugeln, welche die Molecüle des einen und des zweiten Gases darstellen. Der Ausdruck für den Widerstand enthält demnach keine neue der gewählten Gascombination eigenthümliche Constante, sondern nur solche, welche sich aus den Versuchen über die innere Reibung in den beiden einfachen Gasen ableiten lassen, es kann aus den Reibungs-

coëfficienten zweier einfacher Gase ihr Diffusionscoëfficient berechnet werden.

Die Hypothese der elastischen Kugeln wurde mit zwei verschiedenen Nebenannahmen zur Erklärung der Eigenschaften der Gase angewendet.

Clausius betrachtet ein Gas, welches sich im Zustande des statischen und des Temperaturgleichgewichtes befindet, als ein System von elastischen Kugeln, welche sich alle mit gleicher Geschwindigkeit, aber nach allen möglichen Richtungen des Raumes gleichförmig bewegen.

Maxwell betrachtete in seiner ersten Abhandlung ein Gas ebenfalls als ein System von elastischen Kugeln, deren Geschwindigkeiten jedoch nicht nur alle möglichen Richtungen im Raume, sondern alle möglichen Werthe von 0 bis ∞ besitzen, auch wenn das Gas im statischen und im Temperaturgleichgewichte sich befindet. Das Gesetz, nach welchem die Grössen der nach einer bestimmten Richtung geschätzten Componenten der Geschwindigkeit ausgetheilt sind, ist dasselbe, welches in der Methode der kleinsten Quadrate für die Vertheilung der Beobachtungsfehler aufgestellt wird.

Es lässt sich unter der einen wie unter der anderen dieser zwei Voraussetzungen die Bestimmung des Widerstandes, den ein Gas bei seiner Bewegung durch ein anderes erfährt, ausführen.

Zuerst handelt es sich um die Ermittlung der Bewegungsgrösse, welche bei einem Zusammenstosse von einer Kugel auf eine andere übertragen wird. Diese Grösse ist abhängig von den Massen, Geschwindigkeiten und Bewegungsrichtungen der beiden Kugeln, sie fällt aber auch bei denselben Massen, Geschwindigkeiten und Richtungen verschieden aus, je nachdem die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Kugeln im Augenblicke des Zusammenstosses gegen ihre Bewegungsrichtung orientirt ist.

Da bei jedem einzelnen Stosse von allen möglichen Positionen der Centrallinie gegen die Geschwindigkeiten der Kugeln jede gleich wahrscheinlich ist, bei sehr vielen Zusammenstössen also auch jede gleich oft vorkommen wird, so ist das Mittel aus allen für die verschiedenen Lagen der Centrallinie sich ergebenden Bewegungsgrössen als jene Bewegungsgrösse in die Rechnung einzuführen, welche ein Molecül von gegebener Geschwindigkeit

und Richtung der Bewegung auf ein anderes Molecül von ebenfalls gegebener Geschwindigkeit und Richtung bei einem Zusammenstoss überträgt.

Es ergibt sich, dass diese mittlere Bewegungsgrösse parallel zur Axe der x etwa geschätzt, nur von den zu dieser Axe parallelen Componenten der Geschwindigkeiten abhängig und halb so gross ist, als jene, welche bei einem centralen Stoss zweier mit diesen Geschwindigkeitscomponenten bewegten Kugeln von der einen auf die andere übertragen wird. Sie ist also

$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(x_1-x_2)$$

wenn m_1 und m_2 die Massen, x_1 und x_2 die zur Axe der x parallelen Componenten der Geschwindigkeiten der beiden Kugeln bedeuten.

Die Summe aller Bewegungsgrössen, welche bei den in der Zeiteinheit erfolgenden verschiedenen Zusammenstössen der in der Volumseinheit befindlichen Molecüle der ersten Art mit denen zweiter Art von den ersteren verloren wird, ist die oben als Widerstand W eingeführte Grösse.

Zur Berechnung dieser Summe ist es ferner nothwendig, die Vertheilung der Geschwindigkeiten unter die einzelnen Molecüle zu kennen und dann die Anzahl der Zusammenstösse, welche zwischen Molecülen von gegebenen Geschwindigkeiten in der Zeiteinheit stattfinden.

Was die Vertheilung der Geschwindigkeiten anbetrifft, so braucht man zunächst nur festzustellen, dass sich dieselbe in einem bewegten von der im ruhenden Gase nur dadurch unterscheidet, dass zu den Componenten der Molecularbewegung noch die Componenten der allen Molecülen gemeinschaftlichen progressiven Bewegung hinzukommen. Hat ein Molecül im ruhenden Gase die Geschwindigkeitscomponenten ξ_1, η_1, ζ_1, so sind $\xi_1+u_1, \eta_1, \zeta_1$ seine Componenten, wenn das Gas als Ganzes mit der Geschwindigkeit u_1 sich parallel zur Axe der x bewegt. Der Werth, welchen W für zwei mit den Geschwindigkeiten u_1 und u_2 bewegte Gase unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von u_1-u_2 erhält, ist

$$W=\frac{4a}{3}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(u_1-u_2) \qquad (3)$$

und bedeutet darin a die Anzahl der Zusammenstösse, welche zwischen den Molecülen erster und zweiter Art in der Einheit der Zeit und des Raumes erfolgen, wenn die beiden Gase in Ruhe diesen Raum erfüllen.

So weit lässt sich die Untersuchung ohne Kenntniss des Gesetzes, nach welchem die Geschwindigkeiten unter die Molecüle des ruhenden Gases vertheilt sind, führen. Der Werth von a lässt sich nur mit Hilfe dieses Gesetzes finden und ergibt sich auch nach den zwei oben aufgeführten Annahmen nicht gleich.

Wird zuerst die von Maxwell adoptirte Annahme der Rechnung zu Grunde gelegt, so findet man die Anzahl der Zusammenstösse

$$a = N_1 N_2 \pi s^2 \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \tag{4}$$

Darin bedeutet N_1 die Anzahl der Molecüle erster Art, N_2 die zweiter Art in der Volumseinheit, ferner v_1 die mittlere Geschwindigkeit eines Molecüls erster, v_2 die eines Molecüls zweiter Art. Endlich ist s die Summe der Radien der Kugeln, welche die Molecüle erster und zweiter Art darstellen.

Die Grössen dieser mittleren Geschwindigkeiten sind durch die zuerst von O. E. Meyer entwickelte Formel

$$p = \frac{\pi}{8} N m v^2$$

bestimmt, welche den Druck eines Gases angibt, von dem sich N Molecüle von der Masse m und der mittleren Geschwindigkeit v in der Volumseinheit befinden.

Setzt man den Werth von a in die Formel für W, bemerkt, dass

$$N_1 m_1 = \rho_1, \quad N_2 m_2 = \rho_2$$

und vergleicht das Resultat mit (1), so ergibt sich

$$A_{12} = \frac{4\pi s^2}{3} \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{m_1 + m_2}. \tag{5}$$

Es ist zunächst A_{12} unabhängig vom Druck, es bleibt also auch der Diffusionscoëfficient nach Formel (2) dem Druck verkehrt proportional, wie es die Erfahrung fordert.

Hingegen gibt die Theorie das andere Gesetz, dass der Diffusionscoëfficient dem Quadrate der absoluten Temperatur proportional ist, nicht mehr. Da nämlich A_{12} der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur proportional gefunden wurde, so folgt dann der Diffusionscoëfficient k nach der Formel (2) nicht der Potenz 2, sondern der Potenz $^3/_2$ der absoluten Temperatur proportional.

Auch die Theorie der inneren Reibung, gebaut auf die Hypothese der elastischen Kugeln, weicht in analoger Weise von der Erfahrung ab, indem sie die Reibungsconstante statt proportional der absoluten Temperatur proportional der Quadratwurzel aus derselben liefert. Diese Abweichung hat auch Maxwell veranlasst, die Hypothese der elastischen Kugeln aufzugeben.

Es soll nun das Augenmerk auf die Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten von der Natur der beiden Gase gerichtet werden.

Dazu genügt es, den Fall zu betrachten, in welchem Druck und Temperatur des Gasgemenges ihre Normalwerthe haben. Die Formel (2) verwandelt sich dann in

$$k = \frac{p_0}{A_{12} d_1 d_2}.$$

Führt man zur Bestimmung der Geschwindigkeiten v_1 und v_2 ein drittes Gas, dessen Molecül die Masse m und bei der Normaltemperatur die mittlere Geschwindigkeit v hat, so hat man

$$m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2 = m v^2.$$

Ist N_0 die für alle Gase gleiche Anzahl der Molecüle in der Volumseinheit bei normalem Druck und normaler Temperatur, so kann noch

$$p_0 = \frac{\pi}{8} N_0 m v^2, \quad d_1 = N_0 m_1, \quad d_2 = N_0 m_2$$

gesetzt werden und die Formel für k reducirt sich auf

$$k = \frac{3\pi}{32} \cdot \frac{v\sqrt{m}}{N_0 \pi s^2} \cdot \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{\sqrt{m_1 m_2}}. \tag{6}$$

Nimmt man das Wasserstoffgas als Normalgas, so ist

$$v = 169800 \text{ Cm.}$$

und sind für m, m_1, m_2 die Zahlen der Moleculargewichte einzusetzen. Ist k für ein Paar von Gasen gegeben, so kann diese Formel dazu dienen, die dieser Gascombination entsprechende Grösse $N_0 \pi s^2$ zu rechnen. Soll aber k selbst aus dieser Formel gewonnen werden, so ist umgekehrt diese Grösse für die betreffende Gascombination voraus zu bestimmen.

Die Theorie der inneren Reibung der Gase liefert für den Reibungscoëfficienten μ_1 eines Gases, welches unter dem Drucke p steht, die Formel

$$\mu_1 = \frac{p}{a_1}$$

und bedeutet a_1 die Zahl der Zusammenstösse, welche ein Molecül in diesem Gase in der Zeiteinheit erleidet. Für diese Zahl selbst findet man, das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsvertheilung angenommen,

$$a_1 = N \pi s_1^2 \sqrt{2} \,.\, v_1,$$

worin s_1 den Durchmesser des Molecüls und v_1, wie vorhin, die mittlere Geschwindigkeit eines solchen bezeichnet. Der Quotient aus v_1 und a_1 ist die mittlere Länge des Weges, den ein Molecül von einem Zusammenstosse bis zum nächsten macht. Heisst diese λ_1, so ist

$$\frac{1}{\lambda_1} = N \pi s_1^2 \sqrt{2}$$

und ist darin N_0 für N zu setzen, wenn λ_1 die mittlere Weglänge für das Gas bei normaler Dichtigkeit bezeichnen soll.

Ebenso ist der Durchmesser s_2 eines Molecüls des zweiten Gases durch die mittlere Weglänge λ_2 dieses zweiten Gases bestimmt, und da s in unseren Formeln die Summe der Radien der beiden Molecüle bedeutet, also

$$s = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

ist, so erhält man die Gleichung

$$N_0 \pi s^2 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \right)^2.$$

Die Formel für k kann also in folgender Weise geschrieben werden

$$k = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8} \frac{\sqrt{m_1+m_2}}{\sqrt{m_1 m_2}} \frac{v\sqrt{m}}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \right)^2} \tag{7}$$

und sie enthält nur bekannte Grössen, sobald die mittleren Weglängen solche sind.

Durch genaue Versuche hat Maxwell die innere Reibung in Luft, Wasserstoff, Sauerstoff, Kohlensäure bestimmt. Für Luft unter dem Druck von 760 Mm. Quecksilbersäule und 0° C. Temperatur fand er

$$\mu = 0{\cdot}0001878$$

Centimeter als Längen-, Secunde als Zeit-, Gramm als Masseneinheit genommen. Daraus lässt sich λ für die Luft berechnen, es ist

$$\lambda = 0{\cdot}00000827.$$

Aus den Versuchen von Maxwell lassen sich auch noch für die drei anderen oben genannten Gase die mittleren Weglängen ableiten. Es hat aber Graham mit einer grossen Anzahl von Gasen Versuche über den Ausfluss derselben durch Capillarröhren ausgeführt und O. E. Meyer aus diesen die Verhältnisse der Reibungscoëfficienten der verschiedenen Gase abgeleitet. Aus diesen und der für die Luft angegebenen Zahl lassen sich nun die mittleren Weglängen für die folgenden Gase ableiten.

Wasserstoff	$\lambda = 0{\cdot}0000153$
Sauerstoff	87
Kohlensäure	56
Kohlenoxyd	81
Schwefelige Säure . .	40
Sumpfgas	70
Stickoxydul	56.

Mit Hilfe dieser Werthe findet man die Diffusionscoëfficienten der folgenden Gascombinationen:

	Berechnet	Beobachtet
Wasserstoff—Sauerstoff	$k =$ 0·826	0·722
Wassersoff—Kohlensäure . . .	0·630	0·556
Wasserstoff—Kohlenoxyd . . .	0·796	0·642
Wasserstoff—Schwefelige Säure .	0·507	0·480
Kohlenoxyd—Sauerstoff	0·218	0·180
Kohlenoxyd—Kohlensäure . . .	0·162	0·160
Sauerstoff—Kohlensäure . . .	0·161	0·161
Sumpfgas—Kohlensäure	0·183	0·159
Stickoxydul—Kohlensäure . . .	0·120	0·089
Luft—Kohlensäure	0·162	0·142.

Die Rubrik Beobachtet enthält die von Loschmidt für diese Gascombinationen gefundenen Diffusionscoëfficienten, reducirt auf Centimeter als Längen-, Secunde als Zeiteinheit.

Wenn auch nur für wenige Combinationen Rechnung und Versuch in ganz befriedigender Übereinstimmung stehen, so ist doch schon merkwürdig genug, dass sich überhaupt die Diffusionscoëfficienten aus den Reibungscoëfficienten mit solcher Annäherung berechnen lassen.

Die berechneten Zahlen sind bis auf zwei Fälle, wo sie den beobachteten gleich sind, beträchtlich grösser als die beobachteten. Es könnte also auch im ganzen eine grössere Übereinstimmung erzielt werden, wenn für die mittlere Weglänge der Luft eine kleinere Zahl als die aus den Maxwell'schen Versuchen gefolgerte, etwa

$$\lambda = 0{\cdot}0000071$$

eingeführt würde. Dies ist der Werth, den man für die mittlere Weglänge der Luft aus den Diffusionsversuchen selbst findet.

Man kann nämlich aus den bekannten Diffusionscoëfficienten auch die mittleren Weglängen für alle bei den Versuchen verwendeten Gase nach der Formel

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2=\frac{3\pi v\sqrt{2m}}{8k}\cdot\frac{\sqrt{m_1+m_2}}{\sqrt{m_1 m_2}}$$

berechnen.

Man erhält zunächst aus den drei Combinationen Wasserstoff—Sauerstoff, Wasserstoff—Kohlensäure. Sauerstoff—Kohlensäure, für

Wasserstoff	$\lambda = 0·0000139$
Sauerstoff	74
Kohlensäure	50.

Mit Hilfe dieser Werthe findet man für die mittlere Weglänge des Kohlenoxydes aus den Combinationen

Wasserstoff—Kohlenoxyd . . .	$\lambda = 0·0000060$
Kohlenoxyd—Sauerstoff	66
Kohlenoxyd—Kohlensäure . . .	68.

Die Übereinstimmung zwischen diesen drei Werthen bildet die Probe für die Richtigkeit der Theorie unter der Voraussetzung, dass die Versuche richtig sind. Der Grad der Übereinstimmung ist allerdings kein sehr hoher.

Endlich findet man noch aus den betreffenden Combinationen für

Schwefelige Säure .	$\lambda = 0·0000039$
Sumpfgas	59
Stickoxydul	42
Luft	71.

Die Verhältnisse aller dieser Weglängen zu der letzten für Luft bilden in der folgenden Tabelle die erste, die aus den Graham'schen Versuchen gefolgerten die zweite Reihe:

Wasserstoff	1·958	1·850
Sauerstoff	1·042	1·057
Kohlensäure . . .	0·704	0·678
Kohlenoxyd	0·911	0·982
Schwefelige Säure .	0·549	0·488
Sumpfgas	0·831	0·849
Stickoxydul	0·592	0·678
Luft	1·000	1·000

und stimmen diese beiden Reihen ziemlich gut überein.

Nach der von Clausius angenommenen Hypothese der gleichen Geschwindigkeiten erhält man für die Anzahl a der

Zusammenstösse eine Formel, in welche die beiden Gase nicht symmetrisch eingehen. Bezeichnet man mit c_1 die Molecülgeschwindigkeit des einen, mit c_2 die des anderen Gases, so ist

$$a = N_1 N_2 \pi s^2 \frac{3c_1^2 + c_2^2}{3c_1}$$

unter der Voraussetzung, dass c_1 die grössere der beiden Geschwindigkeiten ist. Die Grösse A_{12} erhält somit den Werth

$$A_{12} = \frac{4\pi s^2}{3} \frac{3c_1^2 + c_2^2}{3c_1(m_1 + m_2)}.$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit dient wieder die Formel für den Druck, welche in diesem Falle

$$p = \frac{1}{3} Nmc^2$$

wird. Die Geschwindigkeiten, welche nach der Hypothese von Clausius die einzelnen Molecüle eines Gases besitzen, sind also andere als die mittleren Geschwindigkeiten, welche nach der Hypothese von Maxwell den Molecülen zukommen.

Die Anzahl der Stösse, welche ein Molecül in einem Gase in der Zeiteinheit erfährt, welche Anzahl oben mit a_1 bezeichnet wurde, ist jetzt bestimmt durch

$$a_1 = \frac{4}{3} N_0 \pi s_1^2 c_1.$$

Für den Ausdruck $N_0 \pi s^2$ erhält man

$$N_0 \pi s^2 = \frac{3}{16} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \right)^2$$

und demgemäss wird der Diffusionscoëfficient k bestimmt durch die Formel

$$k = \frac{m_1 + m_2}{(m_1 + 3m_2)\sqrt{m_1}} \cdot \frac{4c\sqrt{m}}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \right)^2}, \qquad (8)$$

welche Formel jedoch nur unter der Voraussetzung gilt, dass c_1 grösser als c_2, dass also m_1 die kleinere von den beiden Massen

m_1 und m_2 ist. Nimmt man wieder Wasserstoff als Normalgas, so ist nach Clausius

$$c = 184400$$

zu setzen.

Da jetzt a_1 einen andern Werth hat, als früher, so erhalten auch die mittleren Weglängen der Molecüle andere Werthe. So wird die mittlere Weglänge für Luft

$$\lambda = 0 \cdot 0000090$$

und für

Wasserstoff	$\lambda = 0 \cdot 0000167$
Sauerstoff	95
Kohlensäure	61
Kohlenoxyd	88
Schwefelige Säure . .	44
Sumpfgas	76
Stickoxydul	61.

Daraus ergeben sich die Diffusionscoëfficienten für die Combinationen

	Berechnet	Beobachtet
Wasserstoff—Sauerstoff	$k = 0 \cdot 788$	0·722
Wasserstoff—Kohlensäure . . .	0·600	0·556
Wasserstoff—Kohlenoxyd . . .	0·761	0·642
Wasserstoff—Schwefelige Säure .	0·499	0·480
Kohlenoxyd—Sauerstoff	0·218	0·180
Kohlenoxyd—Kohlensäure . . .	0·161	0·160
Sauerstoff—Kohlensäure . . .	0·160	0·161
Sumpfgas—Kohlensäure	0·180	0·159
Stickoxydul—Kohlensäure . . .	0·120	0·089
Luft—Kohlensäure	0·161	0·142.

Die nach der neuen Formel berechneten Zahlen stimmen im ganzen ebenso gut mit den beobachteten, als die nach der früheren Formel gefundenen. Hingegen weichen die nach der neuen Formel berechneten mittleren Weglängen in ihren Verhältnissen von den Graham'schen mehr ab, als die oben berechneten. Man findet für

Wasserstoff	$\lambda = 0{\cdot}0000143$
Sauerstoff	99
Kohlensäure	59
Schwefelige Säure . .	48
Sumpfgas	61
Stickoxydul	42
Luft	71.

Für die mittlere Weglänge des Kohlenoxyds ergibt sich aus den Combinationen

Wasserstoff—Kohlenoxyd . . .	$\lambda = 0{\cdot}0000074$
Kohlenoxyd—Sauerstoff	60
Kohlenoxyd—Kohlensäure . . .	90.

In Folge der grossen Abweichung zwischen diesen drei Werthen muss man wohl die aus der Hypothese von Clausius gerechnete Formel als die weniger den Versuchen entsprechende erklären.

Die frühere Formel empfiehlt sich ausserdem noch durch ihren symmetrischen Bau und ist auch das ihrer Ableitung zu Grunde gelegte Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsvertheilung dasjenige, welches der wirklichen Art der Vertheilung der Geschwindigkeiten unter die Molecüle in grösserer Annäherung entspricht, als das von Clausius angenommene.

Obwohl die dynamische Theorie der Gase, insofern sie sich auf die Hypothese der elastischen Kugeln stützt, nothwendig mangelhaft bleiben muss, da die innerhalb der Molecüle vorhandene Bewegung nicht in Rechnung gebracht wird, auch die Vorstellung von Kugeln für die mehratomigen Molecüle vielleicht nicht die passendste ist, so ist doch auch durch die mit der Theorie der Diffusion gewonnenen Resultate die Wichtigkeit der Hypothese der elastischen Kugeln zur Erforschung der molecularen Eigenschaften der Gase genügend bewiesen.

Es steht aber die Hypothese der elastischen Kugeln mit der Erfahrung insofern nicht in Übereinstimmung, als sie das Gesetz der Abhängigkeit des Reibungs- und Diffusionscoëfficienten von der Temperatur um die Potenz $^1/_2$ zu niedrig liefert. Betrachtet man die Formel für den Reibungscoëfficienten

$$\mu = \frac{p}{a_1}$$

so ist in derselben p der absoluten Temperatur proportional nach dem Gesetze von Gay-Lussac, die Anzahl a_1 der Zusammenstösse aber ist der Quadratwurzel aus derselben proportional. Die Übereinstimmung mit der Erfahrung wäre also hergestellt, sobald die Anzahl der Zusammenstösse in der Zeiteinheit unabhängig wird von der Geschwindigkeit, mit der sich die Molecüle bewegen. Nehmen wir eine der beiden Formeln für a_1, z. B. die von Clausius

$$a_1 = \frac{4}{3} N_0 \pi s_1^2 c_1$$

so ist ersichtlich, dass a_1 unabhängig wird von c_1, sobald s_1^2 dem c_1 verkehrt proportional ist.

Die Vorstellung, dass der Durchmesser eines Molecüls abhängig ist von der Temperatur, und zwar mit steigender Temperatur kleiner wird, mag auf den ersten Blick als eine abenteuerliche erscheinen, sie hat aber doch einen ganz klaren mechanischen Sinn. Betrachtet man die Molecüle als elastische Kugeln, so drückt man dadurch eigentlich aus, dass die Molecüle mit abstossenden Kräften auf einander wirken, welche Kräfte aber erst in Action treten, wenn die Molecüle in eine bestimmte Distanz, die Summe der Radien der beiden Kugeln, zu einander kommen. Die Intensität der Wechselwirkung ist aber dann so gross, dass die in die Verbindungslinie fallende Componente der relativen Geschwindigkeit in ausserordentlich kurzer Zeit vernichtet und umgekehrt wird. Fasst man die Abstossung zwischen den Molecülen als eine wenn auch auf beschränkte Distanz fernwirkende Kraft auf, so hat dann der Durchmesser eines Molecüls die Bedeutung jener Distanz zweier gleichartiger Molecüle, in welcher etwa bei einem centralen Zusammenstoss ihre relative Geschwindigkeit vernichtet und umgekehrt wird. Wenn also gesagt wird, Molecüle mit grösseren Geschwindigkeiten haben kleinere Durchmesser, so heisst das nur, dass die Abstossung zwischen den Molecülen auf einem längeren Wege thätig sein muss, um die zur Vernichtung einer grösseren lebendigen Kraft nöthige Arbeit leisten zu können. Die Annahme eines ver-

änderlichen Durchmessers ist von diesem Standpunkte aus die natürliche. Denkt man sich der Einfachheit wegen das eine der Molecüle fest, und die Abstossung zwischen beiden der Art, dass ihr Potential durch die $-n^{te}$ Potenz der Distanz der beiden Molecüle s ausgedrückt wird, so wird die lebendige Kraft des bewegten Molecüls, wenn sie in grosser Entfernung von dem andern $\frac{mc^2}{2}$ war, in der Distanz s Null werden, wenn

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{k}{s^n}$$

und daraus folgt umgekehrt

$$s^n = \frac{2k}{mc^2}.$$

Soll nun z. B. s^2 der Geschwindigkeit c verkehrt proportional sein, so muss $n = 4$, die abstossende Kraft also der fünften Potenz der Distanz verkehrt proportional gesetzt werden und das ist die von Maxwell über die Wechselwirkung zwischen den Molecülen gemachte Hypothese. Es lässt sich zwar der Fall, in welchem die Abstossung zwischen den Molecülen als Folge einer fernwirkenden Kraft angesehen wird, an die obige Formel für μ nicht unmittelbar übertragen, weil es jetzt eine endliche Anzahl von Zusammenstössen nicht mehr gibt, sondern nur eine endliche Grösse der in der Zeiteinheit übertragenen Bewegungsmenge; der Effect für das Endresultat aber ist der hier bezeichnete.

Obwohl diese Hypothese das mit der Erfahrung stimmende Temperaturgesetz für die Coëfficienten der inneren Reibung und der Diffusion liefert, so ist selbe doch auch nicht für mehr als eine Approximation an die Wahrheit anzusehen, da ja die über innere Arbeit in den Gasen bekannten Thatsachen fernwirkende abstossende Kräfte zwischen den Molecülen ausschliessen. Gegenüber dieser Hypothese ist die der elastischen Kugeln eine andere Art der Annäherung an die wirklich vorhandenen Verhältnisse und ich betrachte diese Kugeln nicht blos für figürliche Ausdrücke von Kraftsphären, sondern lege ihnen eine reale Bedeutung bei, mich der schon oft ausgesprochenen Ansicht an-

schliessend, nach welcher die zu Molecülen verbundenen Atome von Hüllen verdichteten Äthers umgeben sind. Die Abstossung zwischen den Molecülen selbst halte ich nicht als Folge fernwirkender, von den Massen der Atome ausgehender Centralkräfte, sondern als Folge der Wechselwirkung der Äthersphären bei Berührung und Durchdringung. Nach der Hypothese der elastischen Kugeln sind diese Äthersphären scharf begrenzt, die Dichte des Äthers ändert sich beim Übergange von einer Hülle zum freien Äther sprungweise, die Hypothese einer mit der Distanz abnehmenden Kraft aber bedeutet nichts anderes als eine allmälige Abnahme der Dichte, einen continuirlichen Übergang derselben von den grösseren Werthen in der Nähe der Atome zu dem kleineren Werthe im freien Äther.

Auch wenn man die Molecüle als scharf begrenzte Kugeln betrachtet, kann man annehmen, dass die Umkehr der Geschwindigkeiten beim Zusammenstoss nicht plötzlich, sondern in einer mit wachsenden Geschwindigkeiten wachsenden Zeit erfolge und mit einer theilweisen Durchdringung der Kugeln verbunden sei.

Aus einer solchen Annahme würde allerdings das bisher als erfahrungsmässig richtig angenommene Temperaturgesetz nicht folgen, sondern ein complicirteres; z. B. der Diffusionscoëfficient würde statt dem Quadrate der absoluten Temperatur einer Summe von zwei Gliedern proportional, deren eines die Potenz $^3/_2$, das andere eine höhere als die zweite Potenz der absoluten Temperatur enthielte, und damit ist schon eine grössere Annäherung an die Erfahrung erzielt. Es ist eben zu beachten, dass bei der Kleinheit des Temperaturintervalles, innerhalb dessen die Beobachtungen liegen, aus den Diffusionsversuchen nur gefolgert werden kann, dass keine andere einfache Potenz der Temperatur den Beobachtungen besser entspricht, als die zweite, nicht aber, dass auch keine andere Function der Temperatur mit derselben Annäherung denselben sich anschmiegt.

Die Ansicht, dass die Molecüle Kugeln aus verdichtetem Äther bestehend darstellen, führte mich nun zu folgender Betrachtung.

Das Licht pflanzt sich im leeren Raume mit einer grösseren Geschwindigkeit fort, als in anderen Medien, z. B. in Gasen. Nach Fresnel liegt die Ursache davon darin, dass die mittlere Dichte

des Äthers innerhalb der Körper eine grössere ist, als im leeren Raume. Wenn nun die Gasmolecüle Kugeln von solchem verdichteten Äther sind, so ist eine Beziehung zwischen den Brechungsquotienten der Gase und den Grössen ihrer Molecüle zu erwarten der Art, dass Gase mit grösseren Molecülen das Licht stärker brechen, als Gase mit kleineren Molecülen.

Da durch die Grössen der Molecüle die mittlere Länge des Weges, den ein Molecül von einem bis zum nächsten Zusammenstosse macht, bestimmt ist, so müssen also die Gase, für welche die mittlere Weglänge einen grösseren Werth hat, kleinere Brechungsquotienten besitzen.

Die Vergleichung der von Dulong bestimmten Brechungsquotienten der Gase mit ihren mittleren Weglängen lässt auch wirklich das Vorhandensein der erwarteten Beziehung erkennen. Im Folgenden sind die bei den Diffusionsversuchen verwendeten Gase mit ihren oben berechneten mittleren Weglängen λ und den von Dulong bestimmten Brechungsquotienten aufgeführt.

Wasserstoff . . .	$\lambda = 0{\cdot}0000139$	$n = 0{\cdot}000138$
Sauerstoff	74	272
Luft	71	294
Kohlenoxyd . . .	65	340
Sumpfgas	59	443
Kohlensäure . . .	50	449
Stickoxydul . . .	42	503
Schwefelige Säure .	39	665.

Während die mittleren Weglängen eine Reihe von abnehmenden, bilden die Brechungsquotienten eine Reihe von wachsenden Zahlen. Merkwürdiger Weise geben sogar für sechs der angeführten Gase, und zwar jene, für welche die hier zur Anwendung kommenden Grössen am genauesten bestimmt sein dürften, die Producte aus der mittleren Weglänge und dem Überschuss des Brechungsquotienten über die Einheit nahezu eine constante Zahl. Man erhält den Factor 10^{-11} weglassend für

Wasserstoff	$(n-1)\lambda = 192$
Sauerstoff	201
Luft	209

Kohlenoxyd	221
Kohlensäure	224
Stickoxydul	211

hingegen folgt für Sumpfgas die Zahl 271, für schwefelige Säure 259.

Benützt man die aus den Graham'schen Versuchen abgeleiteten Werthe der mittleren Weglängen, so ergibt sich auch für die andern in der obigen Reihe nicht enthaltenen Gase die Beziehung, dass den grösseren Brechungsquotienten die kleineren Weglängen entsprechen. Ein Gesetz lassen jedoch die verschiedenen Zahlen nicht erkennen.

Es scheinen mir auch die Bestimmungen der mittleren Weglängen, zum Theil auch die der Brechungsquotienten nicht jenen Grad von Sicherheit zu besitzen, dass man jetzt schon von einer Discussion der verschiedenen, für diese Grössen vorliegenden Zahlen einen Erfolg erwarten könnte. Es muss vor der Hand genügen, auf die grosse Wahrscheinlichkeit des Vorhandenseins einer einfachen Beziehung zwischen diesen aus zwei so verschiedenen Erscheinungsgebieten abgeleiteten Constanten hingewiesen zu haben, eine Beziehung, die um so merkwürdiger ist, als die beiden Reihen dieser Constanten, jede für sich, keine gesetzmässige Relation zu den übrigen Bestimmungsgrössen der Gase erkennen lassen.

Die folgenden Abschnitte dieser Abhandlung enthalten von einigen im vorhergehenden gebrauchten Formeln die Entwicklungen oder die nöthigen Andeutungen dazu. Diese Formeln sind zum Theil auch schon von andern abgeleitet worden.

Das Princip, nach welchem die Anzahl der Zusammenstösse, welche zwischen den Molecülen eines Gases in der Zeiteinheit erfolgen, berechnet werden kann, verdankt man Clausius [1]. Die hier demselben gegebene Begründung ist jedoch wohl einfacher. Die Formel, welche zur Berechnung der Anzahl der Zusammenstösse zwischen den verschiedenen Molecülen eines Gemenges, das von Clausius benützte Gesetz der Geschwindigkeits-

[1] Pogg. Ann. CV. 249.

vertheilung angenommen, führt, findet sich auch schon in einer von Clausius veröffentlichten Notiz [1].

Dieselbe Anzahl ist unter der Voraussetzung des Maxwell'schen Gesetzes zuerst von diesem selbst [2], jedoch in nicht ganz strenger Weise bestimmt worden. Das im folgenden eingeschlagene Verfahren hat übrigens auch schon O. E. Meyer [3] bei der Berechnung der Anzahl der Zusammenstösse zwischen den gleichartigen Molecülen eines Gases zur Anwendung gebracht.

Was die im zweiten Abschnitte enthaltenen Betrachtungen, die Berechnung der Mittelwerthe der Geschwindigkeiten nach dem Stoss und der von ihnen abhängigen Grössen, ferner die im dritten Abschnitte enthaltene Berechnung der bei den Zusammenstössen von den Molecülen einer Art auf die der andern Art übertragene Bewegungsgrösse anbetrifft, so ist mir nicht bekannt, dass dieser Gegenstand schon anderswo behandelt wäre. Selbst, was die Formeln für die Geschwindigkeiten nach dem Stoss anbetrifft, weiss ich nicht, ob sie in dieser Form schon irgendwo aufgestellt sind.

Hingegen wurde seit Krönig die Formel für den Druck eines Gases wiederholt zum Theil auch in unrichtiger Weise reproducirt. Ich wollte hier hauptsächlich hervorheben, dass die Formel von dem Gesetz der Geschwindigkeitsvertheilung unabhängig ist, wenn man das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit in dieselbe einführt, dass sie aber von dem Vertheilungsgesetze abhängig wird, sobald man das mittlere Quadrat durch das Quadrat des Mittels der Geschwindigkeiten ersetzt.

Die Grösse der inneren Reibung ist unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit der Molecularbewegung für alle Molecüle dieselbe ist, von Maxwell [4], O. E. Meyer [5] und v. Lang [6] bestimmt worden, jedoch in anderer Weise als es hier geschieht. Die Maxwell'sche Bestimmung dieser Grösse nach

[1] Phil. Mag. (4). XIX. 434.
[2] Phil. Mag. (4). XIX. 19.
[3] De gasorum theoria. Vratislaviae. 1866.
[4] Phil. Mag. (4). XIX. 19.
[5] Pogg. Ann.
[6] Sitzungsber. LXIV. 2. Abth.

seiner neuen Theorie[1] beruht natürlich auf ganz anderen Grundlagen.

I. Die Anzahl der Zusammenstösse.

Eine Kugel vom Radius r_1 bewege sich mit der Geschwindigkeit c_1 in einem Raume, in welchem eine sehr grosse Zahl von Kugeln, alle vom Radius r_2, in gleichartiger Vertheilung fixirt sind, so dass auf die Raumeinheit n_2 Mittelpunkte solcher Kugeln entfallen. So oft die Bahn der ersten Kugel dem Mittelpunkte einer Kugel zweiter Art näher als auf die Distanz r_1+r_2 kommt, findet ein Zusammenstoss statt. Die Anzahl der Zusammenstösse in der Zeiteinheit ist daher gleich der Anzahl der Mittelpunkte der fixen Kugeln in dem Cylinder, dessen Basis ein Kreis vom Radius r_1+r_2, dessen Länge der von der bewegten Kugel beschriebene Weg c_1 ist, also

$$n_2\pi(r_1+r_2)^2c_1 = n_2\pi s^2 c_1$$

wenn s für r_1+r_2 geschrieben wird. Der von der bewegten Kugel beschriebene Weg c_1, durch diese Anzahl dividirt, gibt die mittlere Länge des Weges, den diese Kugel von einem bis zum nächsten Zusammenstosse macht.

Befindet sich die fix gedachte Gruppe von Kugeln in einer allen gemeinschaftlichen Bewegung, so ist die Anzahl der in der Zeiteinheit erfolgenden Zusammenstösse durch dieselbe Formel bestimmt, nur ist statt c_1 die relative Geschwindigkeit der ersten Kugel gegen die andern zu setzen. Sind die Componenten der Geschwindigkeit der ersten Kugel x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die der zweiten, so ist die Anzahl der Zusammenstösse

$$n_2\pi s^2 r,$$

unter r die relative Geschwindigkeit verstanden, so dass

$$r^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2.$$

Hat man statt der einen n_1 Kugeln mit denselben Geschwindigkeitscomponenten x_1, y_1, z_1, so wird die Anzahl der

[1] Phil. Mag. (4). XXXV. 129.

Zusammenstösse der n_1 Kugeln erster mit den n_2 zweiter Art $n_1 n_2 \pi s^2 r$.

Ist nicht nur eine Gruppe von Kugeln zweiter Art vorhanden, sondern deren mehrere, etwa unendlich viele verschieden bewegte, so findet man die gesammte Anzahl der Zusammenstösse einer Kugel erster mit denen zweiter Art durch Summirung der Zusammenstösse der einen Kugel mit jeder einzelnen Gruppe, also durch Summirung des Ausdruckes $n_2 \pi s^2 r$.

Ist nicht eine, sondern sind n_1 Kugeln mit den Componenten x_1, y_1, z_1 vorhanden, so wird die Anzahl der Zusammenstösse dieser mit allen andern $n_1$mal die soeben angegebene Summe, und sind auch von den Kugeln erster Art sehr viele verschieden bewegte, so erhält man die Anzahl der Zusammenstösse durch doppelte Summirung des Ausdruckes $n_1 n_2 \pi s^2 r$.

Nimmt man, der Hypothese von Clausius entsprechend, die Geschwindigkeiten der Kugeln, von denen n_2 eine Gruppe darstellen, alle $= c_2$, aber nach allen möglichen Richtungen im Raume gleichmässig vertheilt, und entfallen N_2 solcher Kugeln auf die Raumeinheit, so hat man

$$n_2 = N_2 \frac{dO}{4\pi}$$

zu setzen, worin dO das Element einer Kugelfläche vom Radius 1 bedeutet, dessen Lage durch die Cosinus $\frac{\xi_2}{c_2}, \frac{\eta_2}{c_2}, \frac{\zeta_2}{c_2}$ bestimmt ist, wenn ξ_2, η_2, ζ_2 die Componenten der Geschwindigkeit c_2 bedeuten.

Wählt man die Richtung der Geschwindigkeit der ersten Kugel, welche c_1 sein soll, zur Axe der x, so werden ihre Componenten $\xi_1 = c_1$, $\eta_1 = 0$, $\zeta_1 = 0$, und bildet die Richtung der Geschwindigkeit c_2 mit der Axe der x den Winkel θ, und die Ebene, welche die Richtung von c_2 und die Axe der x enthält, mit der xz Ebene den Winkel φ, so ist

$$\xi_2 = c_2 \cos\theta, \quad \eta_2 = c_2 \sin\theta \sin\varphi, \quad \zeta_2 = c_2 \sin\theta \cos\varphi$$

und $dO = \sin\theta d\theta d\varphi$. Die Anzahl a' der Zusammenstösse der ersten Kugel mit den übrigen ist also gegeben durch

$$a' = N_2 \pi s^2 \cdot \frac{1}{4\pi} \iint \sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 2c_1 c_2 \cos\theta} \sin\theta d\theta d\varphi$$

und ist die Integration nach φ auszuführen von 0 bis 2π, nach θ von 0 bis π. Man erhält

$$a' = N_2 \pi s^2 \cdot \frac{3c_1^2 + c_2^2}{3c_1} \text{ wenn } c_1 > c_2$$

$$a' = N_2 \pi s^2 \cdot \frac{c_1^2 + 3c_2^2}{3c_2} \text{ wenn } c_1 < c_2$$

$$a' = N_2 \pi s^2 \cdot \frac{4c_1}{3} \text{ wenn } c_1 = c_2.$$

Sind die Kugeln zweiter Art einerlei mit der Kugel erster Art, so ist die Anzahl der Zusammenstösse, welche eine Kugel in der Zeiteinheit erleidet,

$$a_1 = \frac{4}{3} N \pi s^2 c_1$$

wenn N solcher Kugeln in der Raumeinheit vorhanden sind.

Sind N_1 Kugeln erster Art mit gleichen Geschwindigkeiten c_1, die aber nach allen Richtungen des Raumes vertheilt sind, vorhanden, so hat man

$$n_1 = N_1 \frac{dO}{4\pi}$$

zu setzen und die nochmalige Integration des obigen Ausdruckes gibt die Anzahl der in der Zeiteinheit erfolgenden Zusammenstösse zwischen den Kugeln erster und zweiter Art

$$a = N_1 N_2 \pi s^2 \frac{3c_1^2 + c_2^2}{3c_1}$$

unter der Voraussetzung, dass c_1 die grössere der Geschwindigkeiten c_1 und c_2 ist.

Nach Maxwell ist die Anzahl jener von N_2 Molecülen, deren zur Axe der x parallele Componente der Geschwindigkeit zwischen ξ_2 und $\xi_2 + d\xi_2$ liegt, gleich

$$\frac{N_2}{\alpha_2 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi_2^2}{\alpha_2^2}} d\xi_2$$

und die Anzahl jener, deren Componenten zwischen ξ_2, η_2, ζ_2 und $\xi_2+d\xi_2$, $\eta_2+d\eta_2$, $\zeta_2+d\zeta_2$ liegen, welche Anzahl mit dN_2 bezeichnet werden soll, ist gegeben durch

$$dN_2 = \frac{N_2}{\alpha_2^3\pi\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2}{\alpha_2^2}} d\xi_2 d\eta_2 d\zeta_2 .$$

Die Formel für die Anzahl a' der Zusammenstösse zwischen einer Kugel erster Art, deren Geschwindigkeit die Componenten ξ_1, η_1, ξ_1 hat, und den Kugeln zweiter Art wird

$$a' = \pi s^2 \iiint r dN_2,$$

worin

$$r = \sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)}$$

und sind die drei Integrationen nach ξ_2, η_2, ζ_2, jede von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken. Setzt man

$$\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2 = u_1^2$$
$$\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2 = u_2^2,$$

wählt die Richtung der Geschwindigkeit u_1 als Axe eines Polarcoordinatensystems, nennt θ den Winkel, den u_2 mit dieser Axe bildet, und φ den Winkel, den die Ebene u_1u_2 mit einer fixen durch u_1 gelegten einschliesst, so ist

$$a' = \frac{N_2 s^2}{\alpha_2^3\sqrt{\pi}} \iiint e^{-\frac{u_2^2}{\alpha_2^2}} \sqrt{u_1^2+u_2^2-2u_1u_2\cos\theta} \,.\, u_2^2 du_2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

und die Integration ist nach φ von 0 bis 2π, nach θ von 0 bis π, nach u_2 von 0 bis ∞ zu erstrecken.

Die Integration nach φ liefert den Factor 2π, jene nach θ, welche sich auf den Ausdruck

$$\sqrt{u_1^2+u_2^2-2u_1u_2\cos\theta} \,.\, \sin\theta d\theta$$

erstreckt, gibt den Factor

$$\frac{6u_1^2+2u_2^2}{3u_1} \text{ wenn } u_1 > u_2$$

$$\frac{2u_1^2+6u_2^2}{3u_2} \text{ wenn } u_1 < u_2.$$

Es muss also das Intervall der Integration nach u_2 abgetheilt werden in ein von 0 bis u_1 reichendes, in welchem $u_2 < u_1$ ist, und in ein von u_1 bis ∞ sich erstreckendes, in welchem dann $u_2 > u_1$ ist. Ein Theil der sich ergebenden Ausdrücke lässt sich vollständig auswerthen, ein Theil aber auf das Integral

$$\int e^{-\frac{u_2^2}{\alpha_2^2}} du_2$$

reduciren. Man erhält

$$a' = N_2 s^2 \sqrt{\pi} \left[\alpha_2 e^{-\frac{u_1^2}{\alpha_2^2}} + \frac{2u_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_2 u_1} \int e^{-\frac{u^2}{\alpha_2^2}} du \right]$$

und ist das in dieser Formel enthaltene Integral von 0 bis u_1 zu nehmen.

Die Anzahl der Molecüle des ersten Gases, deren Geschwindigkeitscomponenten zwischen ξ_1, η_1, ζ_1 und $\xi_1 + d\xi_1, \eta_1 + d\eta_1, \zeta_1 + d\zeta_1$ liegen, ist

$$dN_1 = \frac{N_1}{\alpha_1^3 \pi \sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}{\alpha_1^2}} d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1.$$

Die Anzahl der Zusammenstösse a der N_1 Kugeln erster Art mit den Kugeln zweiter Art wird sonach bestimmt sein durch

$$a = \iiint a' dN_1$$

und sind die drei Integrationen nach ξ_1, η_1, ζ_1 alle von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen. Sie lassen sich nach Einführung eines Polarcoordinatensystems vollständig ausführen und man erhält

$$a = 2N_1 N_2 s^2 \sqrt{\pi} \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Die Grössen α_1 und α_2 kann man durch die mittleren Geschwindigkeiten der Kugeln oder durch die mittleren Quadrate ihrer Geschwindigkeiten ausdrücken.

Bezeichnet man die mittleren Geschwindigkeiten mit v_1 und v_2, die mittleren Quadrate mit c_1^2 und c_2^2, so ist

$$v_1 = \frac{1}{N_1} \iiint u_1 dN_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \alpha_1$$

$$c_1^2 = \frac{1}{N_1} \iiint u_1^2 dN_1 = \frac{3}{2} \alpha_1^2.$$

Es findet also zwischen der mittleren Geschwindigkeit und dem mittleren Quadrate der Geschwindigkeiten die Relation

$$\frac{\pi}{8} v_1^2 = \frac{1}{3} c_1^2.$$

Ebenso ist

$$v_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \alpha_2, \quad c_2^2 = \frac{3}{2} \alpha_2^2.$$

Führt man in die Formel für a die Grössen v_1 und v_2 ein, so folgt

$$a = N_1 N_2 \pi s^2 \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Die Anzahl der Zusammenstösse unter den nach allen möglichen Richtungen bewegten Molecülen der beiden Arten ist also gerade so gross, als bewegten sich alle Molecüle der ersten Art mit ihrer mittleren Geschwindigkeit nur in einer und die Molecüle der zweiten Art mit ihrer mittleren Geschwindigkeit in einer darauf senkrechten Richtung.

Für die Anzahl der Zusammenstösse a_1 eines Molecüls mit einem System gleichartiger Molecüle folgt

$$a_1 = N \pi s^2 v \sqrt{2}.$$

II. Die Geschwindigkeiten nach dem Stoss.

Stossen zwei Kugeln von den Massen m_1 und m_2 mit den Geschwindigkeiten u_1 und u_2 central zusammen, so sind ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoss u'_1 und u'_2 bestimmt durch die Gleichungen

$$m_1 u'_1 + m_2 u'_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$
$$u'_1 - u'_2 = -e(u_1 - u_2),$$

worin $e = 1$, wenn die Kugeln vollkommen elastisch, $e = 0$, wenn sie unelastisch sind. Aus diesen zwei Gleichungen findet man

$$u'_1 = u_1 - \frac{m_2(1+e)}{m_1 + m_2}(u_1 - u_2)$$

$$u'_2 = u_2 - \frac{m_1(1+e)}{m_1 + m_2}(u_2 - u_1).$$

Ist der Zusammenstoss kein centraler, so findet man die Geschwindigkeiten nach dem Stoss in folgender Weise:

Man zerlege die Geschwindigkeit der ersten Kugel in zwei Componenten, eine, welche in die Verbindungslinie der beiden Centra während des Zusammenstosses fällt, sie sei u_1, und eine zu dieser senkrechte, sie sei w_1. Ebenso zerlege man die Geschwindigkeit der zweiten Kugel in eine centrale Componente u_2 und in eine laterale w_2. Durch den Stoss werden nur die Componenten u_1 und u_2 verändert und zwar nach den obigen Formeln in u'_1 und u'_2.

Die Geschwindigkeit der ersten Kugel vor dem Stoss habe parallel zu den drei Axen der rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z die Componenten x_1, y_1, z_1, die Geschwindigkeit derselben Kugel nach dem Stoss habe parallel zu denselben Axen die Componenten x'_1, y'_1, z'_1. Letztere unterscheiden sich von den ersteren nur durch die Antheile, welche die Änderung der Componente u_1 liefert. Es wird also

$$x'_1 = x_1 - m_2 p \cos\alpha$$
$$y'_1 = y_1 - m_2 p \cos\beta$$
$$z'_1 = z_1 - m_2 p \cos\gamma,$$

worin

$$p = \frac{1+e}{m_1+m_2}(u_1-u_2)$$

gesetzt ist und α, β, γ die Winkel bedeuten, welche die Centrallinie mit den Axen der x, y, z bildet.

Sind die Componenten der Geschwindigkeit der zweiten Kugel vor dem Stoss x_2, y_2, z_2 und nach dem Stoss x'_2, y'_2, z'_2, so wird

$$x'_2 = x_2 + m_1 p \cos\alpha$$
$$y'_2 = y_2 + m_1 p \cos\beta$$
$$z'_2 = z_2 + m_1 p \cos\gamma.$$

Die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 sind bestimmt durch die Gleichungen

$$u_1 = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma$$
$$u_2 = x_2 \cos\alpha + y_2 \cos\beta + z_2 \cos\gamma.$$

Die Differenz $u_1 - u_2$ ist nichts anderes als die Componente der relativen Geschwindigkeit der ersten Kugel gegen die zweite,

welche in die Centrallinie fällt. Bezeichnet man die relative Geschwindigkeit der ersten Kugel gegen die zweite mit r und ist λ der Winkel, welchen die Richtung von r mit der Centrallinie bildet, so ist

$$u_1 - u_2 = r \cos \lambda.$$

Die Formeln für die Componenten der Geschwindigkeiten nach dem Stoss können daher z. B. für elastische Kugeln, solche werden allein weiterhin in Betracht kommen, so geschrieben werden:

$$x'_1 = x_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} r \cos \lambda \cos \alpha$$

$$y'_1 = y_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} r \cos \lambda \cos \beta$$

$$z'_1 = z_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} r \cos \lambda \cos \gamma$$

für die erste Kugel und

$$x'_2 = x_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} r \cos \lambda \cos \alpha$$

$$y'_2 = y_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} r \cos \lambda \cos \beta$$

$$z'_2 = z_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} r \cos \lambda \cos \gamma$$

für die zweite Kugel.

Denken wir uns die zweite Kugel fest und die erste mit der relativen Geschwindigkeit r gegen dieselbe bewegt. Senkrecht gegen die Richtung von r werde durch den Mittelpunkt der zweiten Kugel O eine Ebene gelegt. Ein Zusammenstoss der beiden Kugeln findet dann statt, wenn der Punkt M, in welchem r diese Ebene durchsticht, von O um weniger als die Summe der Radien der beiden Kugeln beträgt, absteht. Sind r_1 und r_2 die Radien der beiden Kugeln, so liegt also für den Fall eines Zusammenstosses M innerhalb des um O mit dem Halbmesser $r_1 + r_2$ beschriebenen Kreises. Es soll nun die Aufgabe gelöst werden, für den Fall, dass jede Lage des Punktes M innerhalb des bezeichneten Kreises gleich wahrscheinlich ist, den mittleren

Werth der Geschwindigkeitscomponenten nach dem Stosse oder irgend welcher Function derselben zu bestimmen.

O werde zum Mittelpunkt der Coordinaten gewählt, durch *O* eine Parallele zur Richtung von *r* geführt, sie heisse *OR*. Durch diese und die Axe *OX* werde eine Ebene gelegt, sie schneide die auf *OR* senkrechte Ebene in der Linie *OX'*. Ferner sei *OC* die Centrallinie, die durch *OR* und *OC* gelegte Ebene schneidet die auf *OR* senkrechte Ebene in *OC'*. In dieser Linie liegt der Punkt *M* und zwar ist

$$OM = (r_1 + r_2) \sin\lambda.$$

Die Linie *OC'*, somit auch *OM* bilde mit *OX'* den Winkel φ, so ist ein Flächenelement am Punkte *M* gegeben durch

$$OM d\varphi . dOM = (r_1 + r_2)^2 \sin\lambda \cos\lambda d\lambda d\varphi.$$

Der Mittelwerth irgend einer Function der Geschwindigkeiten nach dem Stosse wird nun gefunden, wenn man diese Function mit dem eben aufgestellten Ausdrucke eines Flächenelementes multiplicirt, das Product integrirt nach φ von 0 bis 2π, nach λ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und das Resultat durch $\pi(r_1 + r_2)^2$ dividirt. So wird z. B. der Mittelwerth von x'_1

$$= x_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{r}{\pi} \iint \cos\alpha \cos^2\lambda \sin\lambda d\lambda d\varphi.$$

Es sind nun noch, damit die Rechnung wirklich ausgeführt werden kann, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ durch λ und φ auszudrücken.

Macht man die aus *O* gezogenen Linien *OR*, *OX*, *OX'*, *OC*, *OC'* gleich lang, so liegen die Punkte *R*, *X*, *X'*, *C*, *C'* auf einer Kugel. Werden sie durch grösste Kreise verbunden, so ist, wenn mit *a* der Winkel bezeichnet wird, den die Richtung der relativen Geschwindigkeit *r* mit der Axe der *x* bildet, der Bogen

$$RX = a, \quad RC = \lambda, \quad CX = \alpha$$

und

$$\cos\alpha = \cos a \cos\lambda + \sin a \sin\lambda \cos\varphi.$$

Nach Einführung dieses Werthes in das obige zweifache Integral und Auswerthung dieses wird der Mittelwerth

$$x'_1 = x_1 - \frac{m_2}{m_1+m_2} r \cos a$$

oder, da $r \cos a = x_1 - x_2$ ist

$$x'_1 = x_1 - \frac{m_2}{m_1+m_2} (x_1 - x_2).$$

Es ist also die von der ersten Kugel während eines Zusammenstosses mit der zweiten im Mittel nach der Axe der x gewonnene Bewegungsgrösse

$$m_1 x'_1 - m_1 x_1 = -\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} (x_1 - x_2).$$

Analoge Formeln erhält man für die andern Componenten der Geschwindigkeit. Zur Ableitung dieser Formeln braucht man jedoch $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ ausgedrückt durch φ und λ. Man findet, wenn b und c die Winkel, welche die Richtung der relativen Geschwindigkeit mit den Axen der y und z bildet, bedeuten

$$\cos\beta = \cos b \cos\lambda + \sin b \sin\lambda \cos (Y'OX' + \varphi)$$
$$\cos\gamma = \cos c \cos\lambda + \sin c \sin\lambda \cos (Z'OX' + \varphi).$$

Darin bedeutet $Y'OX'$ den Winkel der Linie OY', in welcher die durch OR und OY gelegte Ebene die auf OR senkrechte Ebene schneidet, mit der Linie OX'. Ebenso bedeutet $Z'OX'$ den Winkel zwischen OX' und der Linie, in welcher die auf OR senkrechte Ebene von der Ebene ORZ geschnitten wird.

Für das mittlere Quadrat von x'_1 erhält man in der angegebenen Weise rechnend

$$x'^2_1 = x_1^2 - \frac{2 m_2 x_1 r \cos a}{m_1+m_2} + \frac{4 m_2^2 r^2}{3(m_1+m_2)^2} (\cos^2 a + {}^1/_4 \sin^2 a).$$

Führt man

$$r \cos a = x_1 - x_2, \quad r^2 \sin^2 a = (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

ein, so kann man das Mittel von x'^2_1 auf die Form bringen

$$x'^2_1 = x_1^2 - \frac{2 m_2}{(m_1+m_2)^2} (x_1 - x_2)(m_1 x_1 + m_2 x_2)$$
$$+ \frac{m_2^2}{3(m_1+m_2)^2} [(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - 2(x_1 - x_2)^2].$$

Ähnliche Formeln erhält man für y'^2_1 und z'^2_1 und kann daraus die lebendige Kraft, welche die Kugel nach dem Stosse im Mittel besitzen wird, rechnen.

Bezeichnet man mit l_1 und l_2 die lebendigen Kräfte der beiden Kugeln vor dem Stoss, mit l'_1 und l'_2 die lebendigen Kräfte nach dem Stoss, so wird

$$l'_1 = l_1 - \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}(l_1-l_2) + (m_1-m_2)(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2).$$

Nimmt man die Mittel der lebendigen Kräfte für eine grosse Anzahl von Kugeln, welche nach allen möglichen Richtungen des Raumes sich bewegen, so wird der Mittelwerth von

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0$$

und es bleibt

$$l'_1 = l_1 - \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}(l_1-l_2).$$

In analoger Weise ergibt sich

$$l'_2 = l_2 + \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}(l_1-l_2)$$

und aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$l'_1-l'_2 = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2(l_1-l_2).$$

Durch sehr viele unregelmässige Zusammenstösse zwischen zwei Systemen von Kugeln werden also die mittleren lebendigen Kräfte der einzelnen Kugeln einander immer näher und näher gebracht und bildet die Gleichheit dieser lebendigen Kräfte den beharrenden Endzustand.

III. Die übertragene Bewegungsgrösse.

Haben n_1 Kugeln der ersten Art die Geschwindigkeitscomponenten ξ_1+u_1, η_1, ζ_1 und sind in der Raumeinheit n_2 Kugeln der zweiten Art mit den Componenten ξ_2+u_2, η_2, ζ_2, so dass die relative Geschwindigkeit der beiden Systeme

$$r' = \sqrt{(\xi_1-\xi_2+u_1-u_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2},$$

so ist die Anzahl der Zusammenstösse, welche zwischen den n_1 Kugeln erster Art mit den anderen in der Zeiteinheit erfolgen,

$$n_1 n_2 \pi s^2 r'$$

und die bei diesen Zusammenstössen von den Kugeln erster Art verlorene mittlere Grösse der zur Axe der x parallelen Bewegung ist

$$n_1 n_2 \pi s^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r'(\xi_1 - \xi_2 + u_1 - u_2).$$

Die ganze von den Kugeln erster Art, welche sich in der Raumeinheit befinden, an die Kugeln zweiter Art abgegebene Bewegungsgrösse W folgt aus diesem Ausdrucke durch doppelte Summirung nach n_1 und n_2, es wird

$$W = \pi s^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Sigma n_1 n_2 r'(\xi_1 - \xi_2 + u_1 - u_2).$$

Ist $u_1 - u_2$ klein gegen die Geschwindigkeiten der Molecularbewegung, so kann man angenähert

$$r' = r + \frac{\xi_1 - \xi_2}{r}(u_1 - u_2)$$

setzen, worin r die relative Geschwindigkeit der von den progressiven Bewegungen u_1 und u_2 befreit gedachten Molecüle bedeutet, also

$$r = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}$$

ist. Der Ausdruck für W verwandelt sich sodann mit Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung bezüglich $u_1 - u_2$ in

$$W = \pi s^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Sigma n_1 n_2 r \left[\xi_1 - \xi_2 + u_1 - u_2 + \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2}{r^2}(u_1 - u_2)\right].$$

Es ist aber

$$\Sigma n_1 n_2 r(\xi_1 - \xi_2) = 0,$$

da für dasselbe r so viel positive als gleich grosse negative Werthe von $\xi_1 - \xi_2$ existiren. Ferner ist

$$\Sigma \frac{n_1 n_2}{r}(\xi_1 - \xi_2)^2 = \Sigma \frac{n_1 n_2}{r}(\eta_1 - \eta_2)^2 = \Sigma \frac{n_1 n_2}{r}(\zeta_1 - \zeta_2)^2,$$

also jeder dieser Ausdrücke gleich $\frac{1}{3}$ ihrer Summe, somit

$$\Sigma \frac{n_1 n_2}{r} (\xi_1 - \xi_2)^2 = \frac{1}{3} \Sigma n_1 n_2 r$$

und es bleibt

$$W = \frac{4\pi s^2}{3} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2) \Sigma n_1 n_2 r$$

oder

$$W = \frac{4a}{3} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2),$$

worin

$$a = \pi s^2 \Sigma n_1 n_2 r$$

die Anzahl der Zusammenstösse bedeutet, welche zwischen den von den Geschwindigkeiten u_1 und u_2 befreiten Molecülen der ersten und zweiten Art in der Einheit des Raumes und der Zeit stattfinden.

Ich habe die letzte Formel für W, welche die Grundlage der Theorie der Diffusion bildet, noch auf zwei andere Arten abgeleitet, welche ich hier in Kürze vorführen will.

Die erste Art der Ableitung ist nachgebildet der Theorie der Wärmeleitung von Clausius. Die Richtung der Geschwindigkeiten u_1 und u_2 werde als Axe eines Polarcoordinatensystems genommen, irgend eine durch dieselbe gelegte Ebene als Fundamentalebene. Schliesst mit dieser Axe eine Linie den Winkel θ ein und die Ebene, in welcher die Axe und diese Linie liegen, mit der Fundamentalebene den Winkel φ, so bewegen sich in dieser Richtung von N_1 Molecülen, welche in der Volumseinheit sich befinden,

$$n_1 = \frac{N_1 \sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi}$$

Molecüle mit der Geschwindigkeit c_1, wenn das Gas im Zustande der Ruhe sich befindet. Ist aber das Gas in Bewegung, so ist die Anzahl der in der angegebenen Richtung sich bewegenden Molecüle eine andere n'_1 und auch ihre Geschwindigkeit ist eine andere c'_1. Wegen der symmetrischen Vertheilung der Geschwindigkeiten um die gewählte Axe kann man

$$n'_1 = n_1(1 + \beta_1 \cos \theta)$$

setzen, und wird β_1 eine kleine Zahl sein, wenn die Geschwindigkeit u_1 der progressiven Bewegung des Gases klein ist gegen c_1, was vorausgesetzt werden soll.

Die Geschwindigkeit c'_1 ist ferner $= c_1$ mehr jener Componente, welche die allen Molecülen gemeinsame Geschwindigkeit u_1 nach der gewählten Richtung liefert, also

$$c'_1 = c_1 + u_1 \cos\theta.$$

Die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit in der zur gewählten Polaraxe senkrechten Ebene gehende Anzahl von Molecülen ist nun

$$\Sigma n'_1 c'_1 \cos\theta$$

oder nach Einführung der Werthe von n'_1 und c'_1

$$\frac{N_1}{4\pi}\iint (c_1 + u_1 \cos\theta)(1 + \beta\cos\theta)\cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi,$$

welcher Ausdruck nach φ von 0 bis 2π, nach θ von 0 bis π zu integriren ist. Sein Werth ist

$$\frac{N_1}{3}(u_1 + \beta_1 c_1).$$

Die Anzahl der durch die gewählte Flächeneinheit gehenden Molecüle ist aber auch durch die progressive Bewegung des Gases direct bestimmt, sie ist $N_1 u_1$, also hat man

$$\frac{N_1}{3}(u_1 + \beta_1 c_1) = N_1 u_1,$$

woraus sich

$$\beta_1 = \frac{2u_1}{c_1}$$

ergibt. Es bewegen sich also in der durch die Winkel θ und φ bestimmten Richtung

$$\frac{N_1}{4\pi}\left(1 + \frac{2u_1}{c_1}\cos\theta\right)\sin\theta d\theta d\varphi$$

Molecüle mit der Geschwindigkeit

$$c'_1 = c_1 + u_1 \cos\theta.$$

Ebenso findet man, dass in einer durch die analogen Winkel η und ψ bestimmten Richtung

$$\frac{N_2}{4\pi}(1+\frac{2u_2}{c_2}\cos\eta)\sin\eta d\eta d\psi$$

Molecüle der zweiten Art mit der Geschwindigkeit

$$c'_2 = c_2 + u_2 \cos\eta$$

sich bewegen, und sind die Bedeutungen von N_2, c_2, u_2 für sich klar.

Schliessen die beiden gewählten Richtungen den Winkel δ ein, so ist die relative Geschwindigkeit dieser zwei Gruppen von Molecülen

$$r' = \sqrt{c'^2_1 + c'^2_2 - 2c'_1 c'_2 \cos\delta}$$

also die Anzahl der Zusammenstösse zwischen denselben

$$\frac{1}{16\pi} N_1 N_2 \pi s^2 r'(1+\frac{2u_1}{c_1}\cos\theta)(1+\frac{2u_2}{c_2}\cos\eta)\sin\theta\sin\eta d\theta d\eta d\varphi d\psi$$

und multiplicirt man diesen Ausdruck mit

$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(c_1\cos\theta + u_1\cos^2\theta - c_2\cos\eta - u_2\cos^2\eta),$$

so erhält man die bei diesen Zusammenstössen von den Molecülen erster Art an die Molecüle zweiter Art übertragene mittlere Bewegungsgrösse. Die Entwicklung von r' gibt nun

$$r' = r + \frac{c_1 u_1 \cos\theta + c_2 u_2 \cos\eta - (c_1 u_2 \cos\eta + c_2 u_1 \cos\theta)\cos\delta}{r},$$

worin

$$r = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 2c_1 c_2 \cos\delta}.$$

Führt man diesen Werth von r' oben ein, und führt die Integration über die Kugelfläche zweimal aus, so erhält man

$$W = \frac{4\pi s^2}{3} N_1 N_2 \frac{3c_1^2 + c_2^2}{3c_1}(u_1 - u_2),$$

vorausgesetzt, dass c_1 die grössere der beiden Geschwindigkeiten ist.

Die zweite Art der Ableitung gründet sich auf das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsvertheilung. Bezeichnet man mit x_1 die zur Axe der x parallele Componente eines Moleculs, so sind im ruhenden wie im bewegten Gase alle möglichen Werthe von x_1 von $-\infty$ bis $+\infty$ vorhanden, nur die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molecül die bestimmte Componente x_1 habe, ist nicht in beiden Fällen dieselbe. Setzt sich x_1 aus der Componente ξ_1 der Molecularbewegung und der Geschwindigkeit u_1 der Massenbewegung des Gases zusammen, so haben im bewegten Gase ebenso viele Molecüle die Geschwindigkeit x_1, als im ruhenden Gase die Geschwindigkeit ξ_1 besitzen.

Die Anzahl der Molecüle, welche im bewegten Gase eine zwischen x_1 und x_1+dx_1 liegende Componente haben, ist daher

$$\frac{N_1}{\alpha_1\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi_1^2}{\alpha_1^2}} d\xi_1 = \frac{N_1}{\alpha_1\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x_1-u_1)^2}{\alpha_1^2}} dx_1$$

und unter Voraussetzung, dass $\frac{u_1}{\alpha_1}$ eine kleine Zahl

$$\frac{N_1}{\alpha_1\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}} \left(1+\frac{2x_1u_1}{\alpha_1^2}\right) dx_1.$$

Die Anzahl der Molecüle erster Art, deren Geschwindigkeiten zwischen x_1, y_1, z_1 und $x_1+dx_1, y_1+dy_1, z_1+dz_1$ liegende Componenten haben, ist also

$$n'_1 = \frac{N_1}{\alpha_1^3\pi\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{\alpha_1^2}} \left(1+\frac{2x_1u_1}{\alpha_1^2}\right) dx_1\, dy_1\, dz_1.$$

Ebenso ist die Anzahl der Molecüle zweiter Art, deren Geschwindigkeitscomponenten zwischen x_2, y_2, z_2 und $x_2+dx_2, y_2+dy_2, z_2+dz_2$ liegen, gegeben durch

$$n'_2 = \frac{N_2}{\alpha_2^3\pi\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x_2^2+y_2^2+z_2^2}{\alpha_2^2}} \left(1+\frac{2x_2u_2}{\alpha_2^2}\right) dx_2\, dy_2\, dz_2.$$

Die Anzahl der zwischen diesen zwei Gruppen in der Einheit der Zeit erfolgenden Zusammenstösse wird

$$\pi s^2 n'_1 n'_2 \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2},$$

und multiplicirt man diesen Ausdruck noch mit

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(x_1 - x_2),$$

so hat man die bei diesen Zusammenstössen von den Molecülen erster Art verlorene mittlere Bewegungsgrösse.

Die Summe aller dieser Grössen, welche mit W bezeichnet worden ist, gewinnt man durch eine zweimalige Integration des soeben gefundenen Ausdruckes über den ganzen unendlichen Raum. Die Integration lässt sich wirklich ausführen und das Resultat derselben ist

$$\frac{8\sqrt{\pi}s^2}{3}\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\,\frac{N_1 N_2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}(u_1 - u_2).$$

IV. Druck und innere Reibung.

Befinden sich in der Einheit des Volumens gleichförmig vertheilt n Molecüle, welche sich mit der Geschwindigkeit ξ parallel zur Axe der x bewegen, so ist die Anzahl der Molecüle, welche in der Einheit der Zeit durch die Flächeneinheit einer auf der Axe der x senkrechten Ebene gehen, $n\xi$, und wenn Molecüle mit verschiedenen Geschwindigkeiten ξ vorhanden sind, $\Sigma n\xi$.

Die von den Molecülen eines Gases in der Zeit 1 durch die Fläche 1 getragene Bewegungsgrösse zerlegt nach der Normale zur Fläche, ist der Druck des Gases gegen diese Fläche. Es ist also

$$p = \Sigma n\xi \,.\, m\xi = \Sigma nm\xi^2.$$

Der Druck gegen zwei zu den Axen der y und z senkrechte Ebenen wird $\Sigma nm\eta^2$ und $\Sigma nm\zeta^2$. Sind die Geschwindigkeiten der Molecüle nach allen Richtungen des Raumes gleichmässig vertheilt, so ist

$$p = \Sigma nm\xi^2 = \Sigma nm\eta^2 = \Sigma nm\zeta^2 = \frac{1}{3}\Sigma nmc^2,$$

wenn c die Resultante der Componenten ξ, η, ζ ist. Diese Gleichung gilt nicht nur, wenn die Molecüle alle gleicher, sondern auch wenn sie verschiedener Art sind. Sind z. B. zwei Arten Molecüle vorhanden, deren Anzahlen, Massen und Geschwindigkeiten

durch die Indices 1 und 2 unterschieden werden sollen, so kann man die Summe auch in zwei Theile zerlegen und hat

$$p = \frac{1}{3} \Sigma n_1 m_1 c_1^2 + \frac{1}{3} \Sigma n_2 m_2 c_2^2 = p_1 + p_2,$$

worin p_1 und p_2 die Drücke bezeichnen, welche die einzelnen Gase ausüben würden, wenn sie jedes allein vorhanden wären.

Der Ausdruck $^1/_2 \Sigma nmc^2$ durch die Anzahl N der Molecüle in der Volumseinheit dividirt, gibt den Mittelwerth der lebendigen Kraft eines Molecüls. Bezeichnet man diesen mit l, so ist

$$p = \frac{2}{3} Nl$$

und gilt diese Formel allgemein für einfache Gase und Gemenge, welcher Art auch das Gesetz ist, nach dem die Geschwindigkeiten unter die Molecüle vertheilt sind, wenn nur keine bevorzugten Richtungen vorhanden sind.

Handelt es sich um ein einfaches Gas und bezeichnet man mit c^2 den Mittelwerth der Quadrate der Geschwindigkeiten, so wird

$$p = \frac{1}{3} Nmc^2$$

und für das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit folgt aus dieser Gleichung dieselbe Zahl, ob man das von Clausius oder das von Maxwell aufgestellte oder irgend ein anderes Gesetz der Geschwindigkeitsvertheilung annimmt.

Will man aber p nicht durch das mittlere Quadrat, sondern durch die mittlere Geschwindigkeit ausdrücken, dann ändert sich die Formel für p je nach dem angenommenen Vertheilungsgesetze. So besteht, wie schon bemerkt worden, nach dem Maxwell'schen Gesetze zwischen dem mittleren Geschwindigkeitsquadrate c^2 und dem Quadrat der mittleren Geschwindigkeit v die Beziehung

$$\frac{\pi}{8} v^2 = \frac{1}{3} c^2.$$

Es kann also auch

$$p = \frac{\pi}{8} Nmv^2$$

gesetzt werden.

Zur Erklärung der inneren Reibung werde angenommen, ein Gas bewege sich parallel zur Axe der x mit einer Geschwin-

digkeit, welche in der xy-Ebene den Werth u, in einer um z von dieser entfernten Ebene den Werth $u+\frac{du}{dz}z$ hat. Die unter der xy Ebene liegenden Schichten wirken, wenn $\frac{du}{dz}$ positiv ist, verzögernd auf die ober dieser Ebene rascher bewegten. Die auf die Einheit der Fläche reducirte verzögernde Kraft ist $-\mu\frac{du}{dz}$ und heisst μ der Coëfficient der inneren Reibung.

Diese verzögernde Kraft ist die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit der xy-Ebene von den Molecülen getragene zur Axe der x parallele Bewegungsgrösse. Sind n Molecüle in der Volumseinheit, welche parallel zur Axe der x die Geschwindigkeit ξ', parallel zur Axe der z die Geschwindigkeit ζ haben, so ist die bezeichnete Bewegungsgrösse

$$R = \Sigma nm\xi'\zeta.$$

Die Molecüle, welche mit der Geschwindigkeit $+\zeta$ durch die xy-Ebene von unten nach oben gehen, kommen aus verschiedenen Schichten. Für eines, welches aus der in der Tiefe $-z$ liegenden Schicht kommt, kann

$$\xi' = \xi+u-\frac{du}{dz}z$$

gesetzt werden, worin ξ die zur Axe der x parallele Componente der Geschwindigkeit bedeutet, welche dem Molecül in Folge der Wärmebewegung allein zukommt.

Nimmt man statt aller möglichen Tiefen, aus denen die Molecüle kommen, den Mittelwerth derselben, so wird sich dieser zur mittleren Weglänge λ eines Molecüls verhalten, wie ζ zur mittleren Geschwindigkeit, also wird

$$z = \frac{\zeta}{v}\lambda = \frac{\zeta}{a_1}$$

sein, wenn a_1 die Anzahl der Zusammenstösse, welche ein Molecül in der Zeiteinheit erleidet, bedeutet, und man kann

$$\xi' = \xi+u-\frac{du}{dz}\frac{\zeta}{a_1}$$

setzen. Sonach wird

$$R = \Sigma nm\left(\xi + u - \frac{du}{dz}\frac{\zeta}{a_1}\right)\zeta$$

und da wegen der gleich grossen Anzahl von Molecülen mit positiven und negativen ξ und ζ die Summen $\Sigma nm\xi\zeta$ und $\Sigma nmu\zeta$ verschwinden, so bleibt

$$R = -\frac{1}{a_1}\frac{du}{dz}\Sigma nm\zeta^2 = -\frac{p}{a_1}\frac{du}{dz},$$

woraus sich der Coëfficient der inneren Reibung

$$\mu = \frac{p}{a_1}$$

oder auch durch die mittlere Weglänge ausgedrückt

$$\mu = p\frac{\lambda}{v}$$

ergibt. Nach der Hypothese von Clausius wird

$$\mu = \frac{1}{3}\rho c\lambda$$

unter ρ die Dichte des Gases verstanden. Hingegen erhält man

$$\mu = \frac{\pi}{8}\rho v\lambda,$$

wenn man den Druck durch die aus dem Maxwell'schen Vertheilungsgesetze folgende mittlere Geschwindigkeit darstellt.

XII. SITZUNG VOM 25. APRIL 1872.

Die Marine-Section des k. & k. Reichs-Kriegs-Ministeriums dankt mit Note vom 20. April für die der k. k. Marine-Unterrealschule zu Pola bewilligten akademischen Publicationen.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Untersuchungen über die Ausdehnung der Hirnrinde, des Hirnmarkes und des Grosshirnes durch die Wärme", vom Herrn Dr. Ernst Rektorzik, Prof. der Anatomie zu Lemberg.

„Beiträge zur Kenntniss der Entwicklung der Knochenfische", vom Herrn Dr. Karl Weil.

Herr Dr. Eduard Schreder, Prof. am k. k. deutschen Gymnasium in Brünn, hinterlegt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung seiner Priorität.

Herr Prof. E. Suess legt eine Abhandlung des Herrn Akademikers J. F. Brandt in St. Petersburg vor, betitelt: „Bemerkungen über die untergegangenen Bartenwale (Balaenoiden), deren Reste bisher im Wiener Becken gefunden wurden".

Herr Hofrath Dr. E. Brücke bespricht den Inhalt seiner in der Sitzung am 11. April vorgelegten Abhandlung: „Studien über die Kohlenhydrate und über die Art, wie sie verdaut und aufgesaugt werden.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

American Journal of Science and Arts. 3[d] Series. Vol. II, Nrs. 7—12; Vol. III, Nrs. 13—15. New Haven, 1871—1872; 8⁰.

Annalen der Chemie & Pharmacie, von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R. Band LXXXVI, Heft 1. Leipzig & Heidelberg, 1872; 8⁰.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrg., Nr. 12. Wien, 1872; 8⁰.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1883—1885. (Bd. 79, 11.) Altona, 1872; 4°.

Carl, Ph., Repertorium für Experimental-Physik etc. VII. Band, 5. & 6. Heft. München, 1871; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nr. 15. Paris, 1872; 4°.

Gesellschaft, österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VII. Band, Nr. 8. Wien, 1872; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 16. Wien, 1872; 4°.

Landes-Museum, naturhistorisches, von Kärnten: Jahrbuch. X. Heft. Klagenfurt, 1871; 8°.

Nature. Nr. 129. Vol. V. London, 1872; 4°.

Plantamour, E., Nouvelles expériences faites avec le pendule à réversion et détermination de la pesanteur à Génève et au Righi-Kulm. Génève & Bale, 1872; 4°.

Reports on Observations of the Total Solar Eclipse of December 22, 1871. (Washington Observations for 1869. — Appendix I.) Washington, 1871; 4°.

„Revue politique et littéraire" et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger. I[re] Année (2[e] Série), Nr. 43. Paris & Bruxelles, 1872; 4°.

Société des Ingénieurs civils: Séance du 5 Avril 1872. Paris; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 16. Wien, 1872; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIV. Jahrgang, 5. Heft. Wien, 1872; 4°.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXV. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

5.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

XIII. SITZUNG VOM 10. MAI 1872.

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter theilt mit h. Erlass vom 2. Mai d. J. mit, dass ihn der Herr Minister für Cultus und Unterricht ersucht habe, der kais. Akademie für die dem Staats-Gymnasium zu Trebitsch bewilligten Separatabdrücke seinen Dank auszusprechen.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Über den Einfluss der Elektricität der Sonne auf den Barometerstand", vom Herrn Director Dr. K. Hornstein in Prag.

„Note über die Functionen X_n^m und Y_n^m", vom Herrn Prof. Leop. Gegenbauer in Krems.

Herr Hofrath Dr. E. Brücke überreicht eine im physiolog. Institute der Wiener Universität durchgeführte Arbeit des Herrn *Cand. med.* Johann Latschenberger: „Über den Bau des Pancreas".

Herr Prof. Dr. Aug. Em. Ritter v. Reuss legt die für die Denkschriften bestimmte dritte Abtheilung seiner „paläontologischen Studien über die älteren Tertiärschichten der Alpen" vor.

Herr Prof. Dr. V. v. Lang übergibt eine Abhandlung des Herrn Prof. Dr. Al. Handl in Lemberg: „Über die Constitution der Flüssigkeiten. (Beiträge zur Moleculartheorie. II.)"

Herr Dr. Sigm. Exner legt eine Abhandlung: „Über die physiologische Wirkung der Iridectomie" vor.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Anderson, John, A Report on the Expedition to Western Yunan viâ Bhamô. Calcutta, 1871; gr. 8°. (Nebst 10 Stück Separatabdrücken aus den „Proceedings of the Zoological Society of London“ 1871, und den „Proceedings of the Asiatic Society of Bengal“ 1871. 8°.)

Anstalt, k. ungar. geologische: Évkönyve. II. Kötet, 2 füzet. Pest, 1872; kl. 4°. — Mittheilungen. II. Band, 1. Lieferung. Pest, 1872: kl. 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrgang, Nr. 13. Wien, 1872; 8°.

Arbeiten des kais. botan. Gartens zu St. Petersburg. I. Band, 1. Lieferung. St. Petersburg, 1871; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1886. (Bd. 79. 14.) Altona, 1872; 4°.

Bericht des k. k. Krankenhauses Wieden vom Solar-Jahre 1870. Wien, 1872; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nrs. 16—17. Paris, 1872; 4°.

Gesellschaft, geographische, in Wien: Mittheilungen. Bd. XV (neuer Folge V.), Nr. 4. Wien, 1872; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VII. Band, Nr. 9. Wien, 1872; 4°.

— Deutsche geologische: Zeitschrift. XXIII. Band. 4. Heft. Berlin, 1871; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang. Nr. 17—18. Wien, 1872; 4°.

Grunert, Joh. Aug., Archiv der Mathematik & Physik. LIV. Theil, 2. Heft. Greifswald, 1872; 8°.

Hugo, Le C[te] Léopold, Les cristalloïdes complexes à sommet étoilé et les solides imaginaires. Paris, 1872; 8°.

Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg: Publications. Tome XII. Luxembourg, 1872; 8°.

Instituut, k., voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië: Bijdragen. III. Volgrecks. VI. Deel, 2. Stuk. 'S Gravenhage, 1872; 8⁰.

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie und verwandte Fächer, von F. Vorwerk. Band XXXVII, Heft 3. Speyer, 1872; 8⁰.

Journal für praktische Chemie von H. Kolbe. N. F. Band V, 6. Heft. Leipzig, 1872; 8⁰.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 9. Graz, 1872; 4⁰.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k.; in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 10. Wien; 8⁰.

Moniteur scientifique. 364ᵉ Livraison. Paris, 1872; 4⁰.

Nature. Nr. 130, Vol. V; Nr. 131, Vol. VI. London, 1872; 4⁰.

Onderzoekingen gedaan in het Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. III. Recks. I, Aflev. 2. Utrecht, 1872; 8⁰.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. VI, Nr. 4. Torino, 1871; 4⁰.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1872, Nr. 7. Wien; 4⁰.

„Revue politique et litteraire" et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger." Iʳᵉ Année (2ᵉ Série), Nrs. 44—45. Paris & Bruxelles, 1872; 4⁰.

Société philomatique de Paris: Bulletin. Tome VIIᵉ. Janvier—Décembre 1871. Paris; 8⁰.

Society, The R. Asiatic, of Great Britain & Ireland: Journal. N. S. Vol. V, Part 2. London, 1871; 8⁰.

Steur, Ch., Ethnographie des peuples de l'Europe avant Jésus-Christ etc. Tome Iᵉʳ. Bruxelles, Paris & Londres, 1872; 4⁰.

Tommasi, Donato, Sur un nouveau dissolvant de l'iodure plombique et de son application à la pharmacie. Paris, 1872; 8⁰. — Action de l'iodure plombique sur quelques acétates métalliques. Paris, 1872; 8⁰. — Sur une combinaison de bioxyde de chrome et de dichromate potassique, dichromate kalichromique. Paris; 4⁰.

Verein, naturhistor.-medizin., zu Heidelberg: Verhandlungen. Band VI, I. Heidelberg; 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 17—18. Wien, 1872; 4⁰.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins. XXIV. Jahrgang, 6. Heft. Wien, 1872; 4⁰.

Note über die Functionen X_n^m und Y_n^m.

Von **Leopold Gegenbauer** in Krems.

Setzt man

$$1)\ X_n^m = \frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{\Pi(n+2m-1)}\left[(x^2-1)^{\frac{2n+m-1}{2}}\right]^{(n+m-1)}$$

$$2)\ Y_n^m = \frac{(-1)^{n+1}\,\Pi(m+2n-1)}{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}\left[(x^2-1)^{-\frac{2n+m+1}{2}}\right]^{(-n-1)}$$

so sind, wie M. Allé gezeigt hat, die Functionen X_n^m und Y_n^m particuläre Integrale der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$3)\qquad (1-x^2)y''-(m+1)xy'+n(n+m)y=0$$

welche für $m=1$ in die bekannte Differentialgleichung der Kugelfunctionen übergeht.

Setzt man, um ein neues particuläres Integral der Gleichung 3) zu finden:

$$4)\qquad y=X_n^m.\int\varphi(x)\,dx$$

so erhält man zur Bestimmung von $\varphi(x)$ die Differentialgleichung erster Ordnung:

$$5)\quad (1-x^2)X_n^m\varphi'(x)+[2[X_n^m]'-(m+1)xX_n^m]\varphi(x)=0$$

Durch Integration dieser Gleichung findet man

$$6)\qquad \varphi(x)=\frac{C}{(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}(X_n^m)^2}$$

und daher ist

$$7)\qquad y = C X_n^m \cdot \int \frac{dx}{(1-x^2)^{-\frac{m+1}{2}} (X_n^m)^2}$$

ein particuläres Integral der Differentialgleichung 3). Da zwischen je drei particulären Integralen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung eine lineare Gleichung bestehen muss, so hat man

$$8)\qquad A X_n^m + B Y_n^m = C X_n^m \cdot \int \frac{dx}{(1-x^2)^{-\frac{m+1}{2}} (X_n^m)^2}$$

wo A, B und C von x unabhängige Grössen sind. Dividirt man die Gleichung 8) durch $B X_n^m$, lässt die willkürliche Integrationsconstante $\frac{A}{B}$ weg und setzt $\frac{C}{B} = D$, so erhält man

$$9)\qquad \frac{Y_n^m}{X_n^m} = D \cdot \int \frac{dx}{(1-x^2)^{-\frac{m+1}{2}} (X_n^m)^2}.$$

Differentiirt man die Gleichung 9) nach x, so entsteht die neue Gleichung:

$$10)\qquad X_n^m [Y_n^m]' - Y_n^m [X_n^m]' = \frac{D}{(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}}.$$

Es ist aber

$$11)\qquad [Y_n^m]' = -\frac{1}{m} Y_{n-1}^{m+2}$$

$$12)\qquad [X_n^m]' = m X_{n-1}^{m+2}$$

und demnach lässt sich die Gleichung 10) auch in folgender Form schreiben:

$$13)\qquad m^2 Y_{n-1}^{m+2} Y_n^m + Y_{n-1}^{m+2} X_n^m = -\frac{Dm}{(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}}.$$

Differentiirt man nun die Gleichung 13) nach x und berücksichtigt

dabei die Formeln 11) und 12), so erhält man

$$14)\quad m^2(m+2)^2 X_{n-2}^{m+4} Y_n^m - Y_{n-2}^{m+4} X_n^m = -\frac{Dm(m-1)(m+2)x}{(1-x^2)^{\frac{m+3}{2}}}.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen 13) und 14) die Constante D, so erhält man die interessante Relation:

$$15)\quad m^2 X_{n-1}^{m+2} Y_n^m + Y_{n-1}^{m+2} = \frac{1-x^2}{(m+1)(m+2)x}$$

$$[m^2(m+2)^2 X_{n-2}^{m+4} Y_n^m - Y_{n-2}^{m+4} X_n^m].$$

Eine merkwürdige Relation findet man, wenn man die Gleichung 10) durch $X_n^m . Y_n^m$ dividirt und die so erhaltene Gleichung

$$16)\quad \frac{[Y_n^m]'}{Y_n^m} - \frac{[X_n^m]'}{X_n^m} = \frac{D}{(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} . X_n^m . Y_n^m}$$

nach x integrirt. Man hat nämlich:

$$17)\quad \log\frac{Y_n^m}{X_n^m} = D\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} X_n^m Y_n^m}$$

oder, wenn man für D den durch die Gleichung 13) gegebenen Werth setzt:

$$18)\quad \int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} X_n^m Y_n^m} = \frac{m[m^2 X_{n-1}^{m+2} Y_n^m + Y_{n-1}^{m+2} X_n^m]}{(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}} \log\frac{X_n^m}{Y_n^m}.$$

Da

$$19)\quad X_\rho^{2\sigma+1} = \frac{2^\sigma \Pi(\sigma)}{\Pi(2\sigma)}[P^{(\rho+\sigma)}]^{(\sigma)}$$

$$20)\quad X_\rho^{2\sigma+1} = \frac{\Pi(2\sigma)}{(-1)^\sigma 2^\sigma \Pi(\sigma)}[Q^{(\rho+\sigma)}]^{(\sigma)}$$

ist, so kann man, wenn

$$21)\quad m = 2s+1$$

gesetzt wird, die Gleichung 15) auch in folgender Form schreiben:

$$22)\quad \frac{2(2s+1)^2\Pi(s+1)\Pi(2s)}{\Pi(s)\Pi(2s+2)}.[P^{(n+s)}]^{(s+1)}.[Q^{(n+s)}]^{(s)} -$$

$$- \frac{\Pi(s)\Pi(2s+2)}{2\Pi(s+1)\Pi(2s)}.[P^{(n+s)}]^{(s)}.[Q^{(n+s)}]^{(s+1)} =$$

$$+ \frac{1-x^2}{2(s+1)(2s+3)x}\Big[\frac{4(2s+1)^2(2s+3)^2\Pi(s+2)\Pi(2s)}{\Pi(s)\Pi(2s+4)}.[P^{(n+s)}]^{(s+2)}.$$

$$.[Q^{(n+s)}]^{(s)} - \frac{\Pi(s)\Pi(2s+4)}{4\Pi(s+2)\Pi(2s)}.[P^{(n+s)}]^{(s)}.[Q(n+s)]^{(s+2)}.$$

Die Gleichung 22) drückt eine bemerkenswerthe, zwischen den Differentialquotienten der Kugelfunctionen erster und zweiter Art bestehende, Relation aus.

Über die Constitution der Flüssigkeiten.

(Beiträge zur Moleculartheorie. II.)

Von Dr. **Alois Handl,**

k. k. Professor in Lemberg.

Über die Art der Bewegungen, von welchen die Wärmezustände der Körper bedingt werden, hat man bis jetzt nur wenige Untersuchungen angestellt; die eigentliche mechanische Wärmetheorie hat sich — und das mit Recht — jeder speciellen Annahme darüber enthalten, und auch sonst sind nur für die gasförmigen Körper von den Herren Krönig [1] und Clausius [2] Ansichten aufgestellt und begründet worden, welche sich des Beifalles der meisten Physiker zu erfreuen hatten, und welche deren Eigenschaften gut zu erklären und eine ziemlich vollkommene Einsicht in das Verhalten ihrer Molecüle zu gewähren im Stande waren. Die Arbeiten von Hrn. Clausius und anderen Physikern haben denn auch viele merkwürdige Wahrheiten auf diesem Gebiete zu Tage gefördert.

Für die flüssigen und festen Körper aber hat man, wie es scheint, noch gar nicht ernstlich versucht, das Verhalten ihrer Molecüle auf eine solche Weise zu erklären, dass diese Erklärung mit der Krönig'- und Clausius'schen Theorie der Gase in Zusammenhang und Übereinstimmung wäre; der letztere hat sich vielmehr einer Ausdrucksweise bedient, welche mehr als eine Beschreibung, denn als eine Erklärung des Verhaltens der Molecüle der genannten Körper angesehen werden kann; und doch musste gerade die Betrachtung der zahlreichen schönen Resultate in der Erweiterung der Kenntnisse über die Beschaffen-

[1] Krönig, Pogg. Ann. 99. 315.
[2] Clausius, Pogg. Ann. 100. 353.

heit der Gase, zu welchen die eifrige Verfolgung der Clausius'schen Theorie geführt hat, zur Ermunterung dienen, auch bei den Körpern der anderen Aggregatzustände ähnliches zu versuchen.

Eine Arbeit von Hrn. Wiener „über das atomistische Wesen des tropfbar flüssigen Körperzustandes“ [1] kann ich in dieser Beziehung nicht gelten lassen, weil sie von der Annahme ausgeht, dass die Körpermolecüle und Äthermolecüle abstossend auf einander einwirken, und weil sie ferner voraussetzt, dass die Schwingungen der Körpertheilchen und der Äthertheilchen unabhängig von einander geschehen, in festen Körpern gleichgerichtet, in flüssigen entgegengesetzt, und weil sie sonst noch manches enthält, was geringe Wahrscheinlichkeit für sich hat und den anderweitig angenommenen Ansichten widerspricht.

Hr. Clausius nun spricht sich folgendermassen aus [2]: „Nach den Betrachtungen über den gasförmigen Zustand bietet sich von selbst die Frage dar, wie sich der feste und flüssige Zustand vom gasförmigen unterscheiden. Obwohl eine in allen Einzelnheiten genügende Definition dieser Zustände eine viel vollständigere Kenntniss des Zustandes der einzelnen Molecüle erfordern würde, als wir bis jetzt besitzen, so glaube ich doch, dass sich einige Hauptunterschiede mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit angeben lassen. Eine Bewegung der Molecüle findet in allen drei Zuständen statt“.

„Im festen Zustande ist die Bewegung der Art, dass sich die Molecüle um gewisse Gleichgewichtslagen bewegen, ohne diese, so lange nicht fremde Kräfte auf sie einwirken, ganz zu verlassen. Die Bewegung lässt sich also bei festen Körpern als eine vibrirende bezeichnen. Indess kann sie doch noch von sehr complicirter Art sein. Erstens können die Bestandtheile eines Molecüles unter sich, und zweitens, die ganzen Molecüle als solche vibriren, und die letzteren Vibrationen können wieder in Hin- und Herbewegungen des Schwerpunktes und in Drehungsschwingungen um den Schwerpunkt bestehen. In solchen Fällen, wo äussere Kräfte auf den Körper wirken, z. B. bei Erschütterun-

[1] Wiener, Pogg. Ann. 118. 79.
[2] A. a. O. 359.

gen, können die Molecüle auch bleibend in andere Lagen kommen".

Ich werde im Folgenden nur von jenen Bewegungen der Molecüle sprechen, welche in Hin- und Herbewegungen ihrer Schwerpunkte bestehen, und von den drehenden Schwingungen derselben, sowie von den Bewegungen ihrer Bestandtheile ganz absehen. Diese Vibrationen des Schwerpunktes werden in den gasförmigen Körpern zu fortschreitenden Bewegungen der Molecüle, und es wird daher wohl gestattet sein, sie der kürzeren Ausdrucksweise wegen auch in festen und flüssigen Körpern schlechtweg als fortschreitende Bewegungen der Molecüle, im Gegensatze zu den Rotationen und den Bewegungen der Bestandtheile derselben zu bezeichnen. Die Berechtigung, von den beiden letzteren Arten der Molecularbewegung vorläufig abzusehen, lässt sich aus dem Satze ableiten, dass in jedem Körper das Verhältniss zwischen den lebendigen Kräften der fortschreitenden Molecularbewegungen und der Bewegungen der Bestandtheile ein constantes ist, wie Hr. Clausius für die Gase bewiesen hat. Dieser Beweis kommt darauf hinaus, dass in einem, sehr viele Molecüle enthaltenden Raume in jedem einzelnen Zeitmomente alle möglichen Arten des Zusammentreffens derselben vorkommen müssen; da nun die Bewegungen der Bestandtheile nur von der Art, wie die Molecüle mit einander zusammenstossen, abhängig sind, so werden sie in jedem Zeitelemente in derselben Weise erzeugt; es muss sich daher die gesammte Bewegung in einem stationären Zustande befinden, in welchem auch die lebendigen Kräfte der beiden bezeichneten Bewegungsarten in einem bestimmten constanten Verhältnisse zu einander stehen [1]. Da sich dieselbe Betrachtung auch auf die Molecüle anderer Körper anwenden lässt, wobei es nur geschehen wird, dass bei jedem Körper ein anderer Werth für dieses constante Verhältniss auftritt, so wird es auch nicht unrecht sein, vorerst nur von den fortschreitenden Bewegungen der Molecüle allein zu sprechen.

„Im flüssigen Zustande", sagt Hr. Clausius weiter, „haben die Molecüle keine bestimmte Gleichgewichtslage mehr. Sie können sich um ihren Schwerpunkt ganz herumdrehen, und auch

[1] Wüllner, Exp. Ph. III. 305.



der Schwerpunkt kann sich ganz aus seiner Lage fortbewegen. Die auseinandertreibende Wirkung der Bewegung ist aber im Verhältnisse zu der gegenseitigen Anziehung der Molecüle nicht stark genug, um die Molecüle ganz von einander zu trennen. Es haftet zwar nicht mehr ein Molecül an bestimmten Nachbarmolecülen, aber es verlässt diese doch nicht von selbst, sondern nur unter Mitwirkung der Kräfte, welche es von anderen Molecülen erleidet, zu denen es dann in dieselbe Lage kommt, wie zu seinen bisherigen Nachbarmolecülen. Es findet also in der Flüssigkeit eine schwingende, wälzende und fortschreitende Bewegung der Molecüle statt, aber so, dass die Molecüle dadurch nicht auseinander getrieben werden, sondern sich auch ohne einen äusseren Druck innerhalb eines gewissen Volumens halten".

Die Verdampfung erklärt Hr. Clausius dann so: er nimmt an, „dass in der Mannigfaltigkeit der Bewegungen der an der Oberfläche einer Flüssigkeit gelegenen Molecüle hin und wieder der Fall eintritt, dass ein Molecül durch ein günstiges Zusammentreffen der fortschreitenden, schwingenden und drehenden Bewegung mit solcher Heftigkeit von seinen Nachbarmolecülen fortgeschleudert wird, dass es, bevor es durch die zurückziehende Kraft derselben seine Geschwindigkeit ganz verloren hat, schon aus ihrer Wirkungssphäre heraus ist, und dann in dem über der Flüssigkeit befindlichen Raume weiter fliegt".

Ich glaube nun, dass man über das Verhalten der Molecüle in flüssigen Körpern eine von der Clausius'schen etwas abweichende Meinung aufstellen, und damit die Eigenschaften der Flüssigkeiten deutlicher erklären kann, und will zur Auseinandersetzung derselben den Weg einschlagen, dass ich zuerst die durch Zusammendrückung erfolgende Bildung einer Flüssigkeit aus einem Dampfe verfolge.

In einem Gase (Dampfe) befinden sich die Molecüle in so grossen mittleren Entfernungen von einander, dass jedes derselben sich durch eine gewisse Wegeslänge mit gleichförmiger Geschwindigkeit und in geradliniger Richtung fortbewegen kann, ehe es in die Wirkungssphäre eines andern kommt; geschieht dieses, so werden in einzelnen, verhältnissmässig seltenen Fällen, wo die Bewegungsrichtungen beider Molecüle in eine einzige gerade Linie zusammenfallen, die beiden mit beschleunigten

Geschwindigkeiten auf einander zugehen, zusammenstossen und als vollkommen elastische Körper wieder aus einander prallen. Nach dem Stosse werden sich bei ihrer Entfernung von einander ihre Geschwindigkeiten in demselben Verhältnisse durch die anziehenden Molecularkräfte vermindern, in welchem sie vor dem Stosse, während der Annäherung, durch dieselbe Ursache vergrössert wurden; und wenn das eine von ihnen die Wirkungssphäre des andern, ruhend gedachten, wieder verlässt, so hat es wieder genau dieselbe relative Geschwindigkeit erlangt, mit welcher es früher in diese Wirkungssphäre eingetreten war. Aber ein solches wirkliches Zusammenstossen der Molecüle kann nur sehr selten vorkommen; meist wird der Fall eintreten, dass die Richtungen der ungestörten Bewegungen zweier Molecüle nahe an einander vorbeigehen würden, und dass diese Molecüle dann in Folge ihrer gegenseitig auf einander einwirkenden Anziehungskräfte in gewissen krummlinigen Bahnen, in einer Art Centralbewegung, um einander herumgehen; sie werden beide aus ihren ursprünglichen Richtungen abgelenkt werden, und jedes von ihnen nach irgend einer anderen Seite fortschreiten, so zwar, dass ihre neuen Bahnen nach dem Austreten aus den betreffenden Wirkungssphären wieder geradlinig sind, und wieder mit der ursprünglichen, constanten Geschwindigkeit durchlaufen werden. Damit ein Gas dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze ziemlich genau folge, ist die Erfüllung der Bedingung nothwendig, dass die geradlinigen Wegeslängen der Molecüle sehr gross seien, im Verhältniss zu den krummlinigen, welche sie zurücklegen, so lange sich eines in der Wirkungssphäre des andern befindet; mit anderen Worten: Die mittleren Entfernungen der Molecüle müssen im Verhältnisse zu den Halbmessern ihrer Wirkungssphären sehr gross sein.

Denken wir uns nun ein Gas unter solchen Umständen, dass seine Temperatur, also die lebendige Kraft oder die Geschwindigkeit seiner Molecüle, immer unverändert dieselbe bleibe nach und nach auf immer kleinere und kleinere Räume eingeschränkt, so werden die geradlinigen Wegesstücke der einzelnen Molecüle immer kürzer und kürzer, während die krummlinigen Antheile ihrer Bahnen, als nur von der Geschwindigkeit abhängig, immer dieselben bleiben; die Abweichungen vom

Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze werden dabei immer grösser und der Druck gegen die einschliessenden Gefässwände immer stärker. Nun muss schon in einem vollkommenen Gase unter allen möglichen Fällen des Zusammentreffens der Molecüle, zwar selten, aber doch von Zeit zu Zeit, auch der vorkommen, dass ein Molecül, nachdem es kaum die Wirkungssphäre des einen Nachbarmolecüles verlassen hat, bereits wieder in die Wirkungssphäre eines anderen gelangt. Dann folgen also zwei krummlinige Wegstücke eines Molecüles unmittelbar auf einander, ohne durch ein geradliniges Wegstück von einander getrennt zu sein; und je dichter das Gas ist, desto häufiger wird dieses Ereigniss eintreten. Hat nun die Dichtigkeit des Gases einen solchen Werth erreicht, dass eine merkliche Anzahl von Molecülen sich, den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit gemäss, jederzeit in dem eben beschriebenen Zustande befindet, so hat die Substanz begonnen, sich aus dem gasförmigen Zustande zum flüssigen zu condensiren, und die obgenannte Anzahl der Molecüle repräsentirt die Menge der aus dem Dampfe niedergeschlagenen Flüssigkeit. Demgemäss könnte man das Verhalten der Molecüle in einem flüssigen Körper folgendermassen definiren: In einem flüssigen Körper haben die Molecüle so grosse Geschwindigkeiten ihrer fortschreitenden Bewegungen, dass die gegenseitigen Anziehungskräfte zweier von ihnen nicht im Stande sind, diese Geschwindigkeiten vollständig aufzuheben, und je zwei Molecüle dauernd beisammen zu erhalten; jedes Molecül geht mit einer erst zunehmenden dann wieder abnehmenden Geschwindigkeit durch die Wirkungssphäre eines andern hindurch, verlässt sie aber, um allsogleich wieder in die Wirkungssphäre eines andern einzutreten; oder es greifen die Wirkungssphären der einzelnen Molecüle in einander, so dass ein Molecül (*A*), ehe es noch die Wirkungssphäre eines andern (*B*) vollständig verlassen hat, schon in die eines dritten (*C*) gelangt, jedenfalls aber vermöge der ihm innewohnenden Geschwindigkeit von der einen dieser Wirkungssphären in die andere hinübergeht. Um diese Annäherung der einzelnen Molecüle bis zu dem Grade zu bewirken, dass ihre Anziehungssphären sich gegenseitig berühren oder durchkreuzen, und das aus ihren Geschwindigkeiten resultirende Bestreben nach Vergrösserung ihrer Entfernungen und Losreissung

von einander zu überwinden, bedarf es (im allgemeinen) einer gewissen Beschränkung des den Molecülen dargebotenen Raumes. Die Erfahrung lehrt, dass in einem unbegrenzten Raume fast alle Flüssigkeiten (durch Verdampfung) sich verlieren; und auch wo dies nicht der Fall ist, da kann man es noch erklären, ohne in Widerspruch mit der gerade ausgesprochenen Ansicht zu gerathen, wie ich alsbald zeigen will.

Meine Meinung unterscheidet sich also von der des Herrn Clausius in Folgendem: Er sagt, die auseinandertreibende Wirkung der Bewegung ist nicht stark genug, die Molecüle ganz von einander zu trennen; ein Molecül verlässt ein anderes benachbartes nicht von selbst, sondern nur unter der Mitwirkung anderer, dasselbe anziehender Molecüle; die Molecüle halten sich auch ohne äusseren Druck in einem bestimmten Volumen zusammen, und die Verdampfung geschieht in Folge des günstigen Zusammentreffens der verschiedenen Arten der Bewegungen, welches eine Vergrösserung der Geschwindigkeiten bewirkt. Ich meine in diesen Punkten fast das Gegentheil von alledem: Die eigene Bewegung der Molecüle ist so stark, dass sie durch die Anziehungskraft eines Nachbarmolecüles nicht mehr aufgehoben, und die Trennung zweier Nachbarn von einander nicht verhindert werden kann; die Molecüle (wenigstens einer Flüssigkeit, welche noch eine merkliche Dampfspannung hat) füllen in der That jedes ihnen dargebotene Volumen vollständig aus, freilich in zweierlei sehr verschiedenen Formen, theils als Flüssigkeit, theils als Dampf. Zum Stattfinden der Verdampfung, glaube ich, bedarf es nur des Umstandes, dass die Richtung der Bewegung eines in der Flüssigkeitsoberfläche befindlichen Molecüls nahezu senkrecht gegen diese Oberfläche sei, damit es, aus der Wirkungssphäre seiner nächsten Nachbarn herausgetreten, nicht wieder in die Wirkungssphären anderer Theilchen der Oberfläche gelange. Man sieht, dass meine Ansicht die Thatsache erklärt, wieso bei derselben Temperatur, also bei gleicher lebendiger Kraft der fortschreitenden Bewegungen der Molecüle, dieselbe Substanz im flüssigen und gasförmigen Zustande existiren kann, während dies unerklärt bleibt, wenn die Molecüle der Flüssigkeit wesentlich langsamere Bewegungen haben als die des Gases oder Dampfes.

Es scheint auf den ersten Blick, als ob sich gegen meine Vorstellungsweise folgende Einwendung erheben liesse: Wenn der flüssige Zustand einer Substanz darin seinen Grund hat, dass die Gastheilchen auf einen hinreichend engen Raum zusammengedrängt sind, und in Folge dessen immer einige von ihnen sich in gewissen hinreichend kleinen Entfernungen von einander befinden müssen, so werden bald diese, bald jene Molecüle in sehr rascher Abwechslung in diese Minimaldistanzen von einander kommen, es müsste also die Substanz sich allenfalls als ein durch den ganzen Raum gleichmässig vertheiltes Gemische von Gas und Flüssigkeit darstellen, dessen Dichtigkeit continuirlich von der des Gases bis zu der der vollkommenen Flüssigkeit anwachsen könnte.

Diese Einwendung ist aber sehr leicht zu widerlegen: Einmal ist in der That die Flüssigkeit, welche sich aus dem in einem grösseren Raume ausgebreiteten Dampfe, sei es wegen einer Druckvergrösserung, sei es wegen einer Temperaturverminderung, niederschlägt, von Anfang an gleichmässig in dem ganzen Raume vertheilt, wie man es an Nebeln und Wolken beobachten kann; zweitens aber ist sehr leicht einzusehen, dass die einmal an einer Stelle zusammengetretenen Molecüle — die daselbst bereits entstandenen, wenn auch noch so kleinen Flüssigkeitsmengen — nicht allsogleich wieder auseinanderstieben können, um an irgend einer anderen Stelle des Raumes wieder ähnliche transitorische Flüssigkeitsmengen entstehen zu lassen; sondern, sobald einmal einige Molecüle sich, wenn auch nur im Vorübergehen, nahe an einander befinden, so bildet die Gruppe derselben schon den Sitz einer stärkeren, auf die übrigen Molecüle wirkenden Anziehungskraft, so dass die grösste Wahrscheinlichkeit dafür besteht, dass in einer solchen Gruppe von Molecülen jederzeit die austretenden Molecüle wieder durch andere neu eintretende ersetzt werden; ja es werden sich solche Gruppen, je grösser sie einmal, sagen wir zufällig, geworden sind, desto leichter durch Zuzüge aus der Nachbarschaft verstärken; sie sinken dabei langsam zum Boden des Gefässes, oder werden durch die Adhäsion zu den Wänden desselben hingezogen, und fliessen endlich in eine einzige Flüssigkeitsmasse zusammen, indem ein constanter Raum mit constanter Dichte von

Molecülen ausgefüllt wird, welche durch Verdampfung und Condensation fortwährend wechseln.

Ein ähnliche Betrachtung vermag auch zur Erklärung der Thatsache zu dienen, dass es Flüssigkeiten ohne merkliche Verdampfung gibt. Ich sage nämlich, im flüssigen Zustande ist die Geschwindigkeit der Molecüle so gross, dass sie durch die gegenseitige Anziehung zweier von ihnen nicht aufgehoben werden kann. Damit ist aber die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass sich bei gewissen Flüssigkeiten jedes Molecül in den Wirkungssphären mehrerer Nachbarmolecüle zugleich befinde, und dass die gemeinschaftliche Wirkung derselben das leiste, was ein einzelnes nicht zu bewirken vermöchte, die Verhinderung der Verdampfung.

Die vorgetragene Ansicht über das Verhalten der Molecüle in einer Flüssigkeit gibt deutlicher als eine andere eine vollständige Einsicht in die Ursache für die leichte Verschiebbarkeit der Theilchen und für das Princip der nach allen Richtungen hin gleichmässigen Fortpflanzung eines von aussen her ausgeübten Druckes. Denn ein solcher Druck besteht immer in dem Bestreben, den Molecülen der unmittelbar gedrückten Fläche eine gewisse Geschwindigkeit nach einer bestimmten Richtung hin zu ertheilen; diese Geschwindigkeit wird nicht nur, wegen der elastischen Eigenschaften der Molecüle, auf die anderen übertragen, sondern die ursprünglich übereinstimmenden Bewegungsrichtungen derselben werden in der kürzesten Zeit in andere, nach allen möglichen Richtungen hin gewendete, verwandelt, ohne dass dabei etwas von der Geschwindigkeit verloren ginge; die ursprünglich nur in einer Richtung von den Molecülen empfangenen Stösse äussern sich also in allen möglichen Richtungen wieder; und zwar da jedes Molecül mit gleicher durchschnittlicher Geschwindigkeit wie alle anderen begabt ist, auch bei gleicher Zahl der Molecüle, d. h. bei gleicher Grösse der gedrückten Fläche, in einer überall gleichen Intensität.

Ferner lehrt die Erfahrung, dass die Spannkraftsmaxima der Dämpfe mit steigenden Temperaturen zunehmen, mit anderen Worten: je grösser die Geschwindigkeiten der Molecüle sind, desto kleiner muss (ohne dass das Gesetz dieses Zusammenhanges schon genauer bestimmt wäre) das Volumen werden, damit

der Übergang der Substanz aus dem gasförmigen in den flüssigen Zustand eintrete. Diese Thatsache lässt sich folgendermassen erklären: Die Condensation tritt ein, sobald unter den sehr vielen verschiedenen Abständen der Molecüle von einander fortwährend eine gewisse Anzahl gefunden wird, deren Grössen kleiner sind als der Halbmesser der Wirkungssphäre eines Molecüls. Nun hat die relative Geschwindigkeit, mit welcher sich ein Molecül gegen das andere bewegt, sicherlich auch einen bestimmenden Einfluss auf die Gestalt der Bahn, in welcher es dessen Wirkungssphäre durchschneidet, somit auch auf die relative Dauer des Verweilens in derselben; je grösser jene Geschwindigkeiten, desto kürzer sind die von einem Molecül in der Wirkungssphäre des anderen zurückgelegten krummlinigen Wege, und desto geringer wird also die Wahrscheinlichkeit, dass sich zu einer gegebenen Zeit ein Molecül gerade auf einem solchen Wege befinden werde; diese Wahrscheinlichkeit muss also durch Verkürzung der geradlinigen Wegesstücke, d. h. durch Verminderung des Volumens, wieder auf den ursprünglichen Werth gebracht werden; und so kommt es, dass bei höheren Temperaturen eine stärkere Volumsverminderung, d. h. ein stärkerer Druck zur Herbeiführung des Sättigungszustandes der Dämpfe erforderlich ist.

Auch das Freiwerden von Wärme bei der Condensation der Dämpfe lässt sich auf folgende Art erklären: Die Temperatur des Dampfes ist bedingt durch die mittlere lebendige Kraft der Molecüle; ist der Dampf noch über seinem Condensationspunkte, so ist hauptsächlich die constante Geschwindigkeit, mit welcher die Molecüle die ausserhalb ihrer gegenseitigen Wirkungssphären gelegenen Wegesstrecken durchlaufen, von Einfluss auf die Grösse dieser lebendigen Kräfte. So lange aber zwei Molecüle sich innerhalb ihrer gegenseitigen Wirkungssphären befinden, ist die Geschwindigkeit ihrer Bewegung eine bedeutend grössere; beim Übergang in den flüssigen Zustand also, wo dies beständig der Fall ist, vergrössert sich thatsächlich die mittlere lebendige Kraft der Molecüle durch die Wirkung der zwischen ihnen thätigen Anziehungskräfte, ihre Temperatur steigt also, es ist Wärme frei geworden. Umgekehrt: beim Verdampfen eines Molecüls aus der Flüssigkeit wird seine Geschwindigkeit durch die zurückziehende

Wirkung der Flüssigkeitsoberfläche vermindert, so dass zunächst der neugebildete Dampf eine niedrigere Temperatur haben müsste als die Flüssigkeit. Diese Temperaturverschiedenheit zwischen Dampf und Flüssigkeit wird aber durch die Berührung derselben mit einander alsbald ausgeglichen; die Flüssigkeit gibt dabei so viel Wärme ab, als zur Herstellung des neuen Gleichgewichtes der Temperaturen erforderlich ist, und die ohne Abgabe einer Wärmemenge nach aussen hin eingetretene Temperaturverminderung entspricht demnach einem Verbrauche an Wärme.

Während, diesen Betrachtungen zufolge, der Unterschied zwischen flüssigen und gasförmigen Körpern hauptsächlich durch das ihren Molecülen zur Verfügung stehende Volumen bedingt ist, und die Temperatur gewissermassen nur einen secundären Einfluss darauf hat, ist die Verschiedenheit im Verhalten der Theilchen fester und flüssiger Körper im Gegentheile wesentlich durch die Temperatur bedingt, und der äussere Druck oder das in Folge desselben veränderte Volumen vermögen nur in unmittelbarer Nähe des Schmelzpunktes einen Übergang des einen dieser Aggregationszustände in den andern zu bewirken.

In einem festen Körper nämlich, stelle ich mir vor, sind die Geschwindigkeiten der fortschreitenden Bewegungen der Molecüle so klein, dass sie durch die Anziehungskräfte, welche je zwei Nachbartheilchen auf einander ausüben, vollständig aufgehoben werden können. Der Schmelzpunkt eines festen Körpers ist demnach jene Temperatur, bei welcher die Geschwindigkeiten der Molecüle schon so gross sind, dass sie gerade erst beim Anlangen an der Grenze der Wirkungssphären vollkommen aufgehoben wären.

Denken wir uns zwei einzelne Molecüle frei neben einander, so könnten sie nur den festen oder gasförmigen Zustand repräsentiren, je nachdem die Geschwindigkeiten, mit denen sie sich gegen einander bewegen, unter oder über der dem Schmelzpunkt entsprechenden Grenze gelegen sind. Die von Herrn Clausius als Ursache der Verdampfung von Flüssigkeiten angenommene günstige Combination von fortschreitenden, drehenden und oscillirenden Bewegungen der Molecüle wäre wohl bei jenen festen Körpern vorauszusetzen, bei welchen ein unmittelbarer Übergang

aus dem festen in den gasförmigen Zustand, ohne Dazwischentreten eines durch eine allgemeine Temperaturserhöhung bewirkten Schmelzens stattfindet.

Auch der Wärmeverbrauch beim Schmelzen eines festen Körpers wird auf eine wesentlich andere Weise zu Stande kommen, als der beim Verdampfen; es ist nicht unwahrscheinlich, dass im Innern einer Flüssigkeit, bei den grösseren Geschwindigkeiten und den fortwährenden Veränderungen in den gegenseitigen Stellungen der Molecüle, auch die Drehungen und inneren Schwingungen derselben stärkere werden; und es ist leicht begreiflich, wenn das Verhältniss der lebendigen Kräfte der Bewegungen der Bestandtheile zu den lebendigen Kräften der fortschreitenden Bewegungen der Molecüle in den Flüssigkeiten einen grösseren Zahlenwerth hat als in den festen Körpern. Dies ist wieder in Übereinstimmung mit der Meinung von Hrn. Clausius, dass die Molecüle eines festen Körpers in drehenden Schwingungen, die Molecüle einer Flüssigkeit dagegen in vollkommenen Rotationen um irgend welche Axen begriffen seien. Die Wärme also, welche ein Körper beim Schmelzen verbraucht, wird zu der beim Übergange aus dem festen in den flüssigen Zustand stattfindenden discontinuirlichen Erhöhung der lebendigen Kraft der drehenden und inneren Bewegungen der Molecüle verwendet.

Über den Einfluss der Electricität der Sonne auf den Barometerstand.

Von **Carl Hornstein**,
Director der k. k. Sternwarte in Prag.

Mit 1 Tafel.

Schon vor nahe dreissig Jahren hat Herr Prof. v. Lamont zur Erklärung der täglichen Variationen des Erdmagnetismus die Hypothese aufgestellt, dass die Sonne electrisch sei und hinreichend kräftig, um in unserer Atmosphäre, durch Induction, einen gewissen electrischen Zustand hervorzurufen, eine Art electrischer Welle, welche durch die tägliche Rotation in 24 Stunden über die ganze Oberfläche der Erde hinwegzieht. Später wurde er durch eine Erscheinung von ganz anderer Art, nämlich die täglichen Oscillationen des Barometers, zu derselben Hypothese hingeleitet. Diese Oscillationen zeigen nämlich, ähnlich der Ebbe und Fluth des Meeres, im Verlaufe eines Tages zwei Maxima und zwei Minima. Entwickelt man, mit Hilfe der für die einzelnen Beobachtungsstunden gewonnenen Monat- oder Jahresmittel, den Barometerstand in eine periodische Reihe, welche nach den Sinus der Vielfachen des Stundenwinkels fortschreitet; so tritt, im Gegensatze zu anderen ähnlichen Reihen, das vom einfachen Stundenwinkel abhängige Glied, welches vornehmlich der jährlichen Temperatur-Änderung seinen Ursprung verdankt, gegenüber dem beträchtlichen nachfolgenden, vom doppelten Stundenwinkel abhängigen Gliede, in den Hintergrund. Lamont bemerkt daher auch treffend bezüglich dieses zweiten Gliedes:

„Ich habe die Überzeugung, dass die Ebbe und Fluth der Atmosphäre (nämlich dieses zweite Glied) nicht etwa eine mathematische Form ist, wodurch ein Theil einer complicirten

Bewegung dargestellt wird, sondern dass sie in der Wirklichkeit besteht und durch die Anziehung oder eine der Anziehung analoge Kraft der Sonne hervorgebracht wird" [1].

In einem Briefe an Quetelet vom 5. August 1859 versucht Lamont noch nachzuweisen, dass der Coëfficient des Ebbe- und Fluthgliedes, den ich im Folgenden mit *k* bezeichnen werde, (wie die Meeresfluth) gegen die Pole hin abnimmt, und ausgehend von der Voraussetzung, dass diese Ebbe und Fluth der Atmosphäre eine Wirkung der Sonne sei, zeigt er, dass sie weder durch die Gravitation, noch durch die Änderungen des Dunstdruckes hervorgebracht werde. Es müsse also der Sonne noch eine andere Kraft innewohnen, welche, sowie die Gravitation, bewirkt, dass auf zwei einander diametral gegenüberstehende Punkte der Atmosphäre die gleiche Wirkung ausgeübt werde. Nur die Electricität ist eine solche Kraft; wenn die Sonne sehr stark positiv elektrisch gedacht wird, so kann eine Welle von der oben erklärten Beschaffenheit im Luftmeere der Erde erzeugt werden.

In den Wochenberichten der Münchener Sternwarte kommt Lamont noch öfters auf die Hypothese von der electrischen Kraft der Sonne zurück. So z. B. in Nr. 13 (September 1865) in einem Aufsatze: „Über die Berechnung des mittleren Barometerstandes", wo er sagt: „Wir beschliessen diesen Aufsatz mit der Hinweisung auf die merkwürdigen Analogien, welche zwischen der täglichen Bewegung des Barometers und den täglichen Variationen des Erdmagnetismus (welchen beiden Phänomenen, wie wir früher gezeigt haben, eine electrische Kraft der Sonne theilweise zu Grunde liegen könnte), zu bestehen scheinen, u. s. w."

In Nr. 28 (Jänner 1866) gibt Lamont eine Zusammenstellung seiner Ideen über die Electricität und ihre kosmische Bedeutung, nämlich: 1. Die Electricität ist eine kosmische Kraft; jeder Planet besitzt eine gewisse Menge davon, die Sonne in hervorragendem Masse. 2. Die Sonne hat positive Electricität, die Erde negative. 3. Die Erde hat einen inductionsfähigen Kern

[1] Annalen der Münchener Sternwarte. III. Supplement-Band. 1859.



(wie schon Herr Sabine aus Beobachtungen nachgewiesen hat), u. s. w.

Ich habe schon seit längerer Zeit darüber nachgedacht, ob sich nicht aus den Beobachtungen ein Beweis herstellen lasse, dass das Ebbe- und Fluthglied wirklich der Electricität der Sonne seinen Ursprung verdankt, und ob die Beobachtungen nicht noch andere Oscillationen des Barometerstandes anzeigen, welche aus derselben Quelle stammen. Es scheint mir nun, dass ein solcher Beweis hergestellt sei, wenn eine innige Beziehung zwischen den täglichen oder anderen Schwankungen des Luftdruckes und den Perioden der Sonnenflecken und Nordlichter als Thatsache nachgewiesen werden kann. Die vorliegende Arbeit soll nun über diesen Gegenstand ein helleres Licht verbreiten und ich glaube, mich keiner Illusion hinzugeben, wenn ich behaupte, dass die in den folgenden Blättern zu Tage geförderten Thatsachen von weitreichender Bedeutung für die fernere Entwicklung der Meteorologie werden dürften.

Es ist bekannt, dass sowohl die Sonnenflecke als die Nordlichter ausser der 11jährigen Periode noch eine Periode von längerer Dauer zu haben scheinen. Die graphische Darstellung beider Erscheinungen, welche auf der dieser Abhandlung beigefügten Tafel enthalten ist, gibt durch die Ordinaten der betreffenden Curven die Zahl der in jedem Jahre seit 1739 beobachteten Nordlichter und die Zahl der beobachteten Sonnenflecke. Bei den Nordlichtern wurde die von Herrn Prof. Elias Loomis in seiner interessanten Schrift: Comparison of the mean daily range of the Magnetic Declination with the number of Auroras observed each year etc. (New Haven 1870) gegebene Zusammenstellung der Summen der in Europa und Amerika beobachteten Nordlichter benützt. Die Zahl der Sonnenflecke ist nach den aus Herrn Prof. R. Wolf's vortrefflichen Arbeiten sich ergebenden Resultaten [1] eingetragen.

Auf den ersten Blick sieht man aus der graphischen Darstellung, dass die Zeit von 1740 bis jetzt sehr nahe der doppelten längeren Periode gleichkommt, und wiewohl man noch nicht mit Gewissheit einen gleich regelmässig periodischen Gang

[1] R. Wolf, Astronomische Mittheilungen, Nr. I bis XXVIII.

beider Erscheinungen auch für die Zukunft annehmen kann, so hat doch diese Annahme wenigstens eine sehr grosse Wahrscheinlichkeit für sich. Es ist für das nachfolgende wichtig, die Dauer dieser längeren Periode aus den vorliegenden Beobachtungsdaten näher kennen zu lernen. Zu diesem Ende habe ich zuerst die Nordlichter und Sonnenflecke getrennt untersucht, und den Werth der längeren Periode (T) nach derselben Methode abgeleitet, welche ich in meiner Abhandlung: Über die Abhängigkeit des Erdmagnetismus von der Rotation der Sonne (Sitzungsberichte 1871, Juni) zur Ermittlung der synodischen Rotation der Sonne aus den Angaben der magnetischen Instrumente in Anwendung gebracht habe. Aus den Polarlichtern fand ich vorläufig

$$T = 65^3/_4 \text{ Jahre}$$

und die Zahl der Nordlichter

$$29 \cdot 0 + 24 \cdot 6 \sin (y + 215°),$$

wo $y = 0$ ist im Jahre 1740. Das Maximum der Anzahl Nordlichter fällt auf die Jahre 1783 und 1849. — Ebenso fand ich mit Hilfe der Wolf'schen Relativzahlen (von 1740—1870) für die längere Sonnenfleckenperiode vorläufig

$$T = 74^1/_2 \text{ Jahre}$$

und für die Zahl der Sonnenflecke

$$37 \cdot 3 + 17 \cdot 5 \sin (y + 279°).$$

wo ebenfalls $y = 0$ ist im Jahre 1740. Das Maximum der Anzahl Sonnenflecke fällt auf 1775 und 1850. Es ist aus der Natur der in Anwendung gebrachten Methode klar, dass diese Resultate nur den m i t t l e r e n Gang beider Erscheinungen darstellen, abgesehen von den in der kürzeren ($11^1/_9$jährigen) Periode vor sich gehenden Schwankungen, und man wird wohl trotz des Unterschiedes von 9 Jahren in den obigen Werthen von T, der nur in der Unsicherheit der bisher vorliegenden Beobachtungsdaten seinen Grund haben dürfte, namentlich wegen der schönen Übereinstimmung der letzten Maxima (1849 und 1850) die Annahme: d a s s P o l a r l i c h t e r u n d S o n n e n f l e c k e n g l e i c h z e i t i g d a s M a x i m u m o d e r M i n i m u m e r r e i c h e n, a l s o a u c h d i e g l e i c h e l ä n g e r e P e r i o d e T b e s i t z e n, als eine

naturgemässe und mit den Beobachtungen nicht im Widerspruche stehende ansehen können. Daher schien es mir wünschenswerth, durch Zusammenfassen beider Erscheinungen einen genaueren Werth von T zu erhalten und auf demselben Wege auch die gemeinsame Epoche eines der letzten Maxima festzustellen.

Sowohl die Zahl der Nordlichter als die der Sonnenflecke wurde immer unter der einfachen, bei dem gegenwärtig zu erreichenden Grade von Genauigkeit auch genügenden Form $M+a \sin(y+A)$ vorausgesetzt, wo $y=0$ ist im Jahre 1740 und die jährliche Zunahme von $y \ldots . \frac{360°}{T}$ beträgt. M, a, A sind aus den Beobachtungen zu bestimmen und vom Winkel A hängt die Epoche des Maximums ab. Unter den verschiedenen Arten der Combination beider Erscheinungen habe ich die einfachste als genügend befunden; ich habe nämlich für jedes Jahr die Summe aus der Zahl der beobachteten Nordlichter und Sonnenflecke gebildet. Es scheint nicht, dass man hierdurch der einen Erscheinung gegenüber der anderen ein zu grosses Gewicht beilegt; denn sind auch die Zahlen in der Tabelle der Polarlichter häufig als wenig sicher anzusehen, so darf nicht vergessen werden, dass viele der Wolf'schen Relativzahlen, wegen Mangel an Sonnenfleckenbeobachtungen in den betreffenden Jahren, durch Interpolation ergänzt sind, während auch noch mehrere andere von Wolf selbst als nicht sehr sicher bezeichnet werden. Es fand sich nun

für $T=50$ Jahre	$a=26\cdot06$	$A=112°\ 10'$
55 „	33·81	148 39
60 „	36·14	180 56
65 „	38·82	218 29
70 „	41·40	250 3
75 „	41·78	275 5
80 „	35·65	297 18

und hieraus, wenn zur Abkürzung $\frac{T-65}{5}=\tau$ gesetzt wird,

$$a=40\cdot02+1\cdot7882\tau-0\cdot9446\tau^2$$

und für das Maximum von a: $\tau = +0{\cdot}9465$, also

$$T = 69{\cdot}73 \text{ Jahre},$$

wofür ich im Folgenden der Einfachheit wegen $T = 70$ Jahre setzen werde. Die in den bisherigen Beobachtungen hervortretende längere Periode der Polarlichter und Sonnenflecke beträgt daher nahe 70 Jahre. Für $T = 70$ ist $A = 250°$. — Vielleicht ist die kürzere Sonnenflecken-periode (nach Wolf $11^1/_9$ Jahre) genau $^1/_6$ der längeren.

Indem ich nun wieder die Polarlichter und Sonnenflecke getrennt in Rechnung zog, legte ich die eben gefundenen, gemeinsamen Werthe von T und A zu Grunde und fand:

Zahl der Polarlichter $= 27{\cdot}8 + 24{\cdot}1 \sin(y + 250°)$
Zahl der Sonnenflecke $= 39{\cdot}1 + 17{\cdot}2 \sin(y + 250°)$.

Die folgende Tafel ist nach diesen beiden Formeln berechnet.

Jahr	Nordlichter	Sonnenflecke
1740	5	23
50	7	24
60	25	37
70	45	51
80	52	56
90	41	48
1800	20	34
10	5	23
20	7	24
30	25	37
40	45	51
50	52	56
60	41	48
70	20	34
80	5	23

Den Zahlen dieser Tafel entsprechen die beiden punktirten Curven in der beigefügten graphischen Darstellung. Diese Curven stellen den mittleren Verlauf beider Erscheinungen ganz genügend dar.

Ich gehe nun zur Betrachtung des Ebbe- und Fluthgliedes der Atmosphäre über, dessen Coëfficient oben k

genannt wurde. Für Prag und München ist der Werth dieses Coëfficienten nur ungefähr $^1/_{10}$ einer Pariser Linie. Ungeachtet der Kleinheit dieser Grösse habe ich doch versucht, genaue Untersuchungen über die etwaigen Änderungen anzustellen, welche *k* von Jahr zu Jahr erfährt. Ich habe mich aber dabei nur auf solche Beobachtungsorte beschränkt, an welchen der Barometerstand seit einer längeren Reihe von Jahren entweder von Stunde zu Stunde, oder wenigstens von zwei zu zwei Stunden (auch während der Nacht) aufgezeichnet wird. Unter diesen Orten sind besonders Prag und München, von welchen bereits seit 30 Jahren stündliche Beobachtungen des Barometerstandes vorliegen, dann auch Oxford zu nennen. Wo für die einzelnen Beobachtungsstunden Jahresmittel schon berechnet waren, wurde aus diesen für jedes einzelne Jahr das Ebbe- und Fluthglied ermittelt. Wenn nur Monatmittel vorhanden waren, wurde die Rechnung für jeden einzelnen Monat ausgeführt. Der Anhang zu dieser Abhandlung enthält die Resultate dieser Rechnung, nämlich den Coëfficienten *k* und den constanten Theil des Argumentes des Fluthgliedes, der zum doppelten Stundenwinkel der Sonne (mittlere Zeit) hinzuzufügen ist. Aus dieser Zusammenstellung ergaben sich nachstehende Werthe des Coëfficienten *k* in Pariser Linien, für Oxford in englischen Linien.

Jahr	Coëfficient *k*			Jahr	Coëfficient *k*		
	Prag	München	Oxford		Prag	München	Oxford
1841	...	0‴115	...	1857	0‴118	0‴102	...
1842	0‴117	0·118	...	1858	0·113	0·103	0‴129
1843	0·122	0·117	...	1859	0·110	0·109	...
1844	0·107	0·111	...	1860	0·102	0·098	0·121
1845	0·122	0·121	...	1861	0·108	0·106	0·133
1846	0·108	0·118	...	1862	0·094	0·098	0·112
1847	0·109	...	...	1863	0·080	0·105	0·123
1848	0·103	0·105	...	1864	0·088	0·103	0·117
1849	0·085	0·102	...	1865	0·100	0·102	0·118
1850	0·092	0·125	...	1866	0·094	0·085	0·123
1851	0·097	0·114	...	1867	0·087	...	0·118
1852	0·113	0·111	...	1868	0·098	...	0·139
1853	0·100	0·097	...	1869	0·105	...	...
1854	0·112	0·115	...	70	0·104	...	...
1855	0·111	0·095	...	71	0·085	...	...
1856	0·111	0·099	...				

Die in dieser Tabelle enthaltenen Zahlen für Prag und München sind auf der beigegebenen Tafel graphisch dargestellt, oberhalb der Curve der Polarlichter. Für beide Beobachtungsorte zeigt sich gegenwärtig eine Abnahme des Coëfficienten k. Indem ich nun diesen Coëfficienten wieder als periodische Function von der Form

$$k = M + a \sin(y + A)$$

voraussetzte, erhielt ich für verschiedene Annahmen der Periode T des Winkels y folgende Resultate:

T	Prag			München		
	a	A	Max. von k	a	A	Max. von k
60	0"015	139° 32'	1852	0"008	218° 59'	1839
65	0·017	191 1	1852	0·008	271 32	1837
70	0·019	235 16	1852	0·009	316 27	1836
75	0·022	273 32	1852	0·009	355 0	1835

Das Maximum von k fällt also im Mittel aus Prag und München und fast unabhängig von T auf das Jahr 1844 oder 1845, während nach dem Vorhergehenden das Maximum der Polarlichter und Sonnenflecken im Jahre 1849 stattfindet, ein Zusammentreffen, welches wohl auf eine Beziehung von k zur Periode der Polarlichter hinzudeuten scheint. Setzt man daher $T = 70$ Jahre und berechnet noch M, so hat man vorläufig

für Prag: $k = 0"090 + 0"019 \sin(y + 235°)$

für München: $k = 0 \cdot 107 + 0 \cdot 009 \sin(y + 316)$.

Es ist bemerkenswerth, dass der bei den Nordlichtern und Sonnenflecken, für $T = 70$ Jahre, gefundene Werth von A, nämlich 250°, zwischen 235° und 316° hineinfällt. Macht man also auch hier die Annahme, dass nebst $T = 70$ auch noch $A = 250°$ ist, d. h. dass das Maximum von k immer gleichzeitig mit dem der beiden andern öfter genannten Erscheinungen stattfindet, so erhält man zur definitiven Bestimmung von M und a folgende Gleichungen:

Für Prag:	1843	$M + 0\cdot87\,a - 0\text{'''}117 = 0$
	1848	$M + 1\cdot00\,a - 0\cdot099 = 0$
	1853	$M + 0\cdot93\,a - 0\cdot107 = 0$
	1858	$M + 0\cdot69\,a - 0\cdot111 = 0$
	1863	$M + 0\cdot31\,a - 0\cdot094 = 0$
	1868	$M - 0\cdot14\,a - 0\cdot096 = 0$
Für München:	1843	$M + 0\cdot87\,a - 0\cdot116 = 0$
	1848	$M + 1\cdot00\,a - 0\cdot112 = 0$
	1853	$M + 0\cdot93\,a - 0\cdot106 = 0$
	1858	$M + 0\cdot69\,a - 0\cdot102 = 0$
	1863	$M + 0\cdot31\,a - 0\cdot100 = 0$

und hieraus ergibt sich, indem in jedem Systeme die Summe der Fehler gleich Null gemacht wird,

für Prag: $k = 0\text{'''}097 + 0\text{'''}012 \sin(y + 250°)$
für München: $k = 0\cdot093 + 0\cdot018 \sin(y + 250)$,
$y = 0$ i. J. 1740.

Es darf nicht übersehen werden, dass durch die Annahme desselben Werthes für A, nämlich 250°, für beide Beobachtungsorte, sowohl die constanten Glieder, als auch die Coëfficienten von $\sin(y + 250°)$ unter sich viel näher übereinstimmen, als in den früheren vorläufigen Formeln für k. In der That betragen die Unterschiede von M und a in den zuletzt erhaltenen Formeln beziehungsweise nur $\frac{4}{1000}$ und $\frac{6}{1000}$ einer Pariser Linie. Es kann daher der Satz ausgesprochen werden:

Die aus den stündlichen Barometer-Beobachtungen seit 1841 von Jahr zu Jahr sich ergebenden Werthe des Coëfficienten k des atmosphärischen Ebbe- und Fluthgliedes für Prag und für München werden sehr befriedigend dargestellt durch die Voraussetzung, dass k die längere (70jährige) Periode mit den Polarlichtern und Sonnenflecken gemein hat und gleichzeitig mit diesen Erscheinungen sein Maximum oder Minimum erreicht.

Die punktirten Curven in der obersten Abtheilung der beigegebenen graphischen Darstellung zeigen den nach den letzten

Formeln sich ergebenden **mittleren** Gang des Coefficienten k in Prag und München. Die Curven sind bis 1880 fortgesetzt.

Die Beobachtungen in Oxford umfassen nur einen mässigen Zeitraum, stehen aber mit dem oben erhaltenen Resultate im Einklange.

Es drängt sich nun die Frage auf: Enthält das eben gefundene Resultat die einzige Beziehung, welche zwischen den Änderungen des Barometerstandes und den Vorgängen auf der Sonne stattfindet? — Dem ist nicht so; indessen möchten wohl jene Grössen, welche weitere analoge Beziehungen erkennen lassen, zum grössten Theile nur durch weitläufige und mühevolle Rechnungen zu erhalten sein. Es gibt jedoch eine Gattung von Änderungen des Luftdruckes, aus welchen eine Beziehung zwischen dem Barometerstande und den Vorgängen auf der Sonne ohne weitere subtile Untersuchungen hervortritt, nämlich: **die jährliche Schwankung des Barometers** oder der Unterschied zwischen dem höchsten und tiefsten Stande des Barometers während des Jahres. Im Anhange stelle ich diese Grösse für Prag, Mailand, Wien und München zusammen, und zwar für Prag von 1800—1871, für Mailand von 1763—1850, für Wien von 1775—1869, und für München von 1825—1866. Die graphische Darstellung enthält in ihrer unteren Abtheilung die vier Curven, welche diesen vier Beobachtungsreihen entsprechen. Ein Blick auf eine dieser Curven, namentlich die für Mailand, zeigt in überraschender Weise in ihrem Verlaufe einen so engen Zusammenhang mit der Curve der Polarlichter, dass sie der Hauptsache nach fast nur als eine Wiederholung der letzteren Curve zu betrachten ist. Auch ist im Gange dieser vier Curven der Barometerschwankungen, die 70jährige Periode deutlich zu erkennen. Zum Behufe einer genaueren Untersuchung habe ich die jährliche Schwankung des Luftdruckes gleichfalls unter der Form

$$M + a \sin (y + A)$$

vorausgesetzt, und den **mittleren** Gang derselben für jeden der vier Beobachtungsorte unter der Annahme berechnet, dass die Periode $T = 70$ Jahre und der Werth $A = 250°$ auch für diese Gattung von Erscheinungen gelte. Ich fand nun folgende

Gleichungen, von denen ich jedoch der Kürze wegen nur die für Prag anführe:

1802	M	$-0\cdot49\,a$	$-15^{\prime\prime\prime}35$	$=0$
1807	M	$-0\cdot82\,a$	$-18\cdot28$	$=0$
1812	M	$-0\cdot99\,a$	$-15\cdot66$	$=0$
1817	M	$-0\cdot96\,a$	$-17\cdot07$	$=0$
1822	M	$-0\cdot74\,a$	$-19\cdot55$	$=0$
1827	M	$-0\cdot39\,a$	$-17\cdot46$	$=0$
1832	M	$+0\cdot05\,a$	$-16\cdot71$	$=0$
1837	M	$+0\cdot49\,a$	$-17\cdot74$	$=0$
1842	M	$+0\cdot82\,a$	$-18\cdot35$	$=0$
1847	M	$+0\cdot99\,a$	$-18\cdot53$	$=0$
1852	M	$+0\cdot96\,a$	$-18\cdot91$	$=0$
1857	M	$+0\cdot74\,a$	$-19\cdot64$	$=0$
1862	M	$+0\cdot39\,a$	$-17\cdot81$	$=0$
1867	M	$-0\cdot05\,a$	$-17\cdot83$	$=0$ u. s. f.

Mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, und indem in jedem der vier Systeme von Gleichungen die Summe der Fehler gleich 0 gemacht wurde, ergab sich:

Jährliche Schwankung des Barometerstandes:

für Prag	$17^{\prime\prime\prime}78+0^{\prime\prime\prime}86 \sin(y+250^\circ)$
„ Mailand	$15\cdot88+0\cdot48 \sin(y+250\ \ )$
„ Wien............	$16\cdot39+1\cdot01 \sin(y+250\ \ )$
„ München	$15\cdot29+1\cdot67 \sin(y+250\ \ )$.

Nach diesen vier Formeln sind die vier punctirten Curven eingezeichnet, welche den mittleren Gang der jährlichen Schwankung darstellen. Die merkwürdige Harmonie dieser Curven mit den unregelmässigen, aus den Beobachtungen erhaltenen, erlaubt wohl den nachfolgenden Satz als unzweifelhaft aufzustellen:

Die aus den Beobachtungen seit 1763 erhaltenen Werthe der jährlichen Schwankung des Barometerstandes in Prag, Mailand, Wien und München werden sehr befriedigend dargestellt durch die Voraussetzung, dass die jährliche Schwankung des Luftdruckes die längere (70jährige) Periode mit den Nordlichtern und Sonnenflecken gemein hat und gleich-

zeitig mit diesen Erscheinungen ihr Maximum oder Minimum erreicht.

Ich kann zum Schlusse mir nicht versagen, die Bemerkung beizufügen, dass während der Ausführung dieser Arbeit mit immer grösserer Bestimmtheit der Gedanke in den Vordergrund trat, dass die 70jährige Periode der Polarlichter, Sonnenflecke u. s. w., soweit unsere bisherigen Beobachtungen reichen, als die Hauptperiode anzusehen sei, während die $11^{1}/_{3}$jährige Wolf'sche Periode nur bei einzelnen dieser Erscheinungen sich geltend macht, bei anderen aber ziemlich zurücktritt. Ich spreche dies jedoch nur als eine Vermuthung aus, die erst durch weitere Beobachtungen ihre Bestätigung finden kann.

ANHANG.

I. Ebbe- und Fluthglied.

Dasselbe hat die Form: $k \sin(30n + A)$, wo n die mittlere Zeit, in Stunden ausgedrückt, bedeutet. Die folgende Zusammenstellung enthält die Werthe von k und A aus den Barometer-Beobachtungen (zu den geraden Stunden 0^h 2^h 4^h u. s. f.) in Prag und München.

Prag.

	1842			1843			1844		
Jänner	0‴111	159°	42'	0‴105	176°	49'	0‴071	151°	6'
Februar	0·118	156	19	0·152	98	45	0·070	161	55
März	0·075	135	32	0·145	166	6	0·159	161	0
April	0·117	150	2	0·137	146	2	0·126	140	3
Mai	0·135	153	39	0·115	125	25	0·124	118	27
Juni	0·088	134	44	0·110	126	3	0·089	103	6
Juli	0·105	141	17	0·100	139	59	0·092	132	34
August	0·129	146	47	0·119	155	32	0·118	162	43
September	0·132	146	51	0·124	145	56	0·120	145	8
October	0·168	144	35	0·129	172	14	0·138	145	49
November	0·123	136	23	0·131	165	58	0·077	167	28
December	0·105	128	8	0·094	148	6	0·102	146	44

	1845			1846			1847		
Jänner	0‴105	127°	15'	0‴079	153°	7'	0‴085	88°	3'
Februar	0·133	160	40	0·118	151	23	0·119	169	54
März	0·136	133	57	0·098	134	40	0·122	116	53
April	0·135	141	25	0·121	158	12	0·122	144	38
Mai	0·108	132	6	0·137	142	7	0·114	163	55
Juni	0·135	141	25	0·096	147	23	0·083	124	4
Juli	0·134	145	42	0·079	130	52	0·091	133	17
August	0·107	143	4	0·123	149	58	0·094	133	57
September	0·104	138	45	0·119	138	45	0·116	135	32
October	0·132	148	45	0·128	153	13	0·132	141	52
November	0·127	146	7	0·081	144	53	0·126	134	9
December	0·102	127	30	0·122	162	56	0·098	142	26

	1848			1849			1850		
Jänner	0‴123	130°	8'	0‴051	128°	28'	0‴111	156°	2'
Februar	0·084	144	5	0·100	166	0	0·116	124	7
März	0·106	152	22	0·095	128	39	0·127	117	48
April	0·133	139	24	0·085	151	59	0·089	111	56
Mai	0·083	135	51	0·095	127	38	0·072	138	21
Juni	0·104	109	25	0·098	121	57	0·061	121	36
Juli	0·094	116	28	0·048	125	3	0·064	126	3
August	0·087	131	39	0·103	137	54	0·091	138	10
September	0·104	135	32	0·086	126	10	0·071	115	19
October	0·099	134	44	0·116	152	38	0·103	154	4
November	0·120	160	28	0·070	171	47	0·111	163	29
December	0·102	148	24	0·072	136	7	0·089	147	16

	1851			1852			1853		
Jänner	0‴080	142°	45'	0‴113	137°	30'	0‴077	128°	8'
Februar	0·115	148	38	0·078	105	6	0·079	141	36
März	0·100	121	25	0·104	157	58	0·113	148	35
April	0·087	136	39	0·120	162	36	0·089	139	44
Mai	0·089	161	19	0·118	168	35	0·111	138	2
Juni	0·098	121	1	0·105	136	31	0·098	148	21
Juli	0·094	117	28	0·100	132	30	0·090	146	47
August	0·100	138	25	0·114	138	21	0·111	149	20
September	0·090	122	11	0·137	136	39	0·116	139	16
October	0·115	136	55	0·152	147	49	0·121	153	26
November	0·110	169	58	0·100	153	20	0·100	159	8
December	0·089	131	58	0·113	167	11	0·100	113	50

	1854			1855			1856		
Jänner	0m104	179°	5'	0m083	136°	55'	0m064	136°	15'
Februar	0·102	149	58	0·111	155	11	0·120	152	41
März	0·085	143	8	0·106	146	4	0·133	142	26
April	0·134	129	14	0·115	147	5	0·140	130	36
Mai	0·123	151	19	0·096	133	29	0·103	155	35
Juni	0·090	133	13	0·113	154	19	0·104	142	3
Juli	0·109	141	36	0·104	130	32	0·104	147	34
August	0·135	147	34	0·123	142	38	0·118	132	10
September	0·144	145	23	0·127	132	50	0·098	141	28
October	0·134	157	22	0·118	137	18	0·150	162	13
November	0·081	139	44	0·085	151	56	0·075	118	41
December	0·098	144	1	0·146	176	24	0·127	161	43

	1857			1858			1859		
Jänner	0m098	141°	32'	0m088	122°	47'	0m080	152°	5'
Februar	0·127	148	42	0·125	138	41	0·126	164	38
März	0·121	120	43	0·109	147	45	0·109	134	40
April	0·135	164	14	0·142	145	19	0·129	148	6
Mai	0·107	148	24	0·126	171	36	0·107	141	28
Juni	0·078	139	20	0·092	127	53	0·101	143	27
Juli	0·121	154	10	0·078	130	32	0·104	143	38
August	0·124	152	44	0·096	149	10	0·122	139	8
September	0·146	149	31	0·140	146	29	0·137	161	34
October	0·146	160	18	0·150	156	42	0·099	131	15
November	0·115	148	38	0·081	123	34	0·086	142	18
December	0·101	154	7	0·130	171	31	0·117	175	31

	1860			1861			1862		
Jänner	0m066	143°	46'	0m108	167°	58'	0m076	124°	33'
Februar	0·133	171	0	0·094	117	28	0·099	160	54
März	0·101	136	51	0·112	131	15	0·142	135	5
April	0·155	166	18	0·128	150	39	0·161	159	23
Mai	0·088	120	33	0·109	131	30	0·089	119	39
Juni	0·080	140	42	0·089	131	58	0·072	122	3
Juli	0·090	127	30	0·093	147	16	0·070	149	20
August	0·114	132	18	0·138	148	13	0·049	116	58
September	0·129	151	59	0·108	140	46	0·118	161	29
October	0·110	154	32	0·111	141	5	0·093	138	32
November	0·079	146	55	0·098	157	36	0·071	176	5
December	0·080	151	2	0·105	151	36	0·086	209	43

	1863			1864			1865		
Jänner	0^{m}064	161°	45'	0^{m}058	126°	37'	0^{m}073	148°	52'
Februar	0·136	169	21	0·079	129	45	0·099	167	51
März	0·043	148	6	0·131	156	22	0·096	167	30
April	0·081	131	19	0·115	158	42	0·117	140	50
Mai	0·075	135	32	0·061	133	29	0·111	142	34
Juni	0·080	155	14	0·089	144	27	0·097	116	34
Juli	0·053	145	19	0·071	159	24	0·103	147	34
August	0·079	138	29	0·100	136	35	0·103	155	38
September	0·078	151	9	0·084	145	6	0·114	147	52
October	0·090	148	10	0·099	166	55	0·121	147	59
November	0·107	177	19	0·109	160	45	0·102	169	7
December	0·076	171	11	0·061	141	52	0·070	145	19

	1866			1867			1868		
Jänner	0^{m}071	142°	3'	0^{m}092	183°	19'	0^{m}053	146°	47'
Februar	0·061	131	24	0·084	138	34	0·079	150	12
März	0·117	170	41	0·078	152	29	0·127	148	26
April	0·122	143	52	0·113	170	29	0·091	155	7
Mai	0·112	148	16	0·071	152	54	0·094	147	18
Juni	0·113	141	40	0·058	147	47	0·112	137	14
Juli	0·101	151	46	0·067	134	48	0·117	143	13
August	0·117	161	58	0·108	153	57	0·105	153	18
September	0·111	157	44	0·105	144	19	0·129	150	25
October	0·129	169	21	0·070	150	7	0·155	171	11
November	0·052	182	45	0·096	139	49	0·083	142	10
December	0·021	111	6	0·101	163	40	0·027	153	24

	1869			1870			1871		
Jänner	0^{m}078	138°	8'	0^{m}094	149°	7'	0^{m}092	148°	14'
Februar	0·105	117	56	0·102	132	44	0·080	115	50
März	0·107	156	25	0·086	149	3	0·077	137	3
April	0·139	157	8	0·100	146	42	0·096	147	27
Mai	0·089	156	8	0·095	136	49	0·082	152	2
Juni	0·101	149	23	0·095	142	8	0·058	118	24
Juli	0·088	145	38	0·115	112	56	0·065	133	17
August	0·117	143	6	0·112	150	0	0·086	132	22
September	0·123	136	27	0·159	157	50	0·115	109	7
October	0·136	156	18	0·080	139	33	0·109	154	34
November	0·076	107	7	0·124	164	49	0·061	169	38
December	0·103	145	25	0·087	135	34	0·098	166	16

München.

	1841			1842			1843		
Jänner	0‴079	165°	54'	0‴052	161°	12'	0‴140	159°	27'
Februar	0·086	149	3	0·084	152	54	0·029	173	24
März	0·147	145	27	0·118	141	32	0·166	153	29
April	0·146	152	48	0·129	146	47	0·163	146	26
Mai	0·127	142	45	0·172	148	35	0·118	152	44
Juni	0·128	151	16	0·118	135	4	0·084	146	0
Juli	0·086	142	15	0·127	124	29	0·120	145	8
August	0·124	142	38	0·124	133	53	0·121	141	48
September	0·134	148	10	0·130	149	58	0·125	149	58
October	0·136	148	45	0·166	166	5	0·130	160	10
November	0·068	173	41	0·116	165	4	0·110	168	15
December	0·114	153	35	0·079	161	34	0·096	154	16

	1844			1845			1846		
Jänner	0‴070	185°	30'	0‴078	153°	10'	...	....	
Februar	0·127	134	5	0·130	141	1	...	....	
März	0·129	160	18	0·139	145	12	0‴123	148°	38'
April	0·147	150	32	0·150	137	10	0·147	152	12
Mai	0·104	146	0	0·119	154	10	0·138	148	49
Juni	0·107	141	25	0·132	149	58	0·113	133	37
Juli	0·119	141	40	0·099	154	59	0·123	136	23
August	0·115	147	5	0·122	136	15	0·139	144	1
September	0·112	152	57	0·118	160	33	0·136	137	7
October	0·123	167	4	0·149	161	43	0·138	159	35
November	0·077	148	56	0·110	160	33	0·072	165	10
December	0·103	163	1	...	....		0·108	155	23

	1847			1848			1849		
Jänner	...	..		0‴060	164°	40'	0‴090	149°	58'
Februar	...	....		0·120	137	26	0·092	146	22
März	...	....		0·134	147	34	0·105	129	57
April	...	....		0·119	147	56	0·115	149	58
Mai	...	....		0·094	146	29	0·121	141	48
Juni	...	....		0·105	150	2	0·080	142	42
Juli	...	....		0·142	136	27	0·137	140	15
August	...	....		0·125	146	4	0·105	133	13
September	...	....		0·088	147	13	0·074	143	16
October	...	....		0·087	148	10	0·130	151	16
November	...	....		0·119	169	54	0·099	161	48
December	...	....		0·068	154	47	0·080	130	5

	1850			1851			1852		
Jänner	0^{m}106	160°	13'	0^{m}049	185°	50'	0^{m}104	146°	0'
Februar	0·103	142	45	0·177	151	19	0·076	144	31
März	0·104	143	35	0·124	153	57	0·094	147	20
April	0·131	157	33	0·152	151	36	0·144	146	29
Mai	0·140	157	39	0·159	153	7	0·130	137	50
Juni	0·170	152	54	0·128	144	8	0·121	138	53
Juli	0·124	144	38	0·063	135	20	0·101	137	38
August	0·138	148	49	0·137	149	24	0·101	140	7
September	0·109	165	22	0·082	138	49	0·123	147	56
October	0·160	159	19	0·098	148	17	0·124	158	42
November	0·101	163	12	0·119	145	49	0·094	145	34
December	0·109	159	53	0·083	151	59	0·123	153	20

	1853			1854			1855		
Jänner	0^{m}079	154°	10'	0^{m}105	159°	32'	0^{m}029	147°	5°
Februar	0·045	142	41	0·118	132	10	0·101	147	31
März	0·118	148	35	0·103	147	30	0·122	151	19
April	0·094	150	32	0·103	145	56	0·116	145	1
Mai	0·116	147	52	0·151	151	39	0·106	164	5
Juni	0·130	142	57	0·078	124	52	0·089	141	28
Juli	0·130	141	40	0·110	137	7	0·079	137	14
August	0·099	128	39	0·114	142	41	0·123	140	34
September	0·112	138	6	0·157	149	27	0·096	147	23
October	0·107	143	46	0·120	148	35	0·083	153	1
November	0·088	161	17	0·080	172	13	0·105	161	2
December	0·044	166	59	0·146	155	41	0·096	158	36

	1856			1857		
Jänner	0^{m}043	175°	35'	0^{m}056	166°	20'
Februar	0·120	149	58	0·132	148	42
März	0·111	135	40	0·062	141	55
April	0·117	140	46	0·128	154	28
Mai	0·113	149	13	0·119	152	2
Juni	0·106	140	38	0·095	143	50
Juli	0·110	139	24	0·142	139	28
August	0·108	140	42	0·101	143	23
September	0·096	141	20	0·113	151	26
October	0·102	156	28	0·100	149	58
November	0·038	149	58	0·056	157	19
December	0·129	156	25	0·119	153	26

Anmerkung. Vom Jahre 1857 an konnten die in den Annalen der Münchener Sternwarte, VI. Suppl.-Band, mitgetheilten Jahresmittel für die einzelnen Beobachtungsstunden benützt werden. Für das Jahr 1857 wurde die Berechnung von *k* und *A* sowohl mit den Monatsmitteln als mit dem Jahresmittel gemacht; es zeigte sich im Resultate, namentlich in *k*, kein erheblicher Unterschied. — Für Oxford werden die in den Results of the Meteorological Observations etc. mitgetheilten Werthe von *k* und *A* (daselbst mit *b* und *B* bezeichnet) unmittelbar benützt; *k*, welches in englischen Zollen angegeben ist, wurde in Linien verwandelt.

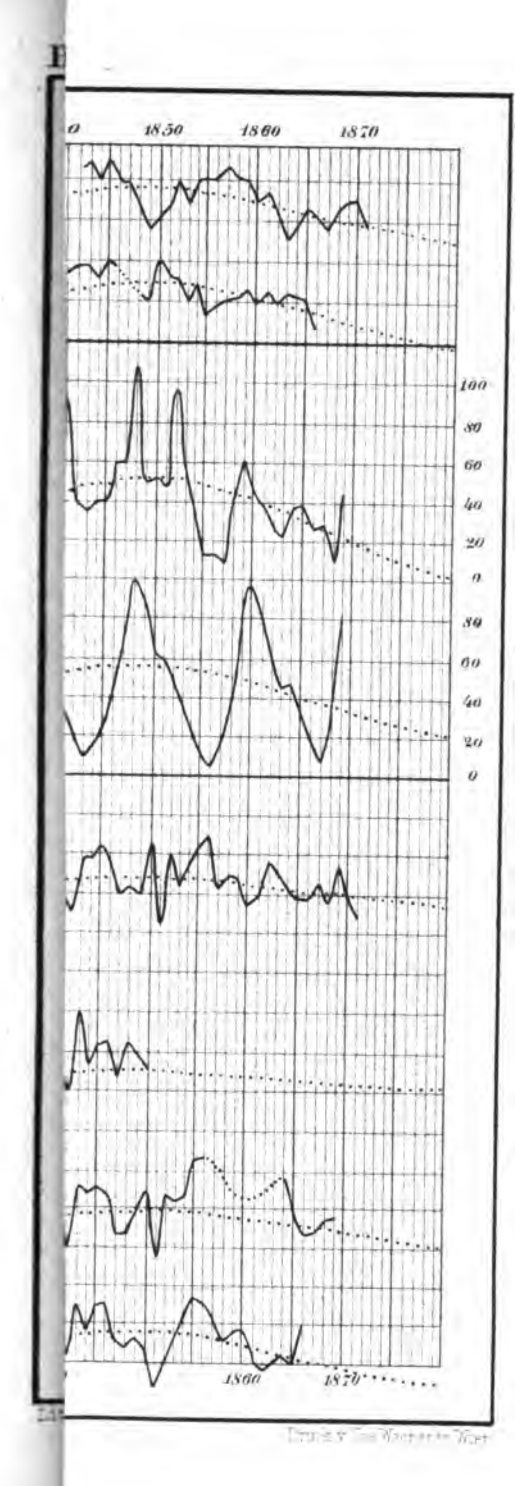
II. Jährliche Schwankung des Barometerstandes.

(In Pariser Linien.)

Jahr	Prag	Mailand	Wien	München
1763	....	14‴7	....	....
1764	....	14·0	....	....
1765	....	12·2	....	....
1766	....	13·2	....	....
1767	....	11·6	....	....
1768	....	18·0	....	....
1769	....	14·5	....	....
1770	....	17 9	....	....
1771	....	16·2	....	....
1772	....	14·8	....	....
1773	....	13·3	....	....
1774	....	17·2	....	....
1775	....	14·2	16‴02	...
1776	....	16·6	15·58	....
1777	....	17·2	15·55	....
1778	....	20·5	17·92	....
1779	....	17·3	18·55	...
1780	....	14·5	16·08	....
1781	....	14·3	15·62	....
1782	....	19·4	19·49	....
1783	....	16·6	16·12	....
1784	....	18·2	19·09	....
1785	....	16·6	17·23	....
1786	....	15·5	17·11	....
1787	....	16·0	16·51	....
1788	....	15·2	15·50	....
1789	....	15·0	18·35	....

Jahr	Prag	Mailand	Wien	München
1790	....	14‴0	14‴44	....
1791	....	15·5	15·75	...
1792	....	14·5	17·27	....
1793	....	12·4	11·56	....
1794	....	15·3	15·02	....
1795	....	14·9	14·97	....
1796	....	17·6	14·70	....
1797	....	15·9	15·41	....
1798	....	17·3	16·38	....
1799	....	14·5	14·77	....
1800	14‴85	14·8	15·25	....
1801	14·27	17·5	14·14	....
1802	17·18	16·4	16·54	....
1803	15·60	14·5	14·39	....
1804	14·84	13·8	14·60	....
1805	19·62	21·9	19·95	....
1806	21·71	16·7	19·55	....
1807	17·18	16·7	14·70	....
1808	16·13	14·4	44·66	.....
1809	16·76	14·6	15·53	....
1810	16·23	14·4	14·27	....
1811	16·96	14·0	15·11	....
1812	14·91	15·0	14·74	....
1813	15·72	11·9	12·93	....
1814	14·50	17·2	13·25	....
1815	16·95	14·5	13·51	....
1816	18·50	15·4	16·24	....
1817	18·86	15·1	17·43	....
1818	16·21	14·0	15·41	....
1819	14·84	13·0	13·60	....
1820	18·53	16·5	15·84	....
1821	25·15	19·0	22·89	....
1822	16·17	14·7	14·70	....
1823	20·15	19·4	16·40	....
1824	17·74	18·3	16·69	....
1825	21·17	18·4	20·08	17‴9
1826	15·42	14·7	15·86	14·0
1827	15·84	15·6	15·26	14·0
1828	17·68	21·7	16·27	15·1
1829	17·18	15·6	19·39	14·0

Jahr	Prag	Mailand	Wien	München
1830	15"69	15"7	16"74	13"9
1831	15·24	14·2	12·57	13·2
1832	15·18	12·3	13·25	12·0
1833	19·34	13·5	17·12	15·4
1834	18·12	16·2	15·96	14·2
1835	19·01	17·87	18·27	16·0
1836	18·10	17·63	15·01	16·3
1837	17·83	17·42	17·45	16·2
1838	18·02	20·25	16·91	....
1839	15·74	16·28	13·89	....
1840	17·92	17·19	17·13	....
1841	18·04	17·34	18·68	16·6
1842	16·23	14·97	14·98	15·1
1843	19·79	19·95	18·88	18·6
1844	19·75	16·31	18·46	16·6
1845	20·51	18·06	18·87	18·8
1846	19·53	18·43	18·14	19·0
1847	17·65	16·03	15·75	16·4
1848	17·93	18·01	16·18	16·0
1849	17·01	17·47	17·65	16·6
1850	20·81	16·18	18·73	15·7
1851	15·63	....	14·07	13·5
1852	20·15	....	18·38	15·2
1853	18·17	....	17·77	16·5
1854	19·79	....	18·55	18·3
1855	21·07	....	20·70	19·0
1856	21·52	....	21·01	18·8
1857	17·69	....	....	17·2
1858	19·10	....	....	16·5
1859	18·83	....	....	17·1
1860	16·61	....	....	17·0
1861	17·08	....	....	14·9
1862	19·17	....	....	14·6
1863	18·42	....	....	15·2
1864	17·75	....	19·76	15·5
1865	17·29	....	17·35	15·1
1866	16·99	....	15·77	17·2
1867	18·32	...	15·95	....
1868	16·82	....	16·81	....
1869	19·75	....	16·89	....
1870	17·51	....	....	....
1871	15·92	....	....	....


1850
1860
1870
100
80
60
40
20
0
80
60
40
20
0
1860
1870

XIV. SITZUNG VOM 16. MAI 1872.

In Verhinderung des Präsidenten führt Herr Hofrath Freih. v. Burg den Vorsitz.

Herr Joh. Gleissner, k. k. Artillerie-Hauptmann und Prof. an der militär-technischen Schule zu Mährisch-Weisskirchen, berichtet mit Schreiben vom 12. Mai, über einen von ihm in der Brust einer Ringeltaube vorgefundenen, von einem alten Schusse herrührenden, eingekapselten Federpfropf nebst Bleischrot, und übersendet das betreffende Präparat.

Herr Prof. Dr. E. Suess legt im Namen des Herrn Prof. Makowski in Brünn ein Exemplar eines fossilen, im Rothliegenden der Cerna Hora bei Brünn aufgefundenen fossilen Reptils vor.

Der Secretär v. Schrötter überreicht eine vorläufige Mittheilung: „Über ein zweckmässiges Verfahren zur Gewinnung des Tellurs aus der Tellurschliche von Nagyág in Siebenbürgen".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia Pontifica de' Nuovi Lincei: Atti. Anno XXV, Sess. 4ª. Roma, 1872; 4⁰.

Akademie, Südslavische, der Wissenschaften und Künste: Rad. Knjiga XVIII. U Zagrebu, 1872; 8⁰. — Pisani zakoni na slovenskom jugu. Bibliografski nocrt. D^ra^ V. Bogišića. I. U Zagrebu, 1872; 8⁰.

Annalen der Chemie und Pharmacie, von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R. Band LXXXVI, Heft 2 & 3. Leipzig & Heidelberg, 1872; 8⁰.

Annales des mines. VIe Série. Tome XX, 5e & 6e Livraisons de 1871. Paris; 8⁰.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrgang, Nr. 14. Wien, 1872; 8°.

Bibliothèque Universelle & Revue Suisse: Archives des sciences physiques et naturelles. N. P. Tome XLIIIe, Nr. 172. Génève, Lausanne, Paris, 1872; 8°.

Canestrini, Giovanni, Gli Opilionidi Italiani. (Estr. dagli Annali del Museo civ. di Storia Nat. di Genova. Vol. II.) 8°.

Comitato, R., geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1872. Nr. 1 & 2. Firenze; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nr. 18. Paris, 1872; 4°.

Eichwald, Ed. von, Analecten aus der Paläontologie und Zoologie Russlands. Moskau, 1871; 4°.

Gesellschaft, Senckenbergische naturforschende: Abhandlungen. VIII. Bandes 1. & 2. Heft. Frankfurt a. M., 1872; 4°. — Bericht. 1870—1871. Frankfurt a. M.; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö., Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 19—20. Wien, 1872; 4°.

Grad, Charles, Essais sur le climat de l'Alsace et des Vosges. Mulhouse, 1870; 8°.

Greifswald, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften seit dem Sommer-Semester 1871. 4° & 8°.

Jena, Universität, Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1871/72. 4° & 8°.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 10. Graz, 1872; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 11. Wien; 8°.

Mittheilungen des k. k. techn. & administr. Militär-Comité. Jahrgang 1872, 5. Heft. Wien; 8°.

— aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 18. Band, 1872. IV. Heft. Gotha; 4°.

Nature. Nr. 132, Vol. VI. London, 1872; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1872, Nr. 8. Wien; 4°.

„Revue politique et littéraire" et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger." Ire Année. (2e Série), Nr. 46. Paris & Bruxelles, 1872; 4°.

Ross, Alexander Milton, The Birds of Canada. Toronto, 1871; kl. 8°.

Tschermak, Gustav, Mineralogische Mittheilungen. Jahrgang 1872. Heft 1. Wien; kl. 4°.

Verein, Offenbacher, für Naturkunde: XI. & XII. Bericht. 1869—1870 & 1870—1871. Offenbach a. M.; 8°.

Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Veterinärkunde. XXXVII. Band, 1. Heft. Wien, 1872; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 19. Wien, 1872; 4°.

Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Band, 20. & 21. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

— für die gesammten Naturwissenschaften, von C. G. Giebel. N. F. 1871. Band IV. Berlin; 8°.

XV. SITZUNG VOM 31. MAI 1872.

Herr Prof. Dr. Czyrniański übersendet eine Abhandlung: „Über das Wirken der Atome in den Molecülen".

Herr Director Dr. J. Stefan überreicht folgende zwei Abhandlungen:

1. „Anwendung des Chronoskops zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit im Kautschuk";

2. „Uber Schichtungen in schwingenden Flüssigkeiten".

Herr Prof. Dr. V. v. Lang legt eine Abhandlung: „Zur dynamischen Theorie der Gase II," vor.

Herr Dr. Friedr. Brauer übergibt eine Abhandlung, betitelt: „Beiträge zur Kenntniss der Phyllopoden".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia, Reale, dei Lincei: Atti. Tomo XXIV. Sess. 5ª—7ª Roma, 1871 & 1872; 4⁰.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. Februar 1872. Berlin; 8⁰.

— — Königl. Bayer., zu München: Sitzungsberichte der math. physik. Classe. 1872. Heft. 1. München; 8⁰.

Apotheker-Verein, allgem.-österr.: Zeitschrift. 10. Jahrgang, Nr. 15—16. Wien, 1872; 8⁰.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1887—1888. (Bd. 79. 15—16.) Altona, 1872; 4⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nrs. 19—20. Paris, 1872; 4⁰.

Gesellschaft, österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VII. Bd., Nr. 10. Wien, 1872; 4°.

— Physikal.-Medicin., in Würzburg: Verhandlungen. N. F. II. Band, 4. (Schluss-)Heft. Würzburg, 1872; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 21—22. Wien, 1872; 4°.

Heidelberg, Universität: Akadem. Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1871/72. 4° & 8°.

Istituto, Reale, Veneto di Scienze, Lettere ed Arti: Memorie. Vol. XVI, Parte 1. Venezia, 1872; 4°. — Atti. Tomo I°, Serie IV^a, Disp. 5^a. Venezia, 1871—72; 8°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band V, 7. & 8. Heft. Leipzig, 1872; 8°.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 11. Graz, 1872; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1872. Nr. 12—13. Wien; 8°.

Lotos. XXII. Jahrg. April 1872. Prag; 8°.

Nature. Nrs. 133—134, Vol. VI. London. 1872; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1872. XXII. Band, Nr. 1. Wien; 4°.

„Revue politique et littéraire" et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger." Ire Année (2e Série) Nrs. 47—48. Paris & Bruxelles, 1872; 4°.

Schenk, S. L., Anatomisch-physiologische Untersuchungen. Wien, 1872; 8°.

Société Botanique de France: Bulletin. Tome XVIIIe, 1871. Comptes rendus des séances. 2. Paris; 8°.

— des Ingénieurs civils: Séance du 3 Mai 1872. Paris; 8°.

— Linnéenne de Bordeaux: Actes. Tome XXVII (3e Série, Tome VII), 2e Partie; Tome XXVIII (3e Série, Tome VIII). 1re Partie. Paris & Bordeaux, 1872; 8°.

Verein für siebenbürgische Landeskunde: Archiv. N.F. IX. Bd., 3. Heft (1871); X. Band, 1. Heft (1872). Hermannstadt; 8°. — Jahresbericht für das Vereinsjahr 1870/71. Hermannstadt; 8°. — Trausch, Jos., Schriftsteller-Lexicon etc. II. Band. Kronstadt, 1870; 8°.

Verein der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg: Archiv. 25. Jahr. Neubrandenburg, 1872; 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 20—21. Wien, 1872; 4⁰.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIV. Jahrgang, 7. Heft. Wien, 1872; 4⁰.

Zur dynamischen Theorie der Gase. II.

Von dem w. M. **Viktor v. Lang.**

Ich habe vor Kurzem gezeigt, dass die von Clausius für die Wärmeleitung in Gasen aufgestellte Formel durch ähnliche einfache Betrachtungen erhalten werden kann, wie sie Krönig seinerzeit zur Erklärung des Druckes der Gase in Anwendung brachte. Das Resultat meiner Untersuchung stimmte allerdings insofern nicht ganz mit dem von Clausius, als ich einen Factor $^1/_{12}$ erhielt, wo in der Formel von Clausius der Factor $^5/_{24}$ erscheint. Ich habe damals keinen Werth auf diesen Unterschied gelegt, da ja keine Angaben über das Wärmeleitungsvermögen der Gase vorlagen. Seitdem ist es jedoch Hrn. Director Stefan gelungen, das Leitungsvermögen der Luft mit grosser Genauigkeit zu bestimmen, und da zeigt es sich, dass weder mit dem Factor $^1/_{12}$ noch mit dem Factor $^5/_{24}$ die Formel der Beobachtung entspricht, letztere fordert vielmehr den Factor $^1/_4$. Es ist aber leicht, die von mir gegebene Ableitung so zu transformiren dass dieser Factor herauskommt, und ich glaube, dass durch diese Änderung mein Verfahren nur logischer wird.

Bevor ich nun im Anschlusse an meine erste Abhandlung nochmals die Wärmeleitung in Betracht ziehe, will ich noch einige Bemerkungen über den Factor K vorausschicken, mit welchen man die lebendige Kraft L der fortschreitenden Bewegung der Molecüle multipliciren muss, um die im Gase enthaltene Wärmemenge W zu finden.

Wärmemenge eines Gases.

Ist C die specifische Wärme bei constantem Volumen, G das Gewicht des Gases, so hat man für die Wärme U, welche man demselben bei constantem Volumen zuführen muss, um dessen

Temperatur auf die absolute Temperatur T zu bringen, bekanntlich

$$U = CGT. \qquad (1)$$

Nun ist, wenn m die Masse eines Molecüls, c die mittlere Geschwindigkeit und N die Anzahl derselben bedeutet,

$$G = Nmg = 2\frac{g}{c^2}\frac{Nm}{2}c^2 = 2\frac{g}{c^2}L. \qquad (2)$$

Demzufolge wird Gleichung (1)

$$U = 2C\frac{gT}{c^2}L. \qquad (3)$$

Diese Gleichung lehrt, dass die Wärme W proportional der mittleren lebendigen Kraft der Molecüle ist. Der Factor von L

$$K = 2C\frac{gT}{c^2} \qquad (4)$$

ist nämlich unabhängig von Druck und Temperatur, da

$$\frac{c^2}{T} = \frac{c_0^2}{T_0} \qquad (5)$$

wo der Index 0 sich auf den Eispunkt bezieht (5). Somit wird

$$K = 2CG\frac{T_0}{u_0}. \qquad (6)$$

Für Luft ist unter Zugrundelegung von Kilogramm und Meter $C = 0{\cdot}168$, $c_0 = 485$; ferner hat man $g = 9{\cdot}809$, $T_0 = 273$, woraus

$$K = \frac{1}{261}$$

folgt. Nach dieser Rechnung würden einer Wärmeeinheit nur 261 Arbeitseinheiten entsprechen, während sie erfahrungsgemäss 424 solcher Einheiten äquivalent ist, woraus hervorgeht, dass von der einem Gase bei constantem Volum zugeführten Wärme nur $\frac{261}{424} = 0{\cdot}60$ Theile zur Erhöhung der lebendigen Kraft der fort-

schreitenden Bewegung der Gasmolecüle verwendet werden können. Bekanntlich hat Clausius dieses Resultat schon seit langer Zeit auf einem etwas anderen Wege abgeleitet.

Wärmeleitung.

Wir nehmen an, dass die Temperatur mit der z-Axe variire; für die lebendige Kraft der Molecüle, welche sich aus der Entfernung z senkrecht durch die xy-Ebene bewegen, hat man per Flächen und Zeiteinheit

$$\frac{mn_z c_z^2}{6\theta_z} dz = \frac{mn_z c_z^3}{6l_z} dz.$$

In diesen Ausdrücken nun betrachten wir l_z als constant in Übereinstimmung mit der folgenden Summation, wo für l_z ebenfalls ein Mittelwerth gesetzt werden muss. Ist aber l_z constant, so muss auch n_z constant sein, da ja zwischen diesen Grössen die Beziehung

$$l = \frac{3}{4\pi s^2 n} \tag{7}$$

besteht. Statt des früheren Ausdruckes erhalten wir so

$$\frac{mnc_z^3}{6l} dz = \frac{mnc^3}{6l}\left(\frac{T_z}{T}\right)^{3/2} dz = \frac{mnc^3}{6l}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{dT}{dz}\frac{z}{T}\right)dz.$$

Die betrachteten Molecüle gehen alle bis zur Entfernung $l—z$ und haben dort die entsprechende lebendige Kraft

$$\frac{nmc^3}{6l}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{dT}{dz}\frac{z-l}{T}\right)dz$$

haben also die lebendige Kraft

$$\frac{nmc^3}{4T}\frac{dT}{dz}dz$$

beim Durchgange durch die xy-Ebene verloren. Für die ganze an diese Ebene abgegebene lebendige Kraft aber erhält man

$$\frac{nmc^3 l}{4T} = \frac{n_0 m c_0^3}{4T_0}\sqrt{\frac{T}{T_0}}\frac{dT}{dz} l_0.$$

Die diesen Ausdrücken entsprechende Wärmemenge Q erhält man nach dem früheren durch Multiplication mit $2Cg\frac{T}{c^2}$ so dass

(8) $$Q = \frac{C}{2} gnmcl \frac{dT}{dz}$$

und für den eigentlichen Wärmeleitungscoëfficienten

(9) $$\bar{\omega} = \frac{C}{2} gnmcl$$

wird. Nun ist der Theorie der inneren Reibung zufolge

(10) $$Gnmcl = 3\eta$$

wo η sich auf die Masseneinheit bezieht; somit hat man auch

(11) $$\bar{\omega} = \frac{3}{2} C\eta.$$

Setzt man für Luft nur die Temperatur von 18° C. nach Maxwell und Meyer $\eta = 0{\cdot}0002$ und $C = 1{\cdot}6849$, so wird $\bar{\omega} = 0{\cdot}0000505$ unter Zugrundelegung von Gramm und Centimeter. Director Stefan fand das Wärmeleitungsvermögen der Luft zwischen 0° und 15° C. gleich 0·0000558.

Die letzte Formel gibt ferner für Sauerstoff 0·0000519, Stickstoff 0·0000499, Wasserstoff 0·0003544, wobei die von O. E. Meyer [1] berechneten Werthe von η benützt sind.

---

[1] Pogg. Ann. B. 143 (1871) S. 14.

Anwendung des Chronoskops zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit im Kautschuk.

Von J. Stefan.

(Mit 3 Holzschnitten.)

In der Abhandlung über die „Anwendung der Schwingungen zusammengesetzter Stäbe zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit"[1] habe ich die Werthe der letzteren Grösse für mehrere weiche Körper und darunter auch für Kautschuk mitgetheilt. Stäbchen aus Kautschuk gaben für die Schallgeschwindigkeit Werthe, welche zwischen 30 und 60 Meter variirten, der Art, dass je weicher der Kautschuk, desto kleiner die Geschwindigkeit des Schalles in demselben sich ergab.

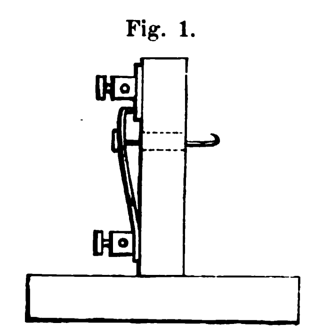
Ich habe seither die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Impulse im Kautschuk auch direct mit Hilfe des Hipp'schen Chronoskops bestimmt. Die Anwendung dieses Chronoskops zur Bestimmung der Dauer einer Erscheinung setzt einen Hilfsapparat voraus, durch welchen bei Beginn der Erscheinung der Strom, welcher den Elektromagneten im Apparate umkreist, unterbrochen, am Ende der Erscheinung aber wieder geschlossen wird. Diesen Apparat stellte ich nun in folgender Weise her.

Auf einem viereckigen Brett 13 Cm. lang, 9 Cm. breit, erhebt sich ein hölzernes Säulchen 10 Cm. hoch, das in der Höhe von 6 Cm. durchbohrt ist. Auf der einen Seite dieses Säulchens sind zwei Messingplättchen durch Schrauben, die zugleich Klem-

[1] Sitzungsberichte LVII.

men zur Aufnahme von Leitungsdrähten sind, befestigt. Die beiden Plättchen greifen über einander. Das eine von ihnen federt und ist mit einer kleinen Öffnung versehen. Durch diese kann ein Messingstift geführt werden, der an dem einen Ende in ein Häkchen endigt, an dessen anderes Ende ein Knopf aufgeschraubt werden kann. Nebenstehende Figur 1 gibt von diesem Apparate einen Durchschnitt.

Fig. 1.



Für gewöhnlich berührt das federnde Plättchen das andere nicht, so dass von der einen zur anderen Klemme keine leitende Verbindung besteht. Durch einen Zug an dem Messingstift kann aber das federnde Plättchen gegen das fixe angedrückt, also die Leitung hergestellt werden.

Ganz so wie dieser ist der zweite Theil des Apparates construirt. Er unterscheidet sich von dem ersten nur dadurch, dass für gewöhnlich das federnde Plättchen auf dem fixen aufruht, also die beiden Klemmen leitend verbunden sind. Diese Verbindung kann aber unterbrochen werden durch einen Zug an dem jetzt in umgekehrter Richtung durch die Öffnung im Plättchen geführten Messingstift, durch welchen Zug das federnde Plättchen von dem fixen abgehoben wird. Hört der Zug auf, so wird auch die Leitung wieder hergestellt.

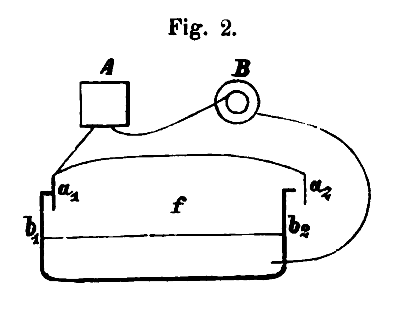
Die Anwendung dieses Apparates zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im Kautschuk ist folgende:

Die beiden Theile des Apparates werden an zwei Tischen durch Zwingen befestigt der Art, dass die Flächen, an welchen die Messingplättchen sich befinden, beide nach derselben Seite gerichtet sind. In die Häkchen der beiden Messingstifte werden die Enden einer Kautschukschnur eingehängt mittelst Schlingen aus Zwirn, die an den Enden der Schnur befestigt sind.

Die beiden Tische werden so weit von einander entfernt, dass die Kautschukschnur gespannt und das eine der federnden Plättchen dadurch an seine Unterplatte angedrückt, das andere von seiner Unterplatte abgehoben wird.

Die Verbindung der Batterie mit dem Hipp'schen Chronoskop ist durch die beiden Theile dieses Apparates in doppelter Weise herzustellen nach beistehendem Schema (Fig. 2). *A* bedeutet das Chronoskop, *B* die Batterie, a_1 und a_2 sind die zwei fixen, b_1 und b_2 die zwei federnden Plättchen. Das eine Ende der durch das Chronoskop gehenden Leitung ist mit dem einen Pol der Batterie, das andere Ende mit dem Plättchen a_1 verbunden. Der zweite Pol der Batterie steht in Verbindung mit b_2. Ausserdem sind a_1 und a_2 unter sich und ebenso b_1 und b_2 unter sich verbunden.

Fig. 2.



Ist die Kautschukschnur *f* gespannt, so ist das federnde Plättchen b_1 gegen a_1 angedrückt, b_2 von a_2 abgehoben. Der Strom ist durch die Leitung $A\ a_1\ b_1\ b_2\ B\ A$ geschlossen. Wird nun der Faden, durch welchen die Kautschukschnur mit dem federnden Plättchen b_1 verbunden ist, abgebrannt, so hört der Zug auf das Plättchen zu wirken auf, es springt zurück und der Strom ist unterbrochen.

Die Aufhebung der Spannung pflanzt sich nun in der Schnur fort bis an's andere Ende derselben zum zweiten Theile des Apparates, hat auch hier die Spannung aufgehört, so schlägt das Plättchen b_2 gegen a_2 und der Strom ist nun abermals geschlossen und zwar durch die Leitung $A\ a_2\ b_3\ BA$.

Die Verschiebung des Zeigers an der Hipp'schen Uhr gibt die Zeit, durch welche hindurch der Strom unterbrochen war. Diese Zeit ist bis auf eine verschwindend kleine Grösse gleich derjenigen, welche die nach Aufhebung der Spannung an dem einen Ende eintretende Contraction in der Schnur zu ihrer Fortpflanzung bis an das andere Ende braucht. Die Geschwindigkeit dieser Fortpflanzung ist auch die des Schalles.

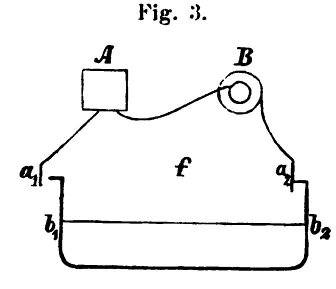
Als Beispiel führe ich an, dass mit einer Schnur von 4·65 Meter Länge bei einem Versuch die Zeit 0·099, bei einem zweiten die Zeit 0·102 Secunden beobachtet wurde, woraus sich

46 Meter für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer longitudinalen Verschiebung oder des Schalles in dieser Schnur ergibt.

Dass die beobachtete Zeit wirklich jene darstellt, welche zur Fortpflanzung der Spannungen in der Schnur nöthig ist, dass also die zum Stromschluss durch die Plättchen nöthige Zeit verschwindend klein ist, davon kann man sich durch einen zweiten Versuch überzeugen, bei welchem man statt der Kautschukschnur einen Metalldraht oder eine Hanfschnur verwendet, in welchen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles eine sehr grosse ist. Der Zeiger an der Hipp'schen Uhr verrückte sich bei Anwendung solcher Drähte oder Schnüre entweder gar nicht oder nur um einen Theilstrich, der 0·001 Secunde darstellt.

Man kann den hier beschriebenen Apparat auch mit einem solchen Chronoskop verbinden, bei welchem während der zu messenden Dauer einer Erscheinung nicht wie beim Hipp'schen ein Strom unterbrochen, sondern geschlossen gehalten werden muss. Nebenstehende Figur 3 gibt wieder das Schema der in diesem Falle zu treffenden Anordnung. Die beiden Theile des Apparates erhalten gegen früher die verkehrte Stellung. Durch die gespannte Schnur f wird das federnde Plättchen b_1 von a_1 abgehoben, das Plättchen b_2 gegen a_2 angedrückt. Von der durch das Chronoskop gehenden Leitung ist das eine Ende mit a_1, das andere mit der Batterie, der zweite Pol dieser mit a_2 verbunden. Ausserdem sind die zwei federnden Plättchen b_1 und b_2 unter einander in leitender Verbindung.

Fig. 3.



Bei dieser Anordnung des Ganzen ist der Strom offen. Wird der Faden bei b_1 abgebrannt, so schlägt b_1 gegen a_1 und der Strom ist geschlossen. Hat sich die Aufhebung der Spannung bis an das andere Ende der Schnur fortgepflanzt, so springt b_2 von a_2 ab und der Strom ist wieder unterbrochen.

Wie schon im Eingange erwähnt worden, variirt die Schallgeschwindigkeit im Kautschuk sehr bedeutend mit der indivi

duellen Beschaffenheit der Versuchsstücke, es hat also auch die Ermittlung derselben an und für sich zunächst nur den Werth einer beiläufigen Bestimmung. Ich veröffentliche diesen Aufsatz auch nur, weil einerseits die Zahl der mit den Chronoskopen leicht auch während einer Vorlesung auszuführenden Versuche sehr gering ist und weil andererseits durch diesen Versuch zugleich nachgewiesen werden kann, dass die Geschwindigkeit der Fortpflanzung von Dehnungen oder Spannungen mit der des Schalles einerlei ist.

Über Schichtungen in schwingenden Flüssigkeiten.

Von **J. Stefan.**

Bei den Versuchen über den Einfluss der Wärme auf die Brechung des Lichtes in festen Körpern benützte ich ein Gefäss aus Weissblech zur Erzeugung von Wasserdampf. Nahe am Boden war in dieses Gefäss ein Glasrohr als Manometer eingeführt. Ich bemerkte, dass in dem horizontalen Theil dieses Rohres der Eisenrost, der in dem siedenden Wasser aufgewirbelt auch in dieses Rohr gelangte, immer rippenartig sich vertheilte, wenn die Wassersäule im Manometer in periodische Schwankungen gerieth. Diese mit dem Wasser in dem Rohr sich hin und her bewegenden Schichten waren um so regelmässiger und feiner, je regelmässiger und kleiner die Schwankungen der Wassersäule waren.

Ich habe später eine einfache Vorrichtung zur Erzeugung solcher Schichtungen in einer schwingenden Wassersäule zusammengestellt. Ein Glasrohr von ungefähr 6 Mm. innerem Durchmesser und etwa 500 Mm. Länge wurde zweimal rechtwinklig aufgebogen, so dass es ein Communicationsrohr bildete, dessen horizontaler Theil etwa dreimal so lang war, als jeder der verticalen Schenkel. Ich bemerke, dass diese Dimensionen nur als beispielsweise angegebene zu betrachten sind und der Versuch mit engen wie mit weiten, mit kurzen wie mit langen Röhren gelingt. Über den einen der beiden Schenkel wird ein Stück eines weichen Kautschukschlauches geschoben, dessen freies Ende durch ein Stöpselchen verschlossen werden kann.

Wird in dieses Communicationsrohr Wasser gefüllt, in welchem Eisenrost oder Eisenoxyd suspendirt ist, so klärt sich das Wasser alsbald und der Eisenrost bildet auf der unteren Seite

des horizontalen Röhrenstückes eine gleichmässige dünne Schicht. Statt der Eisenpulver können auch andere schwere Pulver genommen werden, doch erwiesen sich die genannten als diejenigen, welche die Erscheinung am besten zeigen.

Wird der Kautschukschlauch durch das Stöpselchen geschlossen, so kann man durch in schnellem Tacte auf einander folgende, auf den Schlauch ausgeübte Drücke die Flüssigkeitssäule in regelmässige Schwingungen versetzen.

Während die Flüssigkeit schwingt, theilt sich die auf dem Grunde der Röhre liegende Rostschichte in kleine Partien, in Schichten oder Rippen quer zur Röhrenaxe, welche in nahe gleichen Distanzen von einander sich befinden und mit der schwingenden Flüssigkeit sich hin und her bewegen.

Je genauer ein bestimmtes Tempo im Drücken des Schlauches eingehalten wird, desto gleichartiger werden auch die Rippen und ihre Distanzen. Letztere werden um so kleiner und gleichzeitig werden die Rippen um so zarter, je geringer die Excursionen der Flüssigkeitssäule sind.

Was die Ursache dieser Schichtenbildung anbetrifft, so liegt dieselbe darin, dass einige der Pulvertheilchen von dem bewegten Wasser leichter nach der einen Seite mitgerissen werden als nach der anderen und dafür gibt es zwei Gründe, erstens die grössere Geschwindigkeit der Bewegung der Wassertheilchen in der einen als in der umgekehrten Richtung und zweitens die ungleiche Beschaffenheit der Oberfläche der Theilchen auf den zwei entgegengesetzten Seiten.

Es richten sich deshalb auch die Abstände der Schichten von einander nach der Grösse der Excursionen der Wassertheilchen. Sie sind diesen nahezu gleich, wenn die Flüssigkeit durch sehr rasch ausgeführte Stösse in Schwingungen versetzt wird. Ertheilt man aber den Wassertheilchen nur geringe Geschwindigkeiten, wie dies bei regelmässigen Schwingungen von längerer Dauer der Fall ist, so findet das Mitrücken der Staubtheilchen nur auf sehr kleine Distanzen statt.

Bei rasch ausgeführten Stössen sieht man zugleich die feineren Staubtheilchen in Querwänden, welche bis zur Mitte der Röhre hinauf reichen können, sich erheben.

Solche Schichtungen sind eine in der Natur häufig auftretende Erscheinung, es zeigt sie z. B. der Sand an den Ufern, an welche die Wasserwellen schlagen, auch ist die Ursache, aus welcher solche Schichten entstehen, immer die oben hervorgehobene.

Diese Schichten sind das Analogon zu den von Kundt entdeckten Staubschichten in schwingenden Luftsäulen und entstehen nach meiner Ansicht auch die Kundt'schen Schichten dadurch, dass einige Staubtheilchen von der schwingenden Luft leichter nach der einen als nach der anderen Seite mitgerissen werden. Diese Schichten deuten also keineswegs auf hohe Obertöne oder auf der Schallbewegung eigenthümliche Zustände der Luft. Sie bilden das Mass für die Grösse der Excursionen der Lufttheilchen. Diese sind demnach gewöhnlich nicht so unendlich klein als man sonst anzunehmen pflegte, sie haben eine beträchtliche Grösse, sie können mehrere Millimeter betragen, ein Resultat, zu dem auch schon Töpler und Boltzmann[1] durch ihre Messung der Druckvariation in tönenden Pfeifen gelangt sind.

Es hat schon Cl. Neumann[2] in Prag eine Reihe von Versuchen ausgeführt, welche die hier gegebene Erklärung des Ursprunges der Kundt'schen Schichten unterstützen. Nach diesen Versuchen entstehen nämlich solche Schichten nicht nur, wenn die Luft in einer Röhre in stehende Schwingungen versetzt wird, sie können auch durch Anzünden einer Knallgasblase vor dem offenen Ende der einerseits geschlossenen Röhre, oder durch kräftiges Ausstossen der Luft, oder durch rasches Ausziehen eines Korkes, oder durch einen Stoss gegen das mit einer Blase überspannte Ende der Röhre, oder durch einen elektrischen Funken erzeugt werden.

Wichtig für die Analogie der hier beschriebenen Schichtungen mit den akustischen ist auch das von Cl. Neumann mit Hilfe intermittirender Beleuchtung gefundene Resultat, dass die Rippen nicht, wie Kundt annahm, ruhen, sondern in schwingender Bewegung begriffen sind.

---

[1] Pogg. Ann. CXLI. 321.
[2] Anzeiger 1870. Nr. XXVIII.

Nimmt man noch, dass nach Cl. Neumann der Abstand der Rippen bei der Erzeugung derselben durch Töne nicht in der ganzen Röhre gleich ist, sondern mit den Amplituden der aufeinander folgenden Theile einer stehenden Welle das gleiche Gesetz befolgt und dass ferner in geneigten Röhren die Staubrippen wandern und zwar immer bergab, so stimmt alles mit der oben gegebenen Erklärung der Kundt'schen Schichten so gut überein, dass man dieselbe als die richtige annehmen muss.

Es hat schon Kundt auf die Analogie der von ihm entdeckten Staubschichten mit dem Phänomen des geschichteten elektrischen Lichtes hingewiesen. Nach meiner Ansicht ist auch diese Erscheinung auf dieselbe Ursache zurückzuführen. Es erfahren in den Geissler'schen Röhren einige der Gastheilchen, welche hier die Rolle der Staub- oder Pulvertheilchen spielen, durch die abwechselnd entgegengesetzt gerichteten Partialentladungen einen stärkeren Bewegungsantrieb nach der einen als nach der andern Seite. Die Verschiedenartigkeit der Gastheilchen braucht man nicht einmal in einer von der Kugelform abweichenden Gestalt der Molecüle zu suchen, eine solche ist schon in der Mannigfaltigkeit der Bewegungszustände, in welchen sich die Molecüle in Folge ihrer Wärmebewegung befinden, gegeben.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LXVI. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1872. — HEFT VI BIS X.

(Mit 8 Tafeln und 19 Holzschnitten.)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1872.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

SECHSUNDSECHZIGSTER BAND.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1872.

INHALT.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXVI. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

6.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

XVI. SITZUNG VOM 6. JUNI 1872.

Herr Prof. Dr. Ew. Hering in Prag übersendet eine Abhandlung: „Zur Lehre vom Gesichtssinne. I. Mittheilung: Über successive Lichtinduction."

Herr Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung vom Herrn Dr. Haldor Topsöe aus Kopenhagen, betitelt: „Krystallographisch-chemische Untersuchungen."

Herr Prof. Dr. Th. Meynert übergibt eine Abhandlung: „Beitrag zur Kenntniss des *Thalamus opticus* und der ihn umgebenden Gebilde bei den Säugethieren," vom Herrn Auguste Forel.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

American Academy of Arts & Sciences: Memoirs. New Series. Vol. X, Part 1. Cambridge & Boston, 1868; 4⁰.

— Association for the Advancement of Science: Proceedings. XIXth Meeting. Cambridge, 1871; 8⁰.

Annales des mines. VIIe Série. Tome I. 1re Livraison de 1872. Paris; 8⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nr. 21. Paris, 1872; 4⁰.

Gesellschaft, österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VII. Band, Nr. 11. Wien, 1872; 4⁰.

— Königl. bayer. botanische, zu Regensburg: Flora. N. R. XXVII. & XXVIII. Jahrgang. Regensburg, 1869 & 1870; 8⁰. — Repertorium der periodischen botanischen Literatur. V. & VI. Jahrgang. 1868 & 1869. Regensburg, 1869 & 1870; 8⁰.

Jahres-Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten zu Prag. Vereinsjahr 1871—72. Prag, 1872; 8⁰.

Koch, F. E., und C. M. Wiechmann, Die Mollusken-Fauna des Sternberger Gesteins in Mecklenburg. I. Abtheilung. Neubrandenburg, 1872; 8⁰.

Moniteur scientifique-Quesneville. 365ᵉ Livraison. Mai 1872. Paris; 4⁰.

Nature. Nr. 135, Vol. VI. London, 1872; 4⁰.

Pessina, Luigi Gabriele, Considerazioni sui movimenti del Sole ovvero conseguenze emergenti dal moto translatorio del Sole. Messina, 1872; 8⁰.

Philomathie in Neisse: XVII. Bericht. 1869—1872. Neisse, 1872; 8⁰.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1872, Nr. 9. Wien; 4⁰.

„Revue politique et littéraire“ et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger“. Iʳᵉ Année (2ᵉ Série), Nr. 49. Paris & Bruxelles, 1872; 4⁰.

Société géologique de France: Bulletin. 2ᵉ Série, T. XXVIII. 1871. Nr. 2. Paris 1870 à 1871; 8⁰.

Society, The Chemical, of London: Journal. N. S. Vol. X, February—April 1872. London; 8⁰.

Soret, J.-Louis, François-Jules Pictet. Notice biographique. (Arch. des sciences de la Bibliothèque Universelle.) Genève, 1872; 8⁰.

Krystallographisch-chemische Untersuchungen.

Von Dr. **Haldor Topsöe** in Kopenhagen.

(Mit 6 Tafeln.)

VI. Reihe.[1]

Schwefelsaures Beryllium $BeSO^4 + 4H^2O$.

Tetragonal:

$$a : c = 1 : 0{\cdot}9461.$$

Beobachtete Formen:

(011).(110).

(Tab. I, Fig. 1.)

Dieses Salz ist früher von Awdejew untersucht worden; seine Zusammensetzung ist in den letzten Jahren von Klatzo bestätigt.

Er krystallisirt in schönen, wasserhellen, oft sehr grossen Combinationen eines Octaëders zweiter Ordnung mit dem Prisma. Die Flächen des Prisma's sind in der Regel gekrümmt. Häufig erscheinen die kleineren Krystalle als rhombische Prismen, indem die zwei einer Verticalzone angehörigen Flächenpaare des Octaëders säulenförmig ausgedehnt sind. Nicht selten kommen Zwillinge vor, nach dem gewöhnlichen Gesetze des tetragonalen Systemes ausgebildet: Umdrehungsaxe die Normale einer Octaëderfläche, welche selbst Zwillingsäquator ist. In einigen Fällen habe ich bei den prismatisch ausgebildeten Krystallen Durch-

---

[1] Von den früheren krystallographisch-chemischen Abhandlungen finden sich die über die Doppelhaloïdsalze des Platins und Palladiums in den „Oversigter over det kgl. danske Videnskabernes Selskab (1868, p. 124, 142; 1869, pag. 74, 246), während die Beobachtungen über die selensauren Salze 1870 als selbständige Arbeit ausgegeben ist.

kreuzungszwillinge beobachtet, denen ähnlich, welche häufig beim rhombischen selensauren Salze vorkommen (wie Fig. 4, Tab. I).

Wenn man das Octaëder als Octaëder zweiter Ordnung nimmt, was zweckmässig wegen der Isomorphie mit dem folgenden Salze erscheint, ergeben sich die Winkelverhältnisse an fünfzehn Krystallen gemessen:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Berechnet	Beobachtet
* 101 : 10$\bar{1}$	12	14	93° 10·5′	93° 10·5′
101 : $\bar{1}$01	5	5	86° 49·5′	86° 47′
101 : 011	10	13	58° 9′	58° 9·5′
101 : 110	—	—	60° 55′	—

Awdejew fand annähernd 101 : 011 = 58° 0′.

Der optische Character[1] ist: einaxig, negativ. Ich habe eine sehr grosse Anzahl von Krystallen aus verschiedenen Darstellungen untersucht, welche alle ganz unzweideutig die Einaxigkeit bestätigen. Eine Platte bis zu 100° erwärmt, zeigte auch gar keine Veränderung des Kreuzes.

Specifisches Gewicht der Krystalle: 1·725.

Selensaures Beryllium $BeSeO^4 + 4H^2O$.

Rhombisch:

$$a : b : c = 1 : 0·9602 : 0·90275.$$

Beobachtete Formen:

(011).(101).(021).(111).(001).
(Tab. I, Fig. 2—4.)

Dieses Salz, durch Auflösen von kohlensaurem Beryllium in der berechneten Menge Selensäure dargestellt, krystallisirt sehr leicht aus der wässerigen Lösung in farblosen, regelmässig aus-

[1] Die Resultate einer eingehenden optischen Untersuchung von diesem und mehreren anderen hier besprochenen Salzen, welche ich gemeinschaftlich mit Herrn Christiansen ausgeführt habe, finden sich in einer grösseren krystallographisch-optischen Abhandlung, welche wir an die königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Kopenhagen einlieferten. Die Abhandlung ist noch nicht gedruckt worden.

gebildeten, nach der längsten Axe säulenförmigen Combinationen zweier Prismen (011) und (101). Seltener und jedenfalls immer sehr untergeordnet sind das Prisma (021), welches die scharfen Kanten des Prisma's (011) zuschärft, und die Pyramide (111), welche die Combinationsecken der zweien Hauptprismen zuspitzt. Ausser diesen Formen tritt die Endfläche (001) fast immer spurenweise auf. Die Flächen (101) sind gewöhnlich krumm und uneben.

Bisweilen beobachtet man Durchkreuzungszwillinge wie Tab. I, Fig. 4. — Keine bemerkbaren Spaltungsrichtungen.

Die Messungen an siebzehn Krystallen ergaben als Mittelwerthe:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet	Berechnet
*011 : 01$\bar{1}$	8	8	93° 32′	—
011 : 0$\bar{1}$1	7	7	86° 31′	86° 28′
011 : 021	3	5	18° 54′	18° 46′
021 : 01$\bar{1}$	2	2	74° 50′	74° 46′
011 : 101	8	10	57° 13′	57° 16′
*101 : 10$\bar{1}$	8	8	95° 51′	—
101 : 111	1	1	c 34° 30′	34° 55′
111 : 1$\bar{1}$1	—	—	—	69° 50′
011 : 111	—	—	—	33° 20′
111 : $\bar{1}$11	—	—	—	66° 40′
111 : 11$\bar{1}$	—	—	—	75° 0′

Das Salz ist, wie aus den Kantwinkeln ersichtlich, mit dem tetragonalen schwefelsauren Salze isomorph. Mit Rücksicht auf seine optischen Eigenschaften [1] ist es zwar entschieden zweiaxig, aber die Ebene der optischen Axen ist dem krystallographischen Hauptschnitte *ac* und die erste Mittellinie der Hauptaxe *c* parallel; der Character negativ:

$(\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\underline{\mathfrak{a}})$.

---

[1] Aus der oben erwähnten Abhandlung, wo die Details der Untersuchungen niedergelegt sind.

Der Winkel zwischen den optischen Axen ist

$(AB) = 40° 43'$ [1] $AB = 26° 48'$

und die Hauptbrechungscoëfficienten für D

$\mu_a = 1{\cdot}5027$ $\mu_b = 1{\cdot}5007$ $\mu_c = 1{\cdot}4664$,

von welchen die zwei, welche den krystallographischen Axen a und b entsprechen, nur in der dritten Decimalstelle verschieden sind. — Eine Platte senkrecht zur Mittellinie gab bei Erwärmung

$Tp = 24°$	$(AB) = 40° 40'$
60°	40° 24'
75°	40° 14'

so dass es also scheint, als ob die Axen sich bei höherer Temperatur ein wenig nähern.

Die Zusammensetzung wurde dadurch bestimmt, dass das Salz in Wasser gelöst mit Chlorwasserstoffsäure so lange behandelt wurde, bis alles Selen zu seleniger Säure reducirt war. Das Selen wurde durch schwefligsaures Natron als Selen ausgefällt und im Filtrate die Beryllerde durch Ammon und Schwefelammonium niedergeschlagen:

0·999 Gr. gab 0·345 Gr. Se = 34·53 % Se und 0·1215 Gr. BeO = 12·11 %.

0·857 Gr. verlor bei 100° 0·1425 Gr. Wasser = 16·63 %; der Rest gab 0·297 Gr. Selen = 34·65 % und 0·1065 Gr. BeO = 12·43 %.

Der Formel $BeSeO^4 + 4H^2O$ entspricht:

Se	79	35·21	34·53	34·65
O^3	48	21·38		
BeO	25·4	11·32	12·11	12·43
$4H^2O$	72	32·09		
	224·4	100		

Das Salz verliert bei 100° 2 Mol. Wasser: Gefunden 16·63, Berechnet 16·05.

Das spec. Gewicht der Krystalle (aus zwei Versuchen) 2·029.

---

[1] Aus späteren Versuchen habe ich für $((AB))$ in Oel gemessen, den Werth 27° 18' gefunden, woraus $(AB) = 40° 34'$ und $AB = 26° 43'$.

Isomorphe Mischungen des schwefelsauren und selensauren Berylliums.

Obgleich die zwei Salze verschiedenen Krystallsystemen angehören, bilden sie dennoch, wenn ihre Lösungen zusammengebracht und einem langsamen Verdunsten — bei gewöhnlicher Temperatur über Schwefelsäure — unterworfen werden, wirklich isomorphe Mischungen, welche in den tetragonalen Formen des schwefelsauren Salzes krystallisiren, wenn sie auf 1 Atom Selensäure 7·33 Atomen oder mehr Schwefelsäure enthalten, während sie rhombisch, optisch zweiaxig erscheinen, wenn der Gehalt an Schwefelsäure weniger als 4 Atomen auf 1 Atom Selensäure beträgt.

Ich habe eine Reihe von Versuchen angestellt mit Lösungen, welche enthielten:

a) ungefähr gleiche Molecüle der zweien ursprünglichen Salze,

b) 1 Molecül des selensauren und 3 Mol. des schwefelsauren Salzes,

c) 1 Molecül des selensauren und 5 Mol. des schwefelsauren Salzes.

A. Rhombische Mischungen $Be(SSe)O^4 + 4H^2O$.

a) Die Lösung von gleichen Molecülen lieferte, bei gewöhnlicher Temperatur verdunstet, fünf verschiedene Krystallisationen, die sämmtlich in den gewöhnlichen rhombischen Combinationen (011).(101) des selensauren Salzes erschienen. Die Krystalle waren alle klein, prismatisch nach (011) ausgebildet; ihre Flächen gewöhnlich uneben, namentlich die der Form (101), welche fast immer krumm erschienen.

Erster Krystallanschuss enthaltend 1 Atom Se: 1·5 Atom Schwefel.

Die Zusammensetzung dieses wie der folgenden Salze wurde auf die Weise bestimmt, dass die Selensäure durch anhaltende Behandlung mit Chlorwasserstoffsäure zu seleniger Säure reducirt wurde; das Selen alsdann durch Schwefelwasserstoff als SeS^2 ausgefällt und im Filtrate die Schwefelsäure mit Chlorbaryum niedergeschlagen.



1·307 Gr. gab 0·3715 Gr. SeS^2 = 16·07 % Selen und 0·923 Gr. $BaSO^4$ entsprechend 9·69 % Schwefel.

Die Formel $Be(0·6 S . 0·4 Se)O^4 + 4H^2O$ erfordert

		Gefunden
0·6 S	9·79 %	9·69
0·4 Se	16·11	16·07.

Die Krystalle waren sehr schlecht ausgebildet; eine Platte, senkrecht zur krystallographischen Hauptaxe *c* geschnitten, ergab in Öl ((*AB*)) = 26° 36′.

Der Character ist wie beim selensauren Salze negativ.

Zweiter Anschuss: 1 Atom Se : 1·6 Atom Schwefel.

1·365 Gr. gaben 0·385 Gr. SeS^2 = 15·5 % Selen und 0·985 Gr. $BaSO^4$ = 9·90 % Schwefel entsprechend.

1·209 Gr. gaben 0·3315 Gr. SeS^2 = 15·15 % Selen und 0·881 Gr. $BaSO^4$ = 10·01 % S.

Die Formel $Be(0·62 S 0·38 Se)O^4 + 4H^2O$ gibt

		Gefunden
0·62 S	10·15 %	9·95
0·38 Se	15·38	15·33.

Die krystallographische Untersuchung ergab als Mittelwerthe von Messungen an zehn Krystallen, welche indessen keine sehr genauen Bestimmungen erlaubten:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet
011 : 01$\bar{1}$	8	8	93° 40′
011 : 101	5	5	57° 35′.

Der Winkel zwischen den optischen Axen in Öl gemessen, beträgt als Mittel aus Messungen an sechs Krystallen (26° 22′—25° 56′).

((*AB*)) = 26° 13′, woraus (*AB*) = 38° 54′.

Der Character der Krystalle wie bei den übrigen rhombischen Mischungen negativ.

Dritter und vierter Anschuss: 1 At. Selen : 1·56 At. Schwefel.

1·1145 Gr. der dritten Auskrystallisation gaben 0·3145 Gr. SeS^2 = 15·59% Selen und 0·779 $BaSO^4$, 9·77% Schwefel entsprechend.

0·993 Gr. des vierten Anschusses gaben 0·280 Gr. SeS^2 = 15·59% Selen und 0·712 Gr. $BaSO^4$ = 9·85% Schwefel.

Die Formel Be(0·61 S 0·39 Se)O^4 + $4H^2O$ gibt

		Gefunden	
0·61 S	9·97%	9·77	9·85
0·38 Se	15·72	15·59	15·59.

Die krystallographischen Mittelwerthe aus Beobachtungen an zehn Krystallen sind:

	Anzahl der Krystalle	Messungen	Beobachtet
101 : 10$\bar{1}$	7	8	95° 30′
101 : 011	7	7	57° 26′.

Der optische Axenwinkel in Öl gemessen, ergab sich aus eilf Beobachtungen (25° 52′ bis 26° 24′)

$$((AB)) = 26° 6', \text{ woraus } (AB) = 38° 44'.$$

Der fünfte Anschuss enthielt auf 1 Atom Selen circa 1·44 Atom Schwefel.

0·590 Gr. gaben 0·177 Gr. SeS^2 = 16·57% Se und 0·398 Gr. $BeSO^4$ = 9·5% Schwefel.

Der Formel Be(0·59 S 0·41 Se)O^4 + $4H^2O$ entspricht

		Gefunden
0·59 S	9·51%	9·5
0·41 Se	16·47	16·57.

Die Krystalle waren zu einer krystallographischen Untersuchung sehr wenig geeignet, indem die Flächen zerfressen und uneben erschienen. An zweien kleinen Nadeln habe ich gefunden

101 : 10$\bar{1}$	95° 23′
011 : 01$\bar{1}$	93° 22′.

Den Winkel zwischen den optischen Axen in Öl gemessen fand ich in vier Versuchen (25° 55—26° 1′)

$$((AB)) = 25° 57', \text{ woraus } (AB) = 38° 31'.$$

Die sämmtlichen Auskrystallisationen haben, wie aus den Versuchen ersichtlich, ungefähr dieselbe Zusammensetzung, indem das Atomenverhältniss des Selen- und des Schwefelgehalts nur zwischen 1·63 und 1·44 Atomen Schwefel auf 1 Atom Selen schwankte, so dass die kleinen Verschiedenheiten, welche die verschiedenen Krystallanschüsse mit Rücksicht auf die Kantenwinkel und den optischen Axenwinkel gezeigt haben, wohl kaum mit der Variation der Zusammensetzung in Verbindung steht. Wir können demnach die verschiedenen Bestimmungen zusammenfassen als Ausdrücke der Verhältnisse bei einer Mischung von der Mittelzusammensetzung

$$Be(0{\cdot}6\,S\;0{\cdot}4\,Se)O^4 + 4H^2O$$

und erhalten dann als recht zuverlässige Werthe:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet
101 : 01$\bar{1}$	11	11	93° 36′
101 : 10$\bar{1}$	9	10	95° 27′
101 : 011	12	12	57° 29′

und für den Winkel zwischen den optischen Axen aus 22 Beobachtungen

$$((AB)) = 26° 6', \text{ woraus } (AB) = 38° 44'.$$

Eine Platte, aus einem etwas grösseren Krystalle geschnitten, gab, bis zu 110° erwärmt, folgende Werthe für den optischen Axenwinkel in der Luft:

$T =$	$(AB) =$
22°	38° 39′
50°	38° 20
70°	38° 0′
80°	38° 5′
90°	38° 2′
110°	37° 56′,

wo eine sehr deutliche Abnahme des Winkels zwischen den beiden Axen bei steigender Temperatur bemerkbar ist.

b) Aus der Lösung, auf 1 Molecül $BeSeO^4$, 3 Mol. $BeSO^4$ enthaltend, erhielt ich erst — in zweien Anschüssen — tetragonale Krystalle. Die Mutterlauge gab dann zwei Auskrystallisationen von rhombischen, optisch zweiaxigen Krystallen, nämlich

Dritter Anschuss mit dem Verhältnisse 1 Atom Selen auf 3·95 Atome Schwefel.

1·141 Gr. gaben 0·176 Gr. SeS^2 = 8·52% Selen und 1·1395 Gr $BaSO^4$ 13·71% Schwefel entsprechend.

Die Formel $Be(0·202\, Se\; 0·798\, S)O^4 + 4H^2O$ entspricht

		Gefunden
0·202 Se	8·52%	8·52
0·798 S	13·67	13·71.

Die Krystalle, die gewöhnlichen säulenförmigen Combinationen des selensauren Salzes, waren zu schlecht ausgebildet, um irgend zuverlässige Messungen geben zu können. Ich habe mich daher dazu beschränkt, den Winkel zwischen den optischen Axen zu messen: An fünf Krystallen beobachtete ich 26° 17′ bis 26° 40′ oder im Mittel

$$((AB)) = 26° 28', \text{ woraus } (AB) = 39° 18'.$$

Die letzte Auskrystallisation enthielt 1 Atom Se: 2·16 Atom Schwefel.

0·886 Gr. bei 100° getrocknet (wobei das Salz zwei Molecüle Wasser verliert) gaben 0·2605 Gr. SeS^2 = 16·24% Selen und 0·917 Gr. $BaSO^4$ 14·21% Schwefel entsprechend.

Die Formel $Be(0·3165\, Se\; 0·6835\, S)O^4 + 2H^2O$ erfordert

		Gefunden
0·3165 Se	15·94%	16·24
0·6835 S	13·94	14·21.

Die Krystalle dieses Anschusses waren zu klein und schlecht ausgebildet, um zu krystallographischen und optischen Versuchen dienen zu können. Ich habe nur constatirt, dass sie optisch

zweiaxig waren, und dass die Axen in Öl einen Winkel von 26—27° einschliessen.

c) Eine Lösung von einem Molecüle $BeSeO^4$ und fünf Molecülen $BeSO^4$ gab erst drei Krystallisationen von optisch einaxigen Krystallen.

Der vierte Anschuss, welchen ich leider durch einen Unfall verhindert ward einer chemischen Untersuchung zu unterwerfen, dessen Zusammensetzung indessen zwischen 7·33 und 2·35 Atomen Schwefel auf 1 Atom Selen lag, gab als Mittel von fünf Messungen in Öl, zwischen 26° 13 und 26° 30 schwankend:

$$((AB)) = 26° 18', \text{ woraus } (AB) = 39° 3'.$$

Die fünfte Auskrystallisation enthielt 1 Atom Selen auf 2·35 Atomen Schwefel.

1·1685 Gr. gaben 0·2615 Gr. SeS^2 = 12·36 % Selen und 0·996 Gr. $BaSO^4$, 11·71 % Schwefel entsprechend.

Die Formel $Be(0·3\ Se . 0·7\ S)O^4 + 4H^2O$ gibt:

		Gefunden
0·3 Se	12·37 %	12·36
0·7 S	11·70 %	11·71.

An einem Krystalle erhielt ich in Öl

$$((AB)) = 26° 14'.$$

B. Tetragonale Mischungen.

Die Lösung b ($BeSeO^4$, $3BeSO^4$) gab, wie oben erwähnt, erst zwei Anschüsse aus optisch einaxigen Krystallen.

Erste Auskrystallisation enthielt 8·51 Atome Schwefel auf 1 Atom Selen.

0·9075 Gr. gaben 0·0755 Gr. SeS^2 = 4·60 % Selen und 1·0465 Gr. $BaSO^4$ = 15·83 % Schwefel.

Die Formel $Be(0·105\ Se\ 0·895\ S)O^4 + 4H^2O$ gibt

		Gefunden
0·105 Se	4·56 %	4·60
0·895 S	15·71	15·83.

Die Krystalle bestanden aus der gewöhnlichen Combination des schwefelsauren Berylliums: (011).(110); das Prisma war sehr untergeordnet; die Krystalle nach einer der Nebenaxen prismenförmig verlängert.

Aus ziemlich schwankenden Messungen an acht Krystallen erhielt ich als Mittelwerthe:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet
011 : 01$\bar{1}$	8	9	92° 58′
011 : 101	4	4	58° 18′.

Der optische Character (an den acht Krystallen bestimmt) ist wie beim schwefelsauren Salze negativ. Eine Krystallplatte bis auf 100° erwärmt, zeigt keine Veränderung des schwarzen Kreuzes.

Zweiter Anschuss 1 Atom Selen: 7·68 Atome Schwefel. 1·099 Gr. gaben 0·099 Gr. SeS^2 = 4·98 % Selen und 1·239 Gr. $BaSO^4$, 15·48 % Schwefel entsprechend.

Der Formel $Be(0{\cdot}115\ Se\ 0{\cdot}885\ S)O^4 + 4H^2O$ entspricht:

		Gefunden
0·115 Se	4·98 %	4·98
0·885 S	15·49	15·48

Die Krystalle waren, wie die der ersten Auskrystallisation alle optisch einaxig, negativ.

Aus der Lösung *c*, 1 Molecül $BeSeO^4$ auf 5 Molecülen $BeSO^4$ enthaltend, krystallisirte der grösste Theil der Salze erst als tetragonale Mischungen aus. Die Mutterlauge gab dann, wie erwähnt, selenreichere rhombische Krystallisationen.

Erster Krystallanschuss 1 Atom Selen auf 10·1 Atome Schwefel.

1·211 Gr. gaben 0·0865 Gr. SeS^2 = 3·95 Selen und 1·428 $BaSO^4$ = 16·19 % S.

$Be(0{\cdot}09\ Se\ 0{\cdot}91\ S)O^4 + 4H^2O$ erfordert

		Gefunden
0·09 Se	3·91 %	3·95
0·91 S	16·03	15·19.

Als Mittel von 12 Messungen an 8 recht guten Krystallen erhielt ich

$$011 : 01\bar{1} = 93° 9',$$

welcher Werth vollständig mit dem des schwefelsauren Salzes übereinstimmt. Eine Krystallplatte bis auf 100° erwärmt, zeigte keine Veränderung des Axenkreuzes.

Zweiter und dritter Anschuss enthielten auf 1 Atom Selen respective 7·72 und 7·33 Atome Schwefel.

1·010 Gr. des zweiten Anschusses gaben 0·0915 Gr. SeS^2 = 5·01 % Selen und 1·152 Gr. $BaSO^4$ = 15·67 % Schwefel.

0·8525 Gr. der dritten Auskrystallisation gaben 0·081 Gr. SeS^2 = 5·25 % Selen und 0·967 Gr. $BaSO^4$ = 15·58 % Schwefel.

Die Formeln

$Be(0·115\,Se\,0·885\,S)O^4 + 4H^2O$ und $Be(0.12\,Se\,0·88\,S)O^4 + 4H^2O$ erfordern:

		2. Anschuss			3. Anschuss
0·115 Se	4·96 %	5·01	0·12 Se	5·18 %	5·25
0·885 S	15·50	15·67	0·88 S	15·39	15·58.

Die Krystalle, welche zur krystallographischen Untersuchung nicht geeignet waren, hielten sich bei Erwärmung bis auf 100°, ohne Veränderung des optischen Characters zu zeigen.

Aus diesen Versuchen geht hervor, dass die zwei Salze $BeSO^4 + 4H^2O$ und $BeSeO^4 + 4H^2O$, ungeachtet der Verschiedenheit ihrer krystallographischen Symmetrieverhältnisse, im engern Verstande isomorph sind, indem sie ausser den nicht zu verkennenden Analogien — eine gewisse Übereinstimmung in den Dimensionsverhältnissen, in der Ausbildung der Krystalle, in den Molecularvoluminen [1] und endlich auch in ihrem optischen Verhältnisse — zugleich wirkliche isomorphe Mischungen bilden, welche in ihren Eigenschaften sich bald dem einen bald dem andern der zweien einfachen Salze nähern. Diese Thatsache, dass zwei Salze, verschiedenen Krystallsystemen angehörig,

[1] $BeSO^4 + 4H^2O$ = 102·8 $BeSeO^4 + 4H^2O$ = 110·6, wo die Differenz, wie ich früher gezeigt habe (vgl. Krystallographisk-kemiske Undersögelser over de selensure Salte, Kopenhagen 1870. pag. 58), wesentlich von der Verschiedenheit der Säuren abhängt.



wirklich nach variablen Verhältnissen zusammenkrystallisiren können, scheint darauf zu deuten, dass die Symmetrieverhältnisse der verschiedenen Krystallsysteme im Besitze einer gewissen Latitüde sind.

Ich habe übrigens einige neuen Untersuchungen begonnen, in welchen ich ähnliche Verhältnisse in andern Fällen der Isomorphie zwischen Salzen, welche verschiedenen Krystallsystemen angehören, nachzuweisen versuche.

Schwefelsaures Platindiamin[1] $N^4H^{12}PtSO^4$.

Tetragonal:

$$a : c = 1 : 1\cdot0250.$$

Beobachtete Formen:

(111).(001).(113).(201).
(Tab. I, Fig. 5, 6.)

Das Salz, welches von Peyrone dargestellt und analysirt worden ist, krystallisirt in sehr schönen, farblosen, ganz durchsichtigen diamantglänzenden Octaëdern durch die basische Endfläche abgestumpft. Sehr häufig sind sie wie Fig. 6 nach diesem Flächenpaare tafelförmig abgeplattet. Sehr untergeordnet kommen die Flächen des dreifach stumpferen Octaëders vor; etwas besser ausgebildet sind die Flächen des Octaëders zweiter Ordnung (201), welche die Mittelecken der Hauptform zuschärfen. Die Flächen dieses Octaëders treten selten vollzählig auf.

In optischer Beziehung sind die Krystalle negativ.

Die Mittelwerthe aus Messungen an 6 Krystallen, welche sich zum genauen Messen sehr gut eigneten, sind:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet	Berechnet
001 : 111	4	8	55° 25′	55° 24′
001 : 11$\bar{1}$	2	2	124° 40′	124° 36′
*111 : 11$\bar{1}$	4	5	69° 12′	—
111 : $\bar{1}$11	2	2	110° 47′	110° 48′
111 : 113	—	—	—	29° 36·5′
001 : 113	1	1	c 25° 10′	25° 47·5′

[1] Gerhardt's schwefelsaures Diplatosamin.

	Anzahl der Krystalle	Messungen	Beobachtet	Berechnet
111 : $\bar{1}$11	5	9	71° 6′	71° 11·5′
111 : 1$\bar{1}\bar{1}$	4	4	108° 46·5′	108° 48·5′
001 : 201	5	6	63—64°	64° 0′
201 : 20$\bar{1}$	—	—	—	52° 0′
111 : 201	3	6	39° 23′	39° 27·5′
201 : 021	—	—	—	79° 43′.

Selensaures Ammonium $(NH^4)_2SeO^4$.

Monoklinisch:

$a : b : c = 1{\cdot}2065 : 1 : 1{\cdot}9013 \quad ac = 64° 27'$

Beobachtete Formen:

(001)·(100)·(10$\bar{2}$)·(011)·(111)·($\bar{1}$11).

(Tab. II, Fig. 7—12.)

Das Salz, durch Übersättigung einer Lösung von Selensäure mit Ammoniak und Abdampfen der Lösung theils bei gelinder Wärme, theils bei gewöhnlicher Temperatur über Schwefelsäure dargestellt, krystallisirt sehr leicht in recht schönen, farblosen, durchsichtigen säulenförmigen oder tafelförmigen Combinationen der Flächenpaare (001).(100).(10$\bar{2}$) mit dem Klinodoma (011) und den am häufigsten ziemlich untergeordneten Flächen der zwei Hemipyramiden. Die Krystalle sind oft sehr regelmässig ausgebildet (wie Fig. 8) und in diesem Falle durch Vorherrschen von (001) zugleich mehr oder weniger tafelförmig; die — durch Ausbildung der Flächen (001).(100).10$\bar{2}$) im Gleichgewicht — säulenförmigen Krystalle, zeichnen sich in der Regel dadurch aus, dass die Flächen am Ende der Orthodiagonale sehr unregelmässig — wie Fig. 10 — oder gar unvollzählig — wie Fig. 9 — ausgebildet sind.

Zwillingsbildung ist nicht selten; Zwillingsaxe eine Normale zur Fläche (100); die Fläche selbst Umdrehungsäquator. Die Zwillinge (Fig. 11) haben das Aussehen eines rhombischen Prisma's.

Ausgezeichnete Spaltbarkeit parallel den Flächen (100) und (001). Die Mittelwerthe der Messungen an 10 Krystallen sind:

	Anzahl der Krystalle	Messungen	Beobachtet	Berechnet
*100 : 001	5	5	64° 27′	—
$\bar{1}$00 : 001	2	2	115° 33′	115° 33′
001 : $\bar{1}$02	3	4	47° 3′	47° 7′
*$\bar{1}$00 : $\bar{1}$02	3	3	68° 26′	—
*001 : 011	4	4	59° 45·5′	—
011 : 01$\bar{1}$	2	2	c 60° 35′	60° 29′
100 : 111	5	5	44° 2′	44° 0′
100 : 011	3	3	77° 30′	77° 27′
011 : $\bar{1}$11	1	1	43° 2′	43° 7′
011 : 111	2	2	33° 26′	33° 27′
111 : $\bar{1}$11	1	1	76° 24′	76° 34′
100 : $\bar{1}$11	3	3	59° 34′	59° 26′
011 : $\bar{1}$02	—	—	—	69° 57′
$\bar{1}$02 : $\bar{1}$11	2	3	55° 48′	55° 58′
011 : 11$\bar{1}$	1	1	c 53° 54′	54° 5′
111 : 1$\bar{1}$1	—	—	—	75° 52·5′
$\bar{1}$11 : $\bar{1}\bar{1}$1	—	—	—	99° 18′
001 : 111	5	6	52° 48′	52° 59′
001 : $\bar{1}$11	1	2	81° 53′	81° 49′
111 : 11$\bar{1}$	1	1	45° 5·5′	45° 12′
($\bar{1}$02)′ : (10$\bar{2}$)″	1	1	43° 11′	43° 8′.

Die Ebene der optischen Axen ist senkrecht zur Symmetrieebene; die erste Mittellinie senkrecht zur Krystallaxe *b* und bildet mit der Hauptaxe *c* einen Winkel von 3° 19′. Der Character im spitzen Axenwinkel ist positiv; die zweite Mittellinie der Symmetrieaxe parallel. — Eine Platte parallel dem Symmetrieplane geschnitten gab

10$\bar{2}$: c = 24° 50′ und 001 : c = 22° 11′.

Hieraus erhält man als Mittel 001 : c = 22° 14 und das Orientationsschema

(001) a c = 22° 14′. (Tab. II, Fig. 12.)

Die optischen Axen sind in den natürlichen Krystallen durch das Flächenpaar (001) sichtbar. Eine Platte senkrecht zur ersten Mittellinie gab [1]:

---

[1] An einer andern, nicht ganz zur Mittellinie senkrechten Platte erhielt ich ((*AB*)) = 37° 48 und (*AB*) = 57° 20′.

((*AB*)) = 37° 10′, woraus (*AB*) = 55° 50′.

Die Zusammensetzung ergab sich aus folgenden Versuchen, wo die Selensäure durch Chromwasserstoffsäure zu seleniger Säure reducirt, und alsdann das Selen durch schwefligsaures Natron ausgefüllt wurde.

0·927 Gr. gaben 0·406 Gr. Selen = 43·80%
0·994 Gr. gaben 0·432 Gr. Selen = 43·51.

Die Formel $(NH^4)_2SeO^4$ erfordert 44·14% Selen.

Es unterliegt demnach gar keinem Zweifel, dass das Salz, welches neutral reagirt und keine selenige Säure enthält, dieselbe Zusammensetzung hat, wie das von Herrn v. Lang[1] beschriebene rhombische, mit dem schwefelsauren Ammoniak isomorphe Salz, mit welchem es in Hinsicht auf die krystallographischen Eigenschaften in gar keiner Beziehung steht. Es scheint übrigens, dass Herr v. Lang schon früher[2] dasselbe Salz gehabt hat in kleinen nadelförmigen Krystallen, „durch ein Prisma von 42° 55′ gebildet, dessen spitze Seitenkanten abgestumpft waren“. Die optischen Axen sind in den Prismenflächen sichtbar, „jedoch ist die erste Mittellinie sehr geneigt zur Prismenfläche, während die zweite Mittellinie parallel zur Längenrichtung ist. Die optischen Axen selbst schliessen einen bedeutend kleineren Winkel ein, als bei den ersten gewöhnlichen Krystallen“ (wo er ungefähr $78^1/_2$° ist).

Das Prisma mit seiner Abstumpfung ist wahrscheinlich ein Zwilling gewesen, bei welchem die Winkelverhältnisse sind:

$$(\bar{1}02)':(10\bar{2})'' = 43°\ 8 \qquad (001)':(00\bar{1})'' = 51°\ 6$$
$$(001):(100) = 64°\ 27 \qquad (\bar{1}02):(\bar{1}00) = 68°\ 26',$$

wo die Winkeldifferenzen wegen der Kleinheit der Krystalle wohl unbeachtet geblieben sind. Auch das optische Verhalten spricht für die Annahme der Identität.

Ich habe mehrmals die Darstellung des Salzes wiederholt; sowohl in ammoniakalischer als in neutraler Lösung erhielt ich

[1] Sitzungsberichte d. k. k. Akademie. XLV, 109.
[2] L. c. p. 110.

immer das monoklinische Salz, welches wohl jedenfalls das gewöhnlichste sein muss. Unter welchen Bedingungen das rhombische Salz auskrystallisirt, ist mir unbekannt.

Specifisches Gewicht der Krystalle: 2·162—2·192.

Unterschwefelsaures Calcium $CaS^2O^6 + 4H^2O$.

Rhomboëdrisch:

An einigen sehr kleinen, zum Messen gut geeigneten, sechsseitigen Tafeln: die Endfläche (111) durch dihexaëdrische Randflächen der zwei Hauptrhomboëder $\pi(100).\pi(22\bar{1})$ begrenzt beobachtete ich die zwei Winkel

$$111:100 = 59° \, 58'$$
$$100:1\bar{2}\bar{2} = 60° \, 7{\cdot}5,$$

woraus man für (111).(100) 60° 3′ als sehr wahrscheinlichen Werth erhält. — An grössern Krystallen, welche sich nicht messen liessen, beobachtete ich kleine Flächen der beiden ²/₃ schärferen Rhomboëder [1], welche gewöhnlich, wie die beiden Hauptrhomboëder dihexaëdrisch ausgebildet, an allen Randkanten vorkommen. An einigen Krystallen kommen nur die Flächen des einen ²/₃ schärferen Rhomboëders vor; in diesem Falle treten indessen, einer Zwillingsbildung durch Umdrehung nach der Basis zufolge, seine oberen und unteren Flächen als Zuschärfungen der drei abwechselnden Randkanten der Tafeln auf.

Das specifische Gewicht (aus drei Versuchen) 2·180.

Unterschwefelsaures Mangan $MnS^2O^6 + 6H^2O$.

Triklinisch:

$a:b:c = 0{\cdot}6734:0{\cdot}9704:1.$ Marignac

001 : 010 = 91° 17′ 001 : 100 = 62° 46′ 100:010 = 86° 5′

$\xi = 86° \, 32'$ $\eta = 117° \, 24'$ $\zeta = 95°4'$.

Die Krystalle sind selten vollständig ausgebildet; gewöhnlich trifft man nur kammförmige Aggregate, aus parallel zusammen-

---

[1] 111 : 711 = c 50°.

gewachsenen Prismen ohne Endflächen gebildet. Herr Marignac[1] hat indessen die folgenden Formen beobachtet:

$$(110).(\bar{1}10).(010).(001).(\bar{1}01).(100),$$

von welchen nur die drei ersten an den gewöhnlichen Krystallen vorkommen. Die Messungen sind wegen der schlechten Ausbildung nicht im Besitze von sehr grosser Genauigkeit; indessen stimmen einige Bestimmungen, welche ich gemacht habe, sehr gut mit den des Herrn Marignac; ich beschränke mich daher dazu, zwei Messungen an Spaltungsflächen hier anzuführen, welche zeigen, dass die Spaltungsrichtungen in diesem Salze dieselben sind, wie bei den folgenden isomorphen Salzen; es ist nämlich die Spaltbarkeit vollkommen parallel (110) und (1$\bar{1}$0), sehr gut nach (010)

		Marignac
110 : 1$\bar{1}$0	63° 30′	63° 20′
$\bar{1}$10 : 010	61° 16′	61° 10′.

Das specifische Gewicht 1·757 (aus zwei Versuchen).

Unterschwefelsaures Magnium $MgS^2O^6 + 6H^2O$.

Triklinisch:

$$a : b : c = 0{\cdot}6898 : 0{\cdot}9858 : 1$$

$$001:010 = 89°\,44' \quad 001:100 = 61°\,48' \quad 100:010 = 86°\,27'$$

$$\xi = 89°\,32' \quad \eta = 118°\,10' \quad \zeta = 93°\,21$$

(Tab. II, Fig. 13. Tab. III, Fig. 14, 15.)

Beobachtete Formen:

$$(110).(\bar{1}10).(010).(001).(\bar{1}\bar{1}2).(\bar{1}01).(\bar{1}12).$$

Das Salz kommt sehr selten in vollständig ausgebildeten Krystallen vor; in der Regel erhält man es als gestreifte, oft nadelförmige Prismen, bestehend aus den Flächenpaaren (110). (010), zu welchen seltener ($\bar{1}$10) sich gesellt. Häufig sind sie nach (010) tafelförmig; immer sind sie nach der Hauptaxe *c*

[1] Recherches sur les formes cristallines de quelques composés, 1855, p. 31.

verlängert. Wenn Endflächen vorhanden, sind sie gewöhnlich so klein und undeutlich, dass an Messungen gar nicht zu denken ist; nur an zwei kleinen Krystallen gelang es mir, einige recht zuverlässige Bestimmungen zu erhalten, welche erlaubten, die Indices der Flächen festzustellen. Der eine Krystall (Tab. III, Fig. 15), nach (010) stark abgeplattet, zeigte die Formen (001) und ($\bar{1}\bar{1}2$), der andere (Fig. 14), an welchem die zwei Prismen vorherrschend waren, war durch die Formen ($\bar{1}01$) und ($\bar{1}12$) geschlossen.

Spaltbarkeit ausgezeichnet parallel (110) und ($1\bar{1}0$), gut nach (010).

Die Mittelwerthe von Messungen an sechs Krystallen sind:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet	Gerechnet
*110 : $1\bar{1}0$	3	3	63° 17′	—
*$\bar{1}10$: 010	4	4	60° 56′	—
010 : 110	6	7	55° 41′	55° 47′
$\bar{1}10$: $\bar{1}01$	1	1	*c* 52½°	51° 26′
*$\bar{1}10$: $\bar{1}\bar{1}2$	1	1	90° 26′	—
$0\bar{1}0$: $\bar{1}01$	1	1	87° 7′	86° 34′
$\bar{1}\bar{1}0$: $\bar{1}01$	1	1	49° 54′	50° 3′
$\bar{1}01$: $\bar{1}12$	1	1	41° 50′	41° 40·5′
$\bar{1}\bar{1}0$: $\bar{1}12$	1	1	91° 35′	91° 43·5′
010 : $\bar{1}12$	1	1	*c* 64°	65° 9′
$0\bar{1}0$: $\bar{1}\bar{1}2$	1	1	62° 28′	62° 49′
*$0\bar{1}0$: 001	1	1	91° 16′	—
*110 : 001	1	1	66° 15′	—
001 : $\bar{1}\bar{1}2$	1	1	51° 25′	51° 7′
$\bar{1}\bar{1}0$: $\bar{1}\bar{1}2$	—	—	—	62° 38′
001 : $1\bar{1}0$	1	1	66° 30′	66° 18·5′
$\bar{1}10$: $\bar{1}12$	1	1	*c* 65° 50′	66° 59′.

Das Salz ist vollkommen mit dem Mangansalze isomorph.

Die Zusammensetzung wurde durch vorsichtiges Erhitzen bis zum Glühen bestimmt.

0·979 Gr. hinterliess beim Glühen 0·401 $MgSO^4$ = 40·96 %.

Der Formel $MgS^2O^6 + 6H^2O$, welche Heeren früher für das Salz fand, entspricht

$MgSO^4$ 41·09 % Gefunden 40·96.

Das Salz ist in Wasser sehr leicht löslich; es hält sich unverändert an der Luft.

Specifisches Gewicht, als Mittel aus zwei Versuchen, 1·666.

Unterschwefelsaures Nickel $NiS^2O^6 + 6H^2O$.

Triklinisch:

$$a : b : c = 0·6842 : 0·9819 : 1$$

001:010 = 88° 38·5′ 001:100 = 61° 43′ 100:010 = 86° 7·5′

ξ = 89° 29′ η = 118° 15·5′ ζ = 93° 37′.

Beobachtete Formen:

(110).(1̄10).(010).(1̄01).(011).(01̄1).(1̄12).(1̄1̄2).

(Tab. II, Fig. 13. Tab. III, Fig. 16, 17.)

Das Salz, von der gewöhnlichen grünen Farbe der Nickelsalze, ist im äusseren Habitus dem Magniumsalze ganz ähnlich; nur beobachtet man häufiger Endflächen, einer ziemlich grossen Anzahl verschiedener Formen angehörig. Von den verticalen Flächen ist das Paar (1̄10) fast immer vorherrschend, oft in der Weise, dass die Krystalle in dieser Richtung tafelförmig werden. Die Hauptaxe ist immer die Richtung der grössten Ausdehnung. Die vollständig ausgebildeten Krystalle sind klein, die Endflächen fast immer undeutlich und wenig spiegelnd. Der gewöhnlichste Formencomplex ist (110).(1̄10).(010).(1̄01) wie Fig. 16. An andern Combinationen habe ich die Endflächen (1̄01) und (011) oder in einem Falle (1̄1̄2).(01̄1).(011) beobachtet. Die vollständige Form ist in Fig. 17, Tab. III abgebildet.

Ausgezeichnete Spaltbarkeit parallel (110) und (1̄10); gute nach (010).

Die Mittelwerthe aus Messungen an acht Krystallen sind:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet	Gerechnet
*110 : 11̄0	5	5	63° 2′	—
*010 : 1̄10	6	9	61° 18′	—
010 : 110	5	5	55° 41′	55° 40′

	Anzahl der Krystalle	Messungen	Beobachtet	Gerechnet
*$\bar{1}10:\bar{1}01$	5	6	51° 12′	—
$1\bar{1}0:0\bar{1}1$	2	2	51—52°	51° 1′
$1\bar{1}0:\bar{1}\bar{1}2$	2	2	c 90° 0′	89° 51′
$0\bar{1}0:\bar{1}01$	4	4	86° 46′	86° 46′
$\bar{1}10:\bar{1}12$	2	2	c 64° 0′	64° 51
*$\bar{1}\bar{1}0:\bar{1}01$	3	4	49° 40′	—
$110:\bar{1}12$	1	2	c 88° 28′	88° 30′
$110:011$	1	1	c 50°	47° 58′
*$\bar{1}01:\bar{1}12$	2	2	41° 50′	—
$0\bar{1}0:0\bar{1}1$	1	1	c 48° 10′	48° 48′
$010:011$	—	—	—	47° 18′
$110:[001]$	—	—	—	66° 9·5′
$\bar{1}\bar{1}0:\bar{1}\bar{1}2$	1	1	c 62° 50′	62° 19′
$0\bar{1}0:\bar{1}\bar{1}2$	1	1	c 61½°	62° 38′.

Vollkommen isomorph mit den Mangan- und Magniumsalzen. Die Zusammensetzung ist früher von Heeren bestimmt.

1·355 Gr. bis zum schwachen Glühen erhitzt hinterliess 0·6425 Gr. $NiSO^4$, 47·42 % entsprechend; in Weissglühhitze wurde alle Schwefelsäure weggetrieben. Der Rest 0·308 Gr. = 22·73 % NiO.

Heerens Formel $NiS^2O^6 + 6H^2O$ entspricht

		Gefunden
NiO	22·70 %	22·73
$NiSO^4$	47·24 %	47·42.

Das specifische Gewicht der Krystalle ist in zwei Versuchen zu 1·908 bestimmt.

Unterschwefelsaures Zink $ZnS^2O^6 + 6H^2O$.

Triklinisch, isomorph mit den oben beschriebenen analogen Salzen. Der Habitus der Krystalle vollständig wie der des Magniumsalzes. Ich habe indessen hier niemals durch Endflächen geschlossene Krystalle gefunden. Aus einigen guten Messungen an kleinen Nadeln oder Spaltungsstücken von grössern Krystallen ergibt sich

$110:1\bar{1}0 = 62° 58'$
$010:\bar{1}10 = 61° 18'$
$010:110 = 55° 34'$.

Die Spaltungsverhältnisse ganz wie bei dem Magniumsalze. 1·1655 Gr. hinterliess nach schwachem Glühen 0·563 Gr. $ZnSO^4$ = 48·31 % und nach Erhitzen bis zur Weissglühhitze 0·283 Gr. ZnO = 24·80 %.

Die von Heerens angegebene Formel $ZnS^2O^6 + 6H^2O$ erfordert

		Gefunden
ZnO	24·32 %	24·28
$ZnSO^4$	48·35	48·31.

Das specifische Gewicht ist nach zwei Versuchen 1·915.

Unterschwefelsaures Cadmium $CdS^2O^6 + 6H^2O$

Triklinisch:

$a:b:c = 1:0·8315:0·8146$

$001:010 = 90°45'$ $001:100 = 73° 13'$ $100:010 = 112°17·5'$

$\xi = 96° 15·5'$ $\eta = 107° 52'$ $\zeta = 66° 55'$.

Beobachtete Formen:

$(100).(001).(010).(110).(\bar{2}\bar{1}1).(0\bar{1}1)$

(Tab. III, Fig. 18, 19.)

Das Salz, durch Doppelzersetzung von unterschwefelsaurem Baryum mit schwefelsaurem Cadmium dargestellt, krystallisirt in farblosen, wasserhellen, oft ziemlich grossen Krystallen, an welchen die Flächen (100).(010).(110).(001) gut ausgebildet sind, während die Flächenpaare $(0\bar{1}1)$ und $(21\bar{1})$ sehr untergeordnet und selten wegen ihrer Krümmung messbar sind. Die Krystalle sind gewöhnlich nach (100) tafelförmig; durch paralleles Zusammenwachsen — nach (010) — mehrerer solcher Tafeln, bildet sich bei langsamem Verdunsten der Lösung oft nur eine einzelne sehr grosse Krystallplatte, deren Rand durch die Flächen (001) und (010) der einzelnen Individuen treppenförmig erscheint.

Ausgezeichnet spaltbar nach (100), gut nach (110).

Die Messungen an acht Krystallen ergaben:

	Anzahl der Krystalle	Messungen	Beobachtet	Gerechnet
*100 : 110	6	6	62° 9′	—
010 : 110	3	3	50° 14′	50° 8·5′
*100 : 010	6	6	112° 17·5	—
*010 : 001	4	5	90° 45′	—
001 : $0\bar{1}1$	1	1	45° 5′	45° 1′
*100 : 001	5	7	73° 13′	—
110 : 001	1	1	76° 57′	76° 50′
*001 : $\bar{2}\bar{1}1$	2	2	72° 23′	—
$\bar{1}00$: $\bar{2}\bar{1}1$	1	1	49° 24′	49° 20′
$\bar{2}\bar{1}1$: $0\bar{1}1$	1	1	68° 20′	68° 41′
$0\bar{1}0$: $\bar{2}\bar{1}1$	1	1	77° 20′	77° 34′.

Die Zusammensetzung wurde durch Erhitzen des Salzes bis zum Glühen bestimmt; der Rückstand war $CdSO^4$.

1·1645 Gr. hinterliess 0·633 Gr. $CdSO^4 = 54{\cdot}83\%$

0·980 Gr. hinterliess 0·538 Gr. $CdSO^4 = 54{\cdot}90\%$.

Der Formel $CdS^2O^6 + 6H^2O$ entspricht

	Gefunden
$CdSO^4 = 54{\cdot}74\%$	54·86.

Obgleich das Salz demnach dieselbe Zusammensetzung hat, wie die oben beschriebenen Salze des Magniums, Mangans u. s. w., scheint es dennoch nicht mit ihnen isomorph zu sein. Zwar sind die Winkelverhältnisse der Zone (100).(110).(010) beim Cadmiumsalze mit denjenigen der Zone (110).(001).($\bar{1}\bar{1}2$) bei den andern Salzen übereinstimmend, indem

für CdS^2O^6	für MgS^2O^6
$\bar{1}00 : 010 = 67° 43′$	$110 : 001 = 66° 15′$
$110 : 010 = 50° 8′$	$001 : \bar{1}\bar{1}2 = 51° 7′$
$100 : 110 = 62° 9′$	$\bar{1}\bar{1}0 : \bar{1}\bar{1}2 = 62° 38′$

aber zwischen den übrigen Formen scheint gar kein Zusammenhang stattzufinden; auch die Spaltungsrichtungen sind bei den

zwei Salzen verschieden. Ich habe daher die Krystalle des Cadmiumsalzes für sich aufgestellt, ohne Rücksicht auf diese „Zonenisomorphie“ zu nehmen.

Das Salz ist in Wasser sehr leicht löslich, und zerfliesst an feuchter Luft.

Das specifische Gewicht der Krystalle: 2·272.

Unterschwefelsaures Eisen $FeS^2O^6+7H^2O$.

Triklinisch:

$$a:b:c = 1:0\cdot4498:0\cdot4243$$

$$001:010 = 81° 2' \quad 001:100 = 62° 52' \quad 100:010 = 102°43\cdot5'$$

$$\xi = 107° 10\cdot5' \quad \eta = 120° 36' \quad \zeta = 70° 38\cdot5'.$$

Beobachtete Formen:

$(100).(110).(010).(001).(\bar{1}01).(\bar{2}01).(0\bar{1}1).\bar{2}\bar{1}1).(011)$

(Tab. IV, Fig. 20—23.)

Das Salz, durch Doppel-Decomposition des unterschwefelsauren Baryums mit schwefelsaurem Eisen dargestellt, krystallisirt bei gewöhnlicher Temperatur aus der Lösung in hellgrünen, durchsichtigen, kurz säulenförmigen Combinationen (100).(110).(010), oben durch eine grössere oder geringere Anzahl Flächen geschlossen. Am häufigsten beobachtet man Flächen der Formen $(\bar{1}01)$, (001), $(0\bar{1}1)$ und $(\bar{2}\bar{1}1)$ wie Fig. 22 und 23. Nicht selten sind diese Formen unvollzählig, wodurch die Krystalle ein sehr unregelmässiges Aussehen erhalten. Bisweilen beobachtet man jedoch sehr schön ausgebildete kleine Krystalle, an welchen der ganze Formencomplex vorhanden ist (Fig. 21, wo jedoch die Flächen (011) nicht eingezeichnet sind). Die Krystalle sind gewöhnlich nach den Flächenpaaren (100) oder (110) etwas abgeplattet.

Spaltbarkeit ausgezeichnet parallel (100), gut nach (110).

Weil die Lösung des Salzes selbst beim Verdunsten bei gewöhnlicher Temperatur über Schwefelsäure oder im luftleeren Raume langsam zersetzt wird, indem ein basisch schwefelsaures Eisenoxyd sich ausscheidet, sind die Flächen gewöhnlich etwas durchgefressen und die der untergeordneten Formen wenig spiegelnd. Die Messungen besitzen daher nicht die erwünsch-

lichste Genauigkeit. Es ist mir indessen durch Vervielfachung der Messungen gelungen, wenigstens die Hauptwinkel mit ziemlicher Zuverlässigkeit zu bestimmen.

Die Mittelwerthe von Messungen an zwölf Krystallen sind:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet	Gerechnet
*100 : 110	6	6	74° 2′	—
*100 : $0\bar{1}0$	8	8	77° 16·5′	—
010 : 110	5	6	28° 41′	28° 41·5′
100 : 001	5	6	62° 59′	62° 52′
100 : $10\bar{1}$	4	4	91° 30′	91° 41′
001 : $\bar{1}01$	—	—	—	25° 27′
001 : $\bar{2}01$	—	—	—	51° 32′
*100 : $0\bar{1}1$	6	6	57° 51′	—
100 : 211	4	5	78° 12′	78° 13·5′
$0\bar{1}1$: $\bar{2}\bar{1}1$	3	3	*c* 44° 20′	43° 56′
110 : 011	3	3	*c* 36° 40′	36° 55′
110 : $\bar{1}01$	5	5	73° 2·5′	73° 1′
110 : $21\bar{1}$	7	7	54° 22′	54° 13·5′
110 : $01\bar{1}$	3	3	*c* 72¼°	71° 54′
010 : $21\bar{1}$	5	5	60° 38′	60° 36′
010 : $\bar{2}01$	1	1	*c* 71°	69° 19′
$\bar{2}\bar{1}1$: $\bar{2}01$	1	1	*c* 49°	50° 5·5
$0\bar{1}0$: $0\bar{1}1$	3	4	54° 10′	54° 28·5′
*001 : 010	6	6	81° 2′	—
010 : 011	1	1	*c* 44°	44° 10′
001 : $0\bar{1}1$	3	3	*c* 44° 45′	44° 29·5′
*110 : 001	3	3	67° 47′	—
$\bar{2}\bar{1}1$: 001	1	1	62° 57′	63° 10′.

1·1275 Gr. hinterliessen beim Erhitzen bis zum starken Glühen 0·264 Gr. Fe^2O^3, 16·37 % Eisen entsprechend.

1·029 Gr. verlor über Chlorcalcium 0·0565 Gr. Wasser = 5·48 %. Beim Glühen blieb 0·2415 Gr. Fe^2O^3 (= 16·41 % Fe), welches mit Salpetersäure befeuchtet und nochmals geglüht, keine Gewichtsveränderung erlitt.

Der Formel $FeS^2O^6 + 7H^2O$ entspricht 16·38 % Fe.

Das Salz verliert über Chlorcalcium 1 Mol. Wasser: Gefunden 5·48 %, berechnet 5·26 %.

Heeren hat früher für das unterschwefelsaure Eisen die Formel $FeS^2O^6 + 5H^2O$ angegeben. Er hat indessen die Analyse in der Weise ausgeführt, dass er das Salz durch behutsames Erhitzen in $FeSO^4$ (49·05 %) verwandelte. Es wird indessen wohl schwierig sein, hier alles Wasser auszutreiben und die Unterschwefelsäure vollständig zu zersetzen, ohne dass man die Hitze so viel steigert, dass schon eine Decomposition des $FeSO^4$ eintritt. In diesem Falle erhält man einen zu kleinen Rückstand, ebenso wie man, wenn das „$FeSO^4$" noch Wasser und unterschwefelsaures Salz enthält, einen zu grossen Rest erhält. Ich bin dazu geneigt, anzunehmen, dass dies letztere der Fall in Heeren's Analyse gewesen ist.

Das Salz hält sich ziemlich gut an der Luft bei gewöhnlicher Temperatur, aber schon bei 25—30° beginnt es unter Wasserverlust zu verwittern. Es ist im Wasser leicht löslich, aber die Lösung wird beim Stehen oder Erwärmung — in diesem Falle sehr schnell — zertheilt.

Das spec. Gewicht fand ich in einem Versuche = 1·875.

Unterschwefelsaures Kobalt $CoS^2O^6 + 8H^2O$.

Triklinisch:

$$a : b : c = 1 : 0·8682 : 0·9748$$

010:001 = 72° 24′ 100:001 = 89′ 10′ 100:010 = 74° 39′

$\xi = 108° 14'$ $\eta = 85° 12'$ $\zeta = 106° 4'$.

Beobachtete Formen:

(001).(100).(010).(1$\bar{1}$0).(1$\bar{1}$1).

(Tab. IV, Fig. 24, 25.)

Es krystallisirt sehr leicht in schönen, regelmässigen Krystallen von der Farbe des schwefelsauren Kobalts. Sie sind nach der *b*-Axe verlängert und theils säulenförmig — mit (001) (100) im Gleichgewichte — theils tafelförmig — nach (001) — ausgebildet. Die Flächen der Formen (1$\bar{1}$0) und (1$\bar{1}$1) kommen an allen Krystallen vor, haben aber eine sehr geringe Ausdehnung; die (1$\bar{1}$1) sind zugleich matt und zur Messung wenig geeignet. Nur an ein Paar Krystallen gelang es mir einige zur Berechnung

brauchbare Bestimmungen zu erhalten. Die übrigen Flächen sind sehr glänzend.

Ausgezeichnete Spaltbarkeit parallel (001); sehr gute nach (100).

Die Mittelwerthe der Bestimmungen an zehn Krystallen sind:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet	Berechnet
*100 : 010	5	5	74° 39′	—
010 : $\bar{1}10$	3	3	c 45° 30′	45° 37·5′
100 : $1\bar{1}0$	3	3	60° 20′	59° 44′
001 : 100	3	3	89° 50′	89° 50′
*001 : $\bar{1}00$	5	6	90° 10′	—
*001 : 010	5	5	72° 24′	—
001 : $\bar{1}10$	4	4	74° 25′	—
001 : $1\bar{1}1$	5	5	62° 22′	62° 32′
$1\bar{1}0$: $1\bar{1}1$	—	—	—	43° 14′
*100 : $1\bar{1}1$	2	2	62° 12′	—

1·089 Gr. hinterliessen beim sehr mässigen Glühen 0·467 Gr. $CoSO^4$ = 42·88 %.

1·022 verloren über Chlorcalcium 0·0955 Gr. Wasser = 9·34 %. Bei sehr schwachem Glühen blieb 0·436 Gr. $CoSO^4$ = 42·66 %. Dieser Rest wurde einer sehr intensiven Glühhitze ausgesetzt; das hiedurch zurückgebliebene Kobaltoxyd gab im Wasserstoffstrome geglüht 0·165 Gr. metallisches Kobalt = 16·15 %.

0·748 Gr. verlor über Chlorcalcium 0·0755 Gr. Wasser = 10·1 %.

Der Formel $CoS^2O^6 + 8H^2O$ entspricht:

		Gefunden	
Co	16·25 %		16·15
$CoSO^4$	42·69	42·88	42·66.

Heeren hat früher ein unterschwefelsaures Kobalt als eine „undeutlich krystallisirte Masse“ erhalten, für welches er die Formel mit $6H^2O$ fand, also dieselbe Zusammensetzung, welche das oben beschriebene Salz erhält, wenn es über Schwefelsäure oder Chlorcalcium getrocknet wird. (Es verliert nämlich 2 Mol. Wasser: berechnet 9·92, gefunden 9·67.)

Das Salz ist in Wasser leicht löslich; es hält sich ohne Veränderung in feuchter oder kalter Luft, während es in trockener oder warmer Luft schnell verwittert.

Sein spec. Gewicht fand ich in drei Versuchen = 1·8155.

Arsensaures Kalium KH^2AsO^4.

Tetragonal:

$$a : c = 1 : 0·6633.$$

Beobachtete Formen:

(110).(111).(551).
(Tab. IV, Fig. 26.)

Das Salz, welches mit dem analogen phosphorsauren Salze vollständig isomorph ist, krystallisirt in kleinen, oft trüben, nach der Hauptaxe säulenförmigen Combinationen des Prisma's mit dem Octaëder (111). Die Prismenflächen sind seidenglänzend und sehr häufig krumm. An einem einzelnen Krystalle habe ich sehr schlecht ausgebildete Flächen eines sehr spitzen Octaëders, welches in der Zone (110).(111) liegt und die Combinationskanten der zweien Hauptformen abstumpft, beobachtet. Nach einer approximativen Messung scheinen seine Indices (551) zu sein.

Die Mittelwerthe aus Messungen an eilf Krystallen sind:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet	Berechnet
$111 : \bar{1}11$	9	14	57° 52′	—
$111 : \bar{1}\bar{1}1$	6	8	86° 21·5′	86° 20′
111 : 110	3	4	46° 51′	46° 50′
$111 : \bar{1}\bar{1}0$	4	4	133° 16′	133° 10′
110 : 551	1	1	*c* 12° 0′	12° 3′

Specifisches Gewicht 2·862. (Nach Schiff 2·832.)

Arsensaures Ammonium $AH^4.H^2AsO^4$.

Tetragonal:

$$a : c = 1 : 0·7096.$$

Beobachtete Formen:

(110).(111)
(Tab. IV, Fig. 26.)

Schöne, wasserhelle, regelmässig ausgebildete Krystalle, an welchen bald das Octaëder, bald das Prisma vorwiegt; im letzten Falle sind sie nach zweien parallelen Prismenflächen tafelförmig.

Keine deutliche Spaltungsrichtung.

An zwölf Krystallen habe ich folgende Mittelwerthe erhalten:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet	Berechnet
*111 : $\bar{1}$11	9	11	60° 7′	—
110 : 111	9	15	44° 54·5′	44° 54′
111 : $\bar{1}\bar{1}$1	2	2	90° 10′	90° 12′
111 : 11$\bar{1}$	4	4	89° 54′	89° 48′
110 : 110	2	2	90° 0·5′	90° 0′.

Specifisches Gewicht 2·308. (Nach Schiff 2·249).

Chlorsaures Strontium $SrCl^2O^6$.

Rhombisch, hemimorph:

$$a : b : c = 1 : 0{\cdot}9174 : 0{\cdot}6003.$$

Beobachtete Formen:

(111).(110).(311).

(Tab. V, Fig. 27.)

Das Salz — durch Lösung von kohlensaurem Strontium in wässeriger Chlorsäure dargestellt — krystallisirt bei gewöhnlicher Temperatur in farblosen, in der Regel trüben Combinationen eines Octaëders mit dem Prisma, welches gewöhnlich sehr untergeordnet ist. An fast allen Krystallen finden sich Flächen des Octaëders (311), welche indessen nur zur Hälfte ausgebildet sind, nämlich als zweiflächige Abstumpfung der im Hauptschnitte *ac* liegenden oberen (oder unteren) Combinationsecken des Prisma's und des Grundoctaëders (Fig. 27).

Die Krystalle sind nach allen Richtungen gleichförmig ausgebildet. Die Flächen sind uneben und werden — wegen der Zerfliesslichkeit des Salzes — sehr schnell an der Luft feucht. Die Messungen sind deshalb — wiewohl ich sie in einem Zimmer, wo die Temperatur auf 25° gehalten wurde, vornahm — ziemlich unsicher.

Die Mittelwerthe sind:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet	Berechnet
*$111:1\bar{1}1$	4	8	58° 35′	—
$111:\bar{1}11$	3	5	53° 5′	53° 19·5′
$111:311$	3	4	29° 53′	29° 40′
$311:\bar{3}11$	1	1	c 113½°	112° 50′
$111:\bar{1}\bar{1}1$	2	2	82° 59′	83° 11′
*$111:11\bar{1}$	4	6	96° 49′	—
$111:110$	1	1	48° 11′	48° 24·5′
$110:1\bar{1}0$	1	1	95° 10′	94° 56′
$311:3\bar{1}1$	4	4	35° 24′	35° 16′.

0·881 Gr. wurde mit Schwefelsäure eingedampft und geglüht. Das schwefelsaure Strontium wog 0·632 = 40·48 % SrO.

0·572 Gr. mit wässeriger schwefeliger Säure eingedampft, hinterliess 0·4125 Gr. $SrSO^4$ = 40·69 % SrO.

1·324 Gr. wurde mehrere Tage mit wässriger schwefeliger Säure bei gewöhnlicher Temperatur behandelt, der Überschuss der schwefeligen Säure durch Zusatz von zweifach-chromsaurem Kalium entfernt, und dann die zu Chlorwasserstoffsäure reducirte Chlorsäure als Chlorsilber bestimmt. — 1·481 Gr. AgCl = 27·75 % Cl.

Die Formel $SrCl^2O^6$ erfordert

			Procent	Gefunden	
SrO	=	103·6	40·79	40·48	40·69
Cl	=	71·0	27·89	27·75.	

Das Salz ist in Wasser sehr leicht löslich; an der Luft zerfliesst es schnell.

Bromsaures Kupfer $CuBr^2O^6 + 6H^2O$.

Regulär.

Combinationen des Octaëders mit untergeordneten Hexaëderflächen. Das Salz krystallisirt ziemlich leicht in oft sehr grossen, lazurblauen, octaëdrischen Krystallen, deren Flächen krumm und deren Kanten abgerundet erscheinen. Die grösseren Krystalle sind trübe; an kleinen durchsichtigen Octaëdern habe ich

indessen constatirt, dass sie einfach brechend sind, indem sie gar keine Wirkung auf das polarisirte Licht ausüben.

1·8950 Gr. wurden mit Schwefelwasserstoff behandelt; das Schwefelkupfer mit Schwefel im Wasserstoffstrome geglüht, wog 0·354 Gr., 18·68% CuO entsprechend.

0·2978 Gr. wurde mit Jodkalium und Salzsäure versetzt, das hiedurch freigemachte Jod durch eine Lösung von unterschwefeligsaurem Natron (1000·5 Gr. = 12·7 Gr. Jod) titrirt. Verbraucht wurden 90·7 CC., 0·1151 Gr. Jod entsprechend. Da das Kupfer durch das Jodkalium als Kupferjodüre unter Freiwerden von einem Atome Jod gefällt wird, gibt in diesem Falle ein Molecül des bromsauren Salzes nicht wie gewöhnlich 12, sondern 13 Atome Jod:

$$CuBr^2O^6 + 14KJ + 12HCl = CuJ + 2KBr + 12KCl + 6H^2O + 13J.$$

Die Menge des entbundenen Jods 0·1151 Gr. entspricht demnach 56·20% Br^2O^5.

Die Formel $CuBr^2O^6 + 6H^2O$ [1] erfordert:

		Procent	Gefunden	Rammelsberg
CuO	= 79·4	18·58	18·68	19·73
Br^2O^5	= 240	56·15	56·20	56·06.

Das Salz ist isomorph mit dem von Herrn Rammelsberg früher dargestellten Magnesium, Nickel, Kobalt-Salzen.

Specifisches Gewicht 2·583 (aus drei Versuchen).

Bromsaures Cadmium $CdBr^2O^6 + 2H^2O$.

Rhombisch:

$$a : b : c = 1 : 0·98845 : 0·7392.$$

Beobachtete Formen:

(100).(110).(120).(320).(011).(101).(201).(001).(111).(121).(122).

(Tab. V, Fig. 28—31.)

---

[1] Herr Rammelsberg hat früher das Salz dargestellt; er erhielt es als undeutliche blaugrüne Krystalle, für welche er die Formel

$$CuBr^2O^6 + 5H^2O$$

annahm. Seine Analyse stimmt indessen eben so gut mit der Formel mit 6 Mol. Wasser.

Das Salz krystallisirt aus der ziemlich concentrirten Lösung bei gewöhnlicher Temperatur in sehr schönen, farblosen, wasserhellen, diamantglänzenden, nach der Hauptaxe verlängerten Krystallen, an welchen man gewöhnlich eine sehr grosse Anzahl Flächen beobachtet. Die vorherrschenden Formen sind (100). (120).(011).(101); die Pinakoïdflächen (100) sind besonders sehr ausgedehnt; häufig erscheinen die Krystalle in dieser Richtung abgeplattet. Von den übrigen Formen trifft man fast an allen Krystallen die zwei Prismen (110) und (201), Fig. 30, und die Pyramide (121); aber auch das Prisma (320) und die Pyramiden (111), (122) sind nicht selten; die Flächen der Pyramiden sind jedoch selten an allen Ecken gleichzeitig ausgebildet. Krystalle, an welchen der ganze Formencomplex ausgebildet war (wie Fig. 31 und 29), und welche eine ausserordentlich regelmässige Gestalt besassen, sind jedoch nicht ungewöhnlich.

Die Flächen sind sehr glänzend; die kleineren haben fast Diamantglanz; die grösseren sind häufig gestreift — namentlich die Flächen (100), welche fast immer mehrere Spiegelbilder gaben. Die Messungen sind im ganzen sehr übereinstimmend, indem die Kantenwinkel, in welchen die Flächen der vorherrschenden Formen eingehen, nur an sehr kleinen nadelförmigen Krystallen, wo die Flächen ohne Streifung auftraten, bestimmt wurden.

Keine deutlichen Spaltungsrichtungen.

Die Mittelwerthe von Messungen an eilf Krystallen sind:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet	Berechnet
*120 : 1̄20	6	7	52° 36′	—
100 : 120	7	12	63° 37′	63° 42′
120 : 1̄10	2	3	71° 0′	70° 58′
120 : 110	4	4	18° 16′	18° 22′
100 : 110	1	1	45° 20′	45° 20′
110 : 320	1	1	c 11° 20′	11° 20′
100 : 320	1	1	33° 59′	34° 0′
100 : 001	2	4	89° 57	90° 0′
100 : 101	6	7	53° 26′	53° 31·5′
001 : 101	1	3	36° 31′	36° 28·5′
101 : 1̄01	2	2	73° 1′	72° 57′
100 : 201	2	2	34° 11′	34° 4·5′

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet	Gerechnet
100:011	3	7	89°40—90°4′	90° 0′
011:111	4	4	30° 36′	30° 37·5
100:111	2	2	59° 5′	59° 22·5′
100:122	1	1	*c* 73° 10′	73° 31′
011:122	2	2	*c* 16° 45′	16° 29′
100:121	4	5	67° 46′	67° 40′
121:$\bar{1}$21	2	2	44° 46′	44° 40′
001:011	3	4	36° 41′	36° 47·5′
*011:0$\bar{1}$1	5	6	73° 35′	—
120:101	2	5	74° 42′	74° 44′
120:011	6	13	57° 30′	57° 31·5′
001:120	3	9	90° 0′ [1]	90° 0′
001:121	3	3	58° 48′	59° 4′
001:122	2	2	*c* 39° 45′	39° 49·5′
120:122	1	1	50° 23′	50° 10·5′
120:121	2	2	30° 55′	30° 56′
001:111	1	1	46° 22′	46° 26′
110:111	1	1	43° 24′	43° 34′
101:121	1	1	50° 25′	50° 15·5′
101:111	1	1	30° 45′	31° 1°
111:121	1	1	19° 14′	19° 14·5′
101:011	5	10	49° 54′	49° 54·5′
110:011	4	4	64° 40′	64° 47′
110:101	1	1	65° 13′	65° 18·5′
011:121	3	3	29° 11′	29° 17′
110:121	1	1	35° 40′	35° 30·5′

1·177 Gr. mit Schwefelsäure eingedampft und einer Glühung unterworfen, gaben 0·602 Gr. $CdSO^4$, 31·48% entsprechend.

0·3283 Gr. mit Jodkalium und Chlorwasserstoffsäure versetzt, wurde mit unterschwefligsaurem Natron titrirt (1000·5 CC. 12·7 Gr. Jod entsprechend). Der angewandten Menge des unterschwefligsauren Natrons, nämlich 97·85 CC. entspricht 59·58 % Br^2O^5.

[1] Zwischen 89° 43′ und 90° 17′ schwankend.

Die Formel $CdBr^2O^6 + 2H^2O$ erfordert:

			Procent	Gefunden
CdO	=	128	31·68	31·48
Br^2O^5	=	240	59·41	59·58.

Herr Rammelsberg, welcher früher dasselbe Salz[1] untersucht hat, fand 33·38 % CdO und 61·92 % Br^2O^5, der Formel $CdBr^2O^6 + H^2O$ entsprechend. — Nach meinen Versuchen hat das bromsaure Salz dieselbe Zusammensetzung wie das von Wächter dargestellte chlorsaure Cadmium.

Die Krystalle sind in Wasser sehr leicht löslich und halten sich unveränderlich an der Luft.

Das specifische Gewicht = 3·758. (Aus drei Versuchen.)

Basisch-chlorsaures Quecksilber $HgCl^2O^6 . HgO + H^2O$.

Rhombisch:

$$a : b : c = 1 : 0·7974 : 0·64595.$$

Beobachtete Formen:

(010).(110).(100).(011).(031).(111).(001).

(Tab. V, Fig. 32; Tab. VI, Fig. 33, 34.)

Das Salz, durch Lösen von überschüssigem, gefälltem Quecksilberoxyd in wässeriger Chlorsäure dargestellt[2], krystallisirt bei gewöhnlicher Temperatur durch langsame Verdunstung der Lösung in farblosen, durchsichtigen, glänzenden Tafeln von den Flächen (010).(110).(011).(100) gebildet. Bisweilen sind die horizontalen Kanten (011) : (010) durch Flächen des Prismas (031) abgestumpft, und dann beobachtet man zugleich sehr kleine Flächen der Pyramide (111) an den Kanten (011).(100) aufgesetzt. Die Flächen (001) sind nur an einem einzigen Krystalle

---

[1] „Rhombische Säulen mit Winkeln von 137° und 53°, die scharfen Seitenkanten abgestumpft, und durch zwei schmale Flächen zugeschärft; die Enden mit vier Flächen zugespitzt". (Pogg. Ann. 55, p. 74.)

[2] Die Chlorsäure wurde so lange mit Quecksilberoxyd versetzt, als sich dieses noch löste. Nach Auskrystallisation des in Rede stehenden Salzes — die Lösung wurde über Schwefelsäure verdunstet — erstarrte zuletzt das Ganze zu einer geléeartigen Masse.

beobachtet. Die Krystalle sind immer nach (010) tafelförmig und zugleich etwas nach der Hauptaxe *c* verlängert.

Die Flächen besitzen einen ausgezeichneten Glanz; jedoch sind die der Formen (031) und (100) immer krumm.

Ausgezeichnete Spaltbarkeit parallel (010), gute nach (001).

Die Messungen an dreizehn Krystallen ergaben als Mittelwerthe:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet	Berechnet
010 : 110	9	11	38° 33′	38° 34′
*110 : 1$\bar{1}$0	7	7	102° 51·5′	—
110 : $\bar{1}$10	4	4	77° 7′	77° 8·5′
110 : 100	2	2	52—53°	51° 26′
010 : 011	4	4	51° 1′	50° 59·5′
011 : 01$\bar{1}$	1	1	*c* 101° 45′	101° 59′
*011 : 0$\bar{1}$1	3	3	78° 1′	—
001 : 010	1	1	90° 3′	90° 0′
010 : 031	—	—	—	22° 22′
011 : 031	1	1	*c* 30° 0′	28° 37·5′
110 : 011	4	4	60° 26′	60° 31·5′
111 : 011	2	2	*c* 26° 45′	26° 39′
111 : $\bar{1}$11	—	—	—	53° 18′
111 : 1$\bar{1}$1	—	—	—	68° 28′
111 : 11$\bar{1}$	—	—	—	87° 58′
001 : 110	1	1	89° 55′	90° 0′
110 : 031	—	—	—	46° 18′.

Das Salz ist vollständig mit dem folgenden isomorph.

0·951 Gr. mit Salzsäure so lange erwärmt, bis alles Chlor fortgetrieben war, gab durch SH^2 ausgefällt 0·7335 Gr. HgS = 71·81% HgO.

Die Formel $HgCl^2O^6 . HgO + H^2O$ erfordert:

		Procent	Gefunden
2HgO	= 432	71·88	71·81
Cl^2O^5	= 151	25·12	
H^2O	= 18	3·00	

Das Salz scheint beim Aufbewahren zersetzt zu werden; wenigstens gaben die längere Zeit aufbewahrten Krystalle

beim Öffnen des Glases einen sehr hervortretenden Geruch nach unterchloriger Säure. Das Salz wird durch Wasser in der Weise zersetzt, dass sich rothes Quecksilberoxyd ausscheidet, während ein saures Salz sich löst. In sehr verdünnten Säuren lösen die Krystalle sich jedoch vollständig auf.

Specifisches Gewicht 5·150 (annähernd).

Basisch-bromsaures Quecksilber. $HgBr^2O^6 . HgO + H^2O$.

Rhombisch:

$$a : b : c = 1 : 0·7997 : 0·6278.$$

Beobachtete Formen:

(010).(110).(011).(012).(100).(111).

(Tab. V, Fig. 32; Tab. VI. Fig. 35.)

Das Salz wurde erhalten: entweder durch Fällung einer möglichst neutralen Lösung [1] von salpetersaurem Quecksilberoxyd mit bromsaurem Kali, oder durch Behandlung des gefällten Oxydes mit Bromsäure (in verdünnter wässeriger Lösung) im Überschuss. Ich wandte hier auf einem Molecüle HgO anderthalb Molecülen Bromsäure an, und erhielt, wiewohl etwas langsam, alles Oxyd aufgelöst [2]: Durch Erkältung krystallisirte der grösste Theil des angewandten Quecksilberoxydes als $HgBr^2O^6 . HgO + H^2O$ aus [3], während der Rest, in der Bromsäure gelöst, durch Abdampfen als das von Herrn Rammelsberg früher beschriebene neutrale Salz $HgBr^2O^6$ erhalten wurde [4].

---

[1] Wenn die Flüssigkeit zu viel Salpetersäure enthält, krystallisirt, wenn die beiden Lösungen heiss gemischt werden, nichts beim Erkälten aus; man erhält dann aber bei Abdampfung schön krystallisirte Doppelsalze, Quecksilber, Kalium, Salpetersäure und Bromsäure enthaltend.

[2] Um dies zu erreichen, goss ich nach einer Digestion, in mehreren Stunden fortgesetzt, die Flüssigkeit vom ungelösten Oxyde ab und liess sie erkalten. Nachdem das in der warmen, an Bromsäure reichen Flüssigkeit gelöste basische Salz hiedurch auskrystallisirt war, wurde die Mutterlauge wieder mit dem Oxyde digerirt.

[3] Aus 13 Gr. HgO erhielt ich 15 Gr. des Salzes. Die Analyse siehe unten.

[4] In einem Versuche fand ich 48·2% Br^2O^5, während die Formel des Herrn Rammelsberg — $HgBr^2O^6 + 2H^2O$ — 48·4 erfordert.

Die Krystalle, welche ich durch langsames Erkälten der heiss gemischten Lösungen von HgN^2O^6 und $KBrO^3$ erhielt, waren kleine glänzende Blättchen, in der Regel so dünn, dass die Randflächen kaum sichtbar waren. An einigen, ein wenig dickeren Täfelchen beobachtete ich die in Fig. 35 abgebildeten Combinationen, wo die Randflächen wesentlich aus Flächen der Formen (110).(011) bestanden, indem die übrigen Formen sehr untergeordnet sind. Die Flächen sind glänzend und spiegeln recht gut; die Messungen sind jedoch wegen der Kleinheit der Krystalle nicht so übereinstimmend wie bei dem vorigen Salze.

Die Messungen an sechs Krystallen ergaben:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet	Berechnet
110 : 010	6	11	38° 36′	38° 39′
110 : $\bar{1}$10	—	—	—	77 18′
*110 : 1$\bar{1}$0	6	6	102° 42′	—
010 : 100	1	1	90° 6′	90° 0′
*010 : 011	5	10	52° 0′	51° 52′
010 : 012	1	1	68° 11	68° 34′
011 : 0$\bar{1}$1	2	2	76° 36′	76° 16′
012 : 011	—	—	—	16° 42′
012 : 0$\bar{1}$2	—	—	—	42° 52′
*110 : 011	5	7	61° 27′	61° 10′
110 : 012	1	1	73° 2′	73° 25′
011 : 100	1	1	90° 0′	90° 0′
011 : 111	2	2	26° 35′	26° 17′
010 : 111	2	2	56° 10′	56° 23′
110 : 111	1	1	44′ 40′	44° 51′.

Die durch Lösen von HgO in Bromsäure beim Erkälten ausgeschiedenen Krystalle waren etwas dicker: sie bestanden nur aus den Flächen (010).(110).(011) und (100) und glichen vollständig den einfachsten Krystallen des chlorsauren Salzes (Fig. 34).

Die Zusammensetzung der durch Fällung dargestellten Krystalle ergab sich aus den folgenden Versuchen:

1·295 Gr. mit Chlorwasserstoffsäure bis zur Vertreibung des entwickelten Broms und Chlors, in der Wärme behandelt, gaben 0·874 Gr. HgS, 62·83% HgO entsprechend.

1·625 Gr. gaben auf dieselbe Weise 1·0945 = 62·71 Gr. HgO.

0·6174 in wässerigem Jodkalium gelöst, mit Chlorwasserstoffsäure versetzt und mit unterschwefeligsaurem Natron titrirt (verbraucht 75·8 CC. einer Lösung, von welcher 713 CC. = 12·7 Gr. Jod) gab 34·44% Br^2O^5.

0·3551 Gr. erforderte 43·75 CC., 34·56% Br^2O^5 entsprechend.

Das durch Digestion von HgO mit wässeriger Bromsäure bei Erkaltung der sauren Flüssigkeit ausgeschiedene Salz gab:

0·6685 Gr. durch unterschwefeligsaures Natron titrirt, erforderte 82·6 CC. (713 CC. 12·7 Gr. Jod entsprechend), woraus 34·66% Br^2O^5.

Die Formel $HgBr^2O^6 . HgO + H^2O$ erfordert:

		Procent	Gefunden		
2HgO	= 432	62·61	62·71	62·83	
Br^2O^5	= 240	34·78	34·44	34·56	34·66.

Das Salz wird durch Behandlung mit kaltem Wasser sehr langsam unter Bildung eines gelblichen mehr basischen Salzes zertheilt; durch kochendes Wasser wird es schnell vollständig decomponirt, indem ein saures (oder neutrales) Salz sich löst, während rothes Quecksilberoxyd zurückbleibt. In verdünnten Säuren ist das Salz leicht löslich.

Specifisches Gewicht aus drei Versuchen: 5·815.

Antimonchlorüre $SbCl^3$.

Rhombisch:

$$a : b : c = 1 : 0·945 : 0·643.$$

Beobachtete Formen:

(011).(101).

(Taf. VI, Fig. 36.)

Die Krystalle, durch Schmelzen und langsames Abkühlen dargestellt, waren schöne, wasserhelle, säulenförmige Combinationen der zweien Prismen, ausser welchen ich auch Flächen einer Pyramide, die Mittelecken zuschärfend beobachtete. Wegen der ausserordentlichen Zerfliesslichkeit der Substanz war an eingehende Untersuchung gar nicht zu denken; es gelang mir

nur an drei Krystallen die folgenden Kanten annäherungsweise zu messen:

$$011 : 0\bar{1}1 = c\,68^1/_2{}^\circ$$
$$101 : 10\bar{1} = c\,114^1/_2.$$

Kobaltidcyankalium $CoCy^6K^3$.

Monoklinisch[1]:

$a : b : c = 1{\cdot}2861 : 1 : 0{\cdot}8093 \quad ac = 89^\circ\ 43{\cdot}5'$.

Beobachtete Formen:

$(110).(100).(\bar{1}22).(322).(011).(\bar{7}44).(722)?\ (\bar{9}88)?$

(Taf. VI, Fig. 37, 38.)

Das Salz krystallisirt[2] in schönen hellgelben vier- oder sechsseitigen Prismen (110).(100), wo in der Regel (110) vorherrschend ist. Sie sind durch kleine, oft sehr undeutliche Flächen der Formen $(\bar{1}22).(322)$ und bisweilen (011), wie Fig. 38, geschlossen.

Ausser diesen Formen habe ich an einzelnen Krystallen noch die folgenden beobachtet: die negative Hemipyramide $(\bar{7}44)$ an einem Krystalle mit dem Formencomplexe (110).(100).(011).$(\bar{7}44)$; die $(\bar{9}88)$ — in der Combination: (110).(100).$(\bar{1}22)$.$(\bar{9}88)$ — und (722) an einem sehr schönen kleinen kurzsäulenförmigen Krystalle: (100).(110).(322).$(\bar{1}22)$.(722). Die zwei letzten Formen: (722) und $(\bar{9}88)$ sind jedoch wegen der Unsicherheit der Messungen ziemlich zweifelhaft; die beobachteten Kantenwinkel sind nämlich nur:

		Berechnet
$722 : 322$	$= 22^\circ\ 40'$	$23^\circ\ 24'$
$\bar{9}88 : \bar{1}22$	$= 16^\circ\ 15$	$15^\circ\ \ 7'$.

Sehr häufig sind die Krystalle Zwillinge — wie Fig. 37 — nach dem gewöhnlichen Gesetze wie beim Ferridcyankalium ausgebildet (Zusammensetzungsfläche (100), deren Normale Um-

[1] Die Aufstellung der Krystalle ist in Analogie mit Herrn Des-cloizeaux's Aufstellung des Ferridcyankalium (Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences: T. XVIII. 668).

[2] Herr Handl hat früher (Sitzungsb. d. k. k. Akad. XXXII. 248) die Formen (100).(010).(322).$(\bar{1}11)$.$(\bar{1}22)$ an einem Krystalle beobachtet.

drehungsaxe), und ausserdem sind die Pyramidenflächen selten an beiden Enden der Krystalle vollzählig ausgebildet, wodurch die Krystalle ein sehr unregelmässiges Aussehen bekommen. Die Hauptaxe ist immer die Richtung der grössten Ausdehnung.

Spaltbarkeit ausgezeichnet nach (100).

Die Messungen sind wegen Streifung oder Krümmung der Flächen sehr wenig übereinstimmend. Die Mittelwerthe, an 11 Krystallen erhalten, sind:

	Anzahl der Krystalle	Anzahl der Messungen	Beobachtet	Berechnet
*110 : 1$\bar{1}$0	6	6	104° 16′	104° 16′
110 : $\bar{1}$10	2	2	76° 0′	75° 44′
*110 : 100	5	7	52° 10′	52° 8′
$\bar{1}$00 : $\bar{7}$44	1	1	49° 31′	49° 33′
$\bar{1}$00 : $\bar{1}$22	3	3	74°49′—76°12′	76° 26·5′
100 : 011	1	1	88° 27′	89° 48′
100 : 322	5	6	53° 39·5′	53° 36′
$\bar{7}$44 : 011	1	1	41° 26′	40° 39′
011 : 322	2	3	36°40′—38°40′	36° 12′
322 : $\bar{1}$22	—	—	—	49° 7·5′
*110 : 322	7	7	40° 11′	—
110 : $\bar{1}$22	4	4	51° 10′	51° 14′
*322 : 12$\bar{2}$	3	3	91° 25′	—
110 : 011	1	1	60° 11′	60° 3·5′
$\bar{1}$10 : 3$\bar{2}$2	2	2	88° 33′	87° 56′
110 : $\bar{7}$44	1	1	91° 3·5′	91° 10′
011 : 0$\bar{1}$1	1	1	77° 36′	77° 58′
001 : 011	—	—	—	38° 59′
$\bar{7}$44 : $\bar{7}\bar{4}$4	1	1	57° 16′	57° 12′
322 : 3$\bar{2}$2	3	3	60° 42′	60° 50′
$\bar{1}$22 : $\bar{1}\bar{2}$2	2	3	75° 0′	75° 22′
($\bar{1}$22)′ : ($\bar{1}\bar{2}$2)″	1	1	27° 28′	27° 7′

Herr Handl, welcher das Salz als rhombisch annahm, fand:

$\bar{1}00 : \bar{1}22 = 76° 19′$
$100 : 322 = 53° 44′$
$322 : 3\bar{2}2 = 60° 53′$,

welche Werthe ziemlich gut mit den meinigen übereinstimmen.

Specifisches Gewicht der Krystalle = 1·913. (Aus zwei Versuchen.)

Das optische Verhalten der Krystalle bestätigt die Annahme des monoklinischen Krystallsystemes. Die Ebene der optischen Axen ist parallel der Symmetrieebene; die erste Mittellinie bildet mit der Hauptaxe einen Winkel von circa 3°30′, der Character innerhalb des spitzen Axenwinkels ist positiv.

An einer Platte, parallel zur Symmetrieebene geschnitten, erhielt ich (100) : c̦ = 86° 30 und somit:

(001)bc̦ = 3° 13′.

Eine Platte, ziemlich gut zur Mittellinie senkrecht geschnitten, gab für den Axenwinkel in Luft:

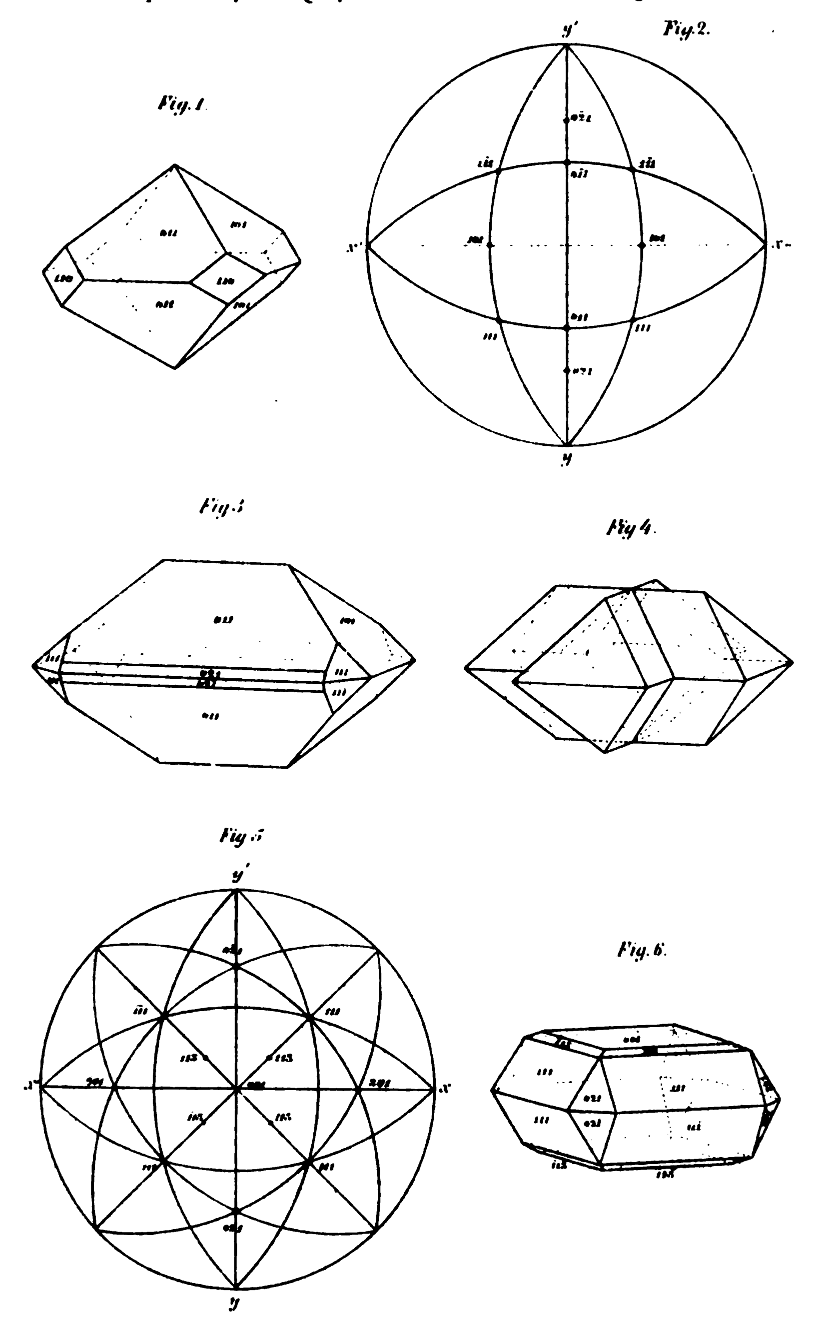
$$(AB) = 31° 10′.$$

Die Axendispension beträchtlich: $\rho < v$.

Die Untersuchungen sind im Universitätslaboratorium ausgeführt; für die Liberalität, mit welcher der Director Herr Prof. Julius Thomsen hier, wie gewöhnlich, mir alle Hilfsmittel des Laboratoriums zu Gebote stellte, sei es mir erlaubt, ihm meinen aufrichtigen Dank abzustatten.

Kopenhagen, den 21. Mai 1872.





Autor del. – M. Fahrmbacher lith. Druck v. Jos. Wagner in Wien.

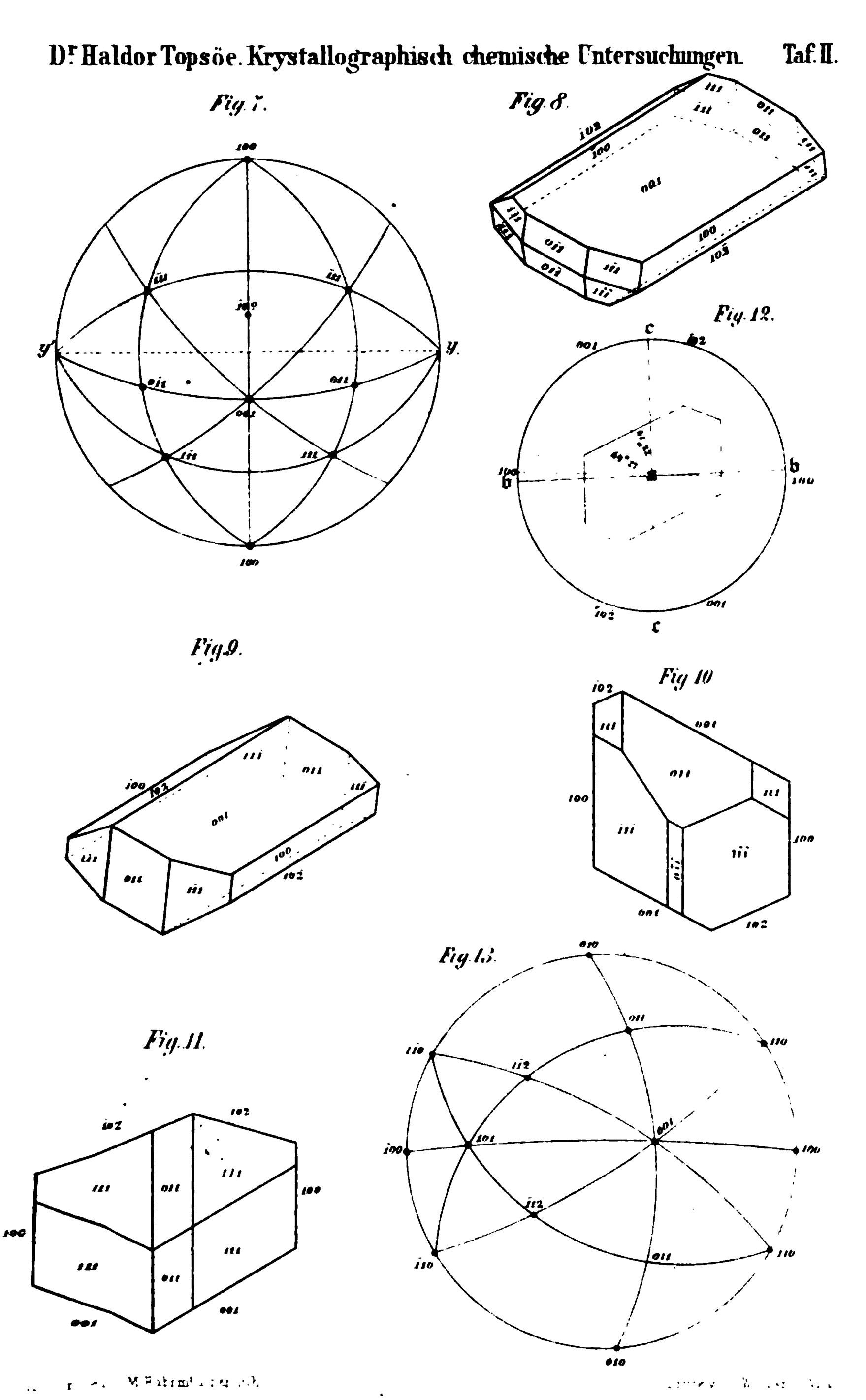

Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 12.
Fig. 9.
Fig. 10
Fig. 13.
Fig. 11.

Fig. 14.

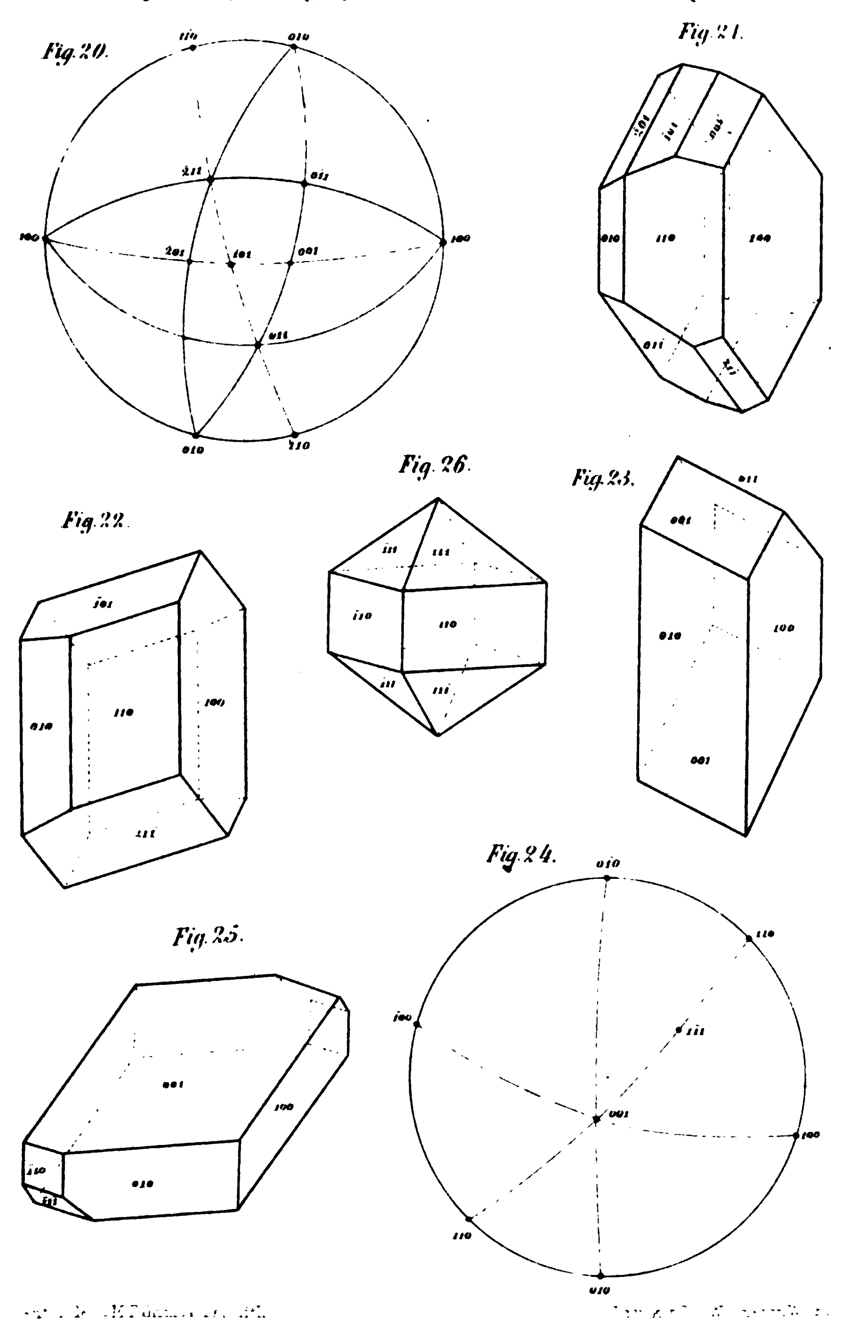
Fig. 15.

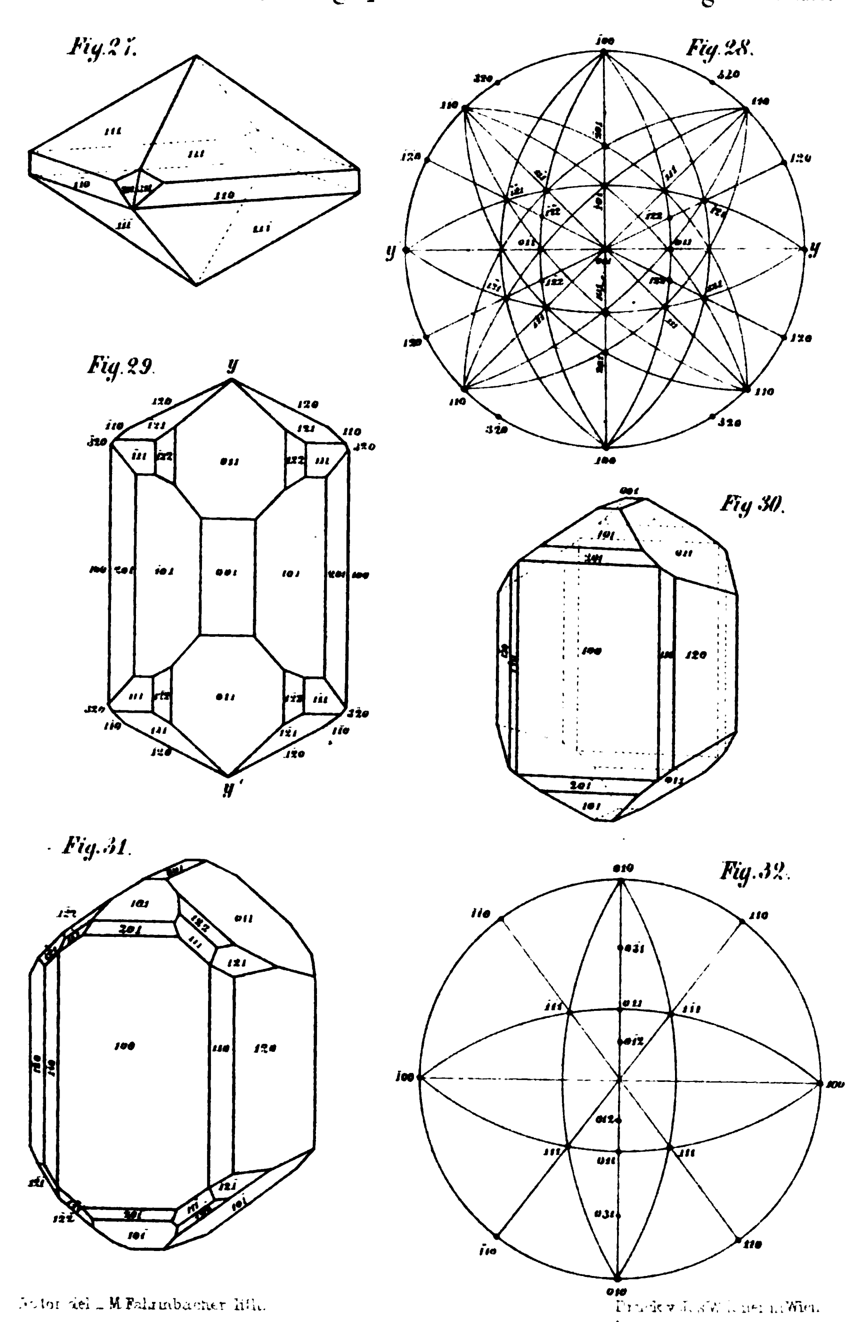
Fig. 19.

Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 18.


Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.



Autor del. – M. Fahrnbacher lith. Druck v. Jos. Wagner in Wien.

Fig. 33.

Fig. 36.

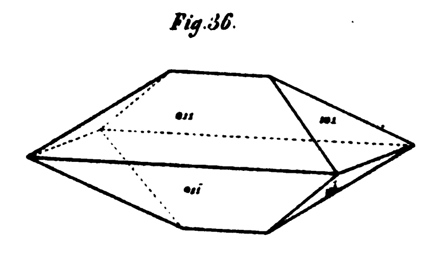


Fig. 35.

Fig. 34.

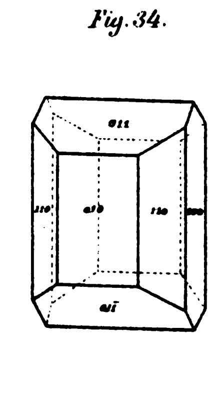


Fig. 37.

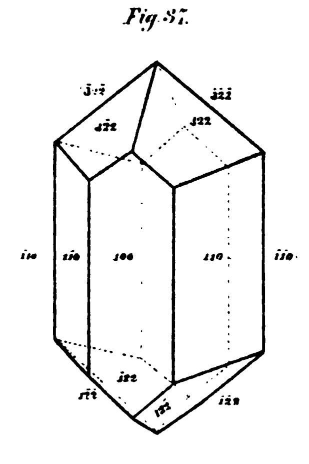
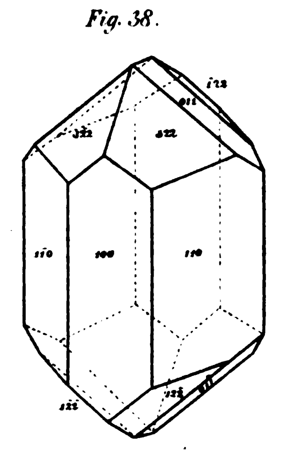


Fig. 38.



Autor del. – M. Fahrmbacher lith. Druck v. Jos. Wagner in Wien.

XVII. SITZUNG VOM 20. JUNI 1872.

In Verhinderung des Präsidenten führt Herr Regierungsrath v. Littrow den Vorsitz.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Zur Theorie der Functionen X_n^m," vom Herrn Prof. L. Gegenbauer in Krems.

„Über den feineren Bau der Tasthaare," vom Herrn J. Dietl, Assistenten am physiologischen Institute der Universität zu Innsbruck.

Herr Director Dr. J. Stefan überreicht eine Abhandlung des Herrn A. v. Obermayer: „Über das thermoelektrische Verhalten einiger Metalle beim Schmelzen."

Herr Prof. E. Suess legt eine Abhandlung des Herrn Custos Th. Fuchs vor, betitelt: „Geologische Studien in den Tertiärbildungen Süd-Italiens."

Herr Prof. H. Hlasiwetz macht eine vorläufige Mittheilung über die Fortsetzung seiner in Gemeinschaft mit Herrn J. Habermann unternommenen Untersuchung der Proteïnstoffe.

Derselbe übergibt ferner eine, in seinem Laboratorium vom Herrn Dr. H. Weidl ausgeführte Untersuchung über das Nicotin.

Herr Prof. V. v. Lang legt eine Abhandlung vor, betitelt: „Krystallographisch-optische Bestimmungen."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei: Atti. Anno XXV, Sess. 5ª. Roma, 1872; 4º.

Akademie der Wissenschaften, kais., zu St. Petersburg: Repertorium für Meteorologie. Band II, Heft 2. St. Petersburg, 1872; 4º.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Dritte Folge. XVIII. Band. Jahrgang 1868. Wien, 1872; gr. 8⁰.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrg. Nr. 17. Wien, 1872; 8⁰.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1889—1893. (Bd. 79. 17—18). Altona, 1872; 4⁰.

Beobachtungen, Schweizer. Meteorologische. October & November 1870; April 1871. Zürich; 4⁰.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome XLIVe. Nr. 173. Genève, Lausanne, Paris, 1872; 8⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nrs. 22—23. Paris, 1872; 4⁰.

Delesse, et de Lapparent, Revue de Géologie pour les annés 1868 et 1869. VIII. Paris, 1872; 8⁰.

Gesellschaft, geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XV (neuer Folge V.) Nr. 5. Wien, 1872; 8⁰.

— Deutsche geologische: Zeitschrift. XXIII. Band, 3. Heft. Berlin, 1871; 8⁰.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 23—24. Wien, 1872; 4⁰.

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie & verwandte Fächer, von Vorwerk. Band XXXVII, Heft 4. Speyer, 1872; 8⁰.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 12. Graz, 1872; 4⁰.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 14—15. Wien; 8⁰.

Mittheilungen des k. k. technischen und administrativen Militär-Comité. Jahrgang 1872, 6. Heft. Wien; 8⁰.

— aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 18. Band, 1872, V. Heft, nebst Ergänzungsheft Nr. 32. Gotha; 4⁰.

Nature. Nrs. 136—137, Vol. VI. London, 1872; 4⁰.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. VI, Nr. 5. Torino, 1871; 4⁰.

Puyals de la Bastida, Don Vicente, Teoria de los números y perfeccion de las matemáticas. Madrid, 1872; 12⁰.

„Revue politique et littéraire“ et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger. Ire Année (2e Série), Nrs. 50—51. Paris & Bruxelles, 1872; 4°.

Società Italiana di Antropologia e di Etnologia: Archivio. IIe Vol., fasc. 2°. Firenze, 1871; 8°.

Société Botanique de France: Bulletin. Tome XVIIIe (1871). Revue bibliographique B—C. Paris; 8°.

Verein, k. ungar. naturwissenschaftlicher: Természettudományi Közlöny. III. Kötet, 19.—28. Füzet. Pest, 1871; kl. 4°.

— naturwissenschaftlicher, in Carlsruhe: Verhandlungen. V. Heft. Carlsruhe, 1871; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 22—23. Wien, 1872; 4°.

Wolf, Rudolf, Astronomische Mittheilungen. XXIX. Zürich; 8°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIV. Jahrgang, 8. Heft. Wien, 1872; 4°.

Krystallographisch-optische Bestimmungen.

Von dem w. M. **Viktor v. Lang.**

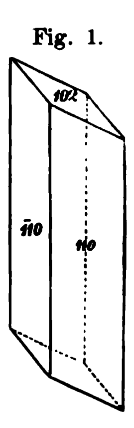
(Mit 8 Holzschnitten.)

Die im Nachfolgenden untersuchten Verbindungen sind nach der Formel $RCl+C_2H_4.PtCl_2$ zusammengesetzt und wurden mir vor langer Zeit von meinem Freunde Dr. C. A. Martius zur Messung übergeben. Nachdem Zeise[1] die Verbindung des Aethylenplatinchlorürs mit Kalium- und Ammoniumchlorid entdeckt hatte, wurde von Griess und Martius[2] gezeigt, dass an die Stelle von Ammoniak auch Aethylamin (C_2H_8), Anilin (C_6H_7) und ähnliche Basen treten können.

Das Ammoniaksalz enthält nach Zeise ein Molecül Krystallwasser (H_2O); dies muss der Isomorphie zufolge jedenfalls auch für das Kalium und Aethylaminsalz, wahrscheinlich auch für das Anilinsalz gelten. Der Wassergehalt der Pyridin-(C_5H_5) und Lutidin-(C_7H_9) Verbindung bleibt dahin gestellt.

1. Kaliumsalz.

Fig. 1.

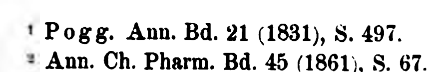


Krystallsystem: monoklinisch.

Die Elemente können wegen Mangels genügender Flächen nicht berechnet werden.

Die Symbole der beobachteten Formen werden mit Rücksicht auf die Isomorphie mit dem folgenden Salze:

100, 110, 102.



[1] Pogg. Ann. Bd. 21 (1831), S. 497.

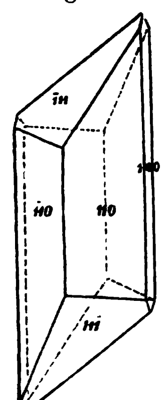
[2] Ann. Ch. Pharm. Bd. 45 (1861), S. 67.

Normalenwinkel:

		Forchhammer[1]	Lang	Gerechnet
110.1$\bar{1}$0	=	103° 58′	104° 26′	104° 30′
110.100		—	52 15	—
110.102		67 55	—	—
102.100		—	—	52 23.

Die Form 102 wurde von **Forchhammer** beobachtet, während an den von mir untersuchten Krystallen die Enden immer zu undeut lich ausgebildet waren, um Krystallflächen daran erkennen zu lassen. Dagegen zeigten meine Krystalle bisweilen die Abstumpfung der scharfen Seitenkanten des Prisma durch die Form 100.

Fig. 2.



2. Ammoniumsalz.

Krystallsystem: monoklinisch.

Elemente:

$$a : b : c = 1{\cdot}3553 : 1 : 1{\cdot}1760$$

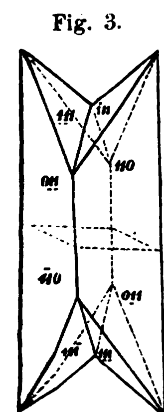
$$ac = 107°\ 39'$$

Formen: 100, 110, $\bar{1}$10.

Normalenwinkel:

		Gerechnet	Beobachtet
110.100	=	52° 15′	52° 15′
110.$\bar{1}$10		75 30	75 32
110.110		104 30	—
$\bar{1}$11.$\bar{1}$01		69 0	—
$\bar{1}$11.$\bar{1}$10		38 34	38 46
$\bar{1}$11.110		69 57	70 8
$\bar{1}$11.$\bar{1}\bar{1}$1		90 40	90 20.

Fig. 3.



Die Krystalle sind prismatisch durch das Vorherrschen des Prisma. Sehr häufig sind Penetrations-Zwillinge, deren Drehungsaxe normal zu 100 ist.

Für die dem Kaliumsalze entsprechende Fläche 102 findet man mit den obigen Elementen

102.100 = 52° 17′

102.100 68 0.

[1] Pogg. Ann. Bd. 21, S. 513.

3. Aethylaminsalz.

Krystallsystem: monoklinisch.

Isomorph dem Kalium- und Ammoniumsalze.

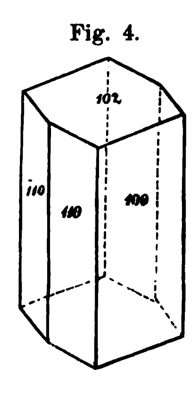
Die Elemente können wegen Mangels genügender Flächen nicht bestimmt werden.

Formen: 100, 110, 102.

Normalenwinkel:

	Beobachtet	Gerechnet
110.100 =	51° 42′	51° 48′
110.$\bar{1}$10	76 24	—
102.100	52 24	—
102.110	67 59	67 50

Fig. 4.



Die Flächen des vorherrschenden Prisma sind meist ungleich entwickelt. Die Fläche 100 ist etwas gekrümmt.

4. Anilinsalz.

Krystallsystem: monoklinisch.

Elemente:

$$a : b : c = 0\cdot6540 : 1 : 0\cdot8200$$
$$ac = 106^\circ\ 6'.$$

Formen:

100, 110, $\bar{2}$05, $\bar{1}$11.

Normalenwinkel:

	Gerechnet	Beobachtet
110.100 =	32° 10′	32° 6′
110.1$\bar{1}$0	64 20	64 20
110.$\bar{1}$10	115 40	—
$\bar{2}$05.$\bar{1}$00	76 52	76 appr.
$\bar{2}$05.$\bar{1}$10	78 55	—
$\bar{1}$11.$\bar{1}$00	51 50	52 7
$\bar{1}$11.$\bar{1}$10	37 58	37 58
$\bar{1}$11.110	75 4	74 51
$\bar{1}$11.$\bar{1}\bar{1}$1	59 48	60 appr.

Fig. 5.

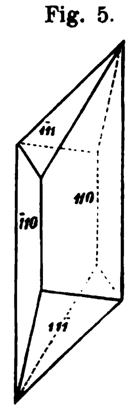
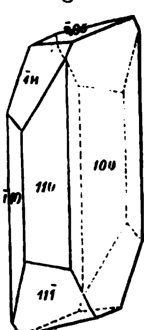


Fig. 6.



Die Krystalle aus verschiedenen Krystallisationen besitzen oft ziemlich verschiedenen Habitus. Die Fläche $\bar{2}05$ ist immer gekrümmt und konnte nur näherungsweise bestimmt werden. Die Fläche 100 ist an den tafelförmigen Krystallen (Fig. 6) ebenfalls abgerundet und auch die Flächen $\bar{1}11$ spiegeln nur schlecht.

Diese Verbindung ist vielleicht isomorph mit den vorhergehenden. Wählt man nämlich die Elemente so, dass die Symbole der beobachteten Formen 100, 210, $\bar{3}05$, $\bar{6}34$ werden, so hat man

$$a : b : c = 1{\cdot}3079 : 1 : 1{\cdot}0934$$
$$ac = 106^\circ 6',$$

welche Werthe von den Elementen der Ammoniumverbindung nicht allzu viel abweichen.

5. Pyridinsalz.

Fig. 7.

Krystallsystem: rhombisch.

Elemente:

$$a : b : c = 1 : 0{\cdot}8847 : x.$$

Formen: 110, 001.

Normalenwinkel:

$110 . \bar{1}10$	$= 83^\circ 40'$	beobachtet
$110 . 001$	90	—

Der rhombische Charakter dieser Krystalle wird auch durch ihr optisches Verhalten bestätigt. Die erste Mittellinie ist nämlich senkrecht zu der Theilungsfläche 001 und daher parallel dem Prisma, während die Ebene der optischen Axen parallel der längeren Diagonale desselben ist. Der optische Charakter der ersten Mittellinie ist negativ; der scheinbare Winkel der Axen ungefähr 30° und derselbe für rothes Licht kleiner als für violettes. Die Anordnung der Farben ebenfalls entsprechend dem rhombischen Systeme.

6. Lutidinsalz.

Krystallsystem: triklinisch.

Elemente:

$$a:b:c = x:1:0{\cdot}7116$$

$bc = 76° 26'$	$010.001 = 95° 31'$
$ca = 111° 0'$	$001.100 = 72° 56'$
$ab = 115° 20'$	$100.010 = 67° 43'$.

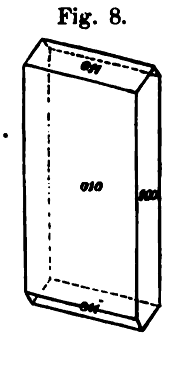


Fig. 8.

Formen: 100, 010, 011, $0\bar{1}1$.

Normalenwinkel:

	Beobachtet	Gerechnet
100.010 =	67° 43′	—
011.010	57 18	—
$0\bar{1}1$.010	129 52	—
011.100	61 4	—
$0\bar{1}1$.100	89 50	89° 21′.

Die Krystalle sind tafelförmig durch das Vorherrschen der Fläche 010.

Zur Theorie der Functionen X_n^m.

Von Leopold Gegenbauer.

Differentiirt man die Gleichung:

$$1.)\quad X_n^m = \frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{\Pi(m+2n-1)}\left[(x^2-1)^{n+\frac{m-1}{2}}\right]^{(n+m-1)}$$

nach x, so erhält man:

$$2.)\quad \left[X_n^m\right]' = \frac{m(m+2)\ldots(m+2n-4)}{\Pi(m+2n-3)}\left[x(x^2-1)^{n+\frac{m-3}{2}}\right]^{(n+m-1)}.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form:

$$3.)\quad \left[X_n^m\right]' = \frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{\Pi(m+2n-3)}\left[(x^2-1)^{n+\frac{m-3}{2}}\right]^{(n+m-2)}$$

$$+\frac{m(m+2)\ldots(m+2n-6)}{\Pi(m+2n-5)}\left[(x^2-1)^{n+\frac{m-5}{2}}\right]^{(n+m-2)}$$

so sieht man, dass folgende interessante Relation besteht:

$$4.)\quad \left[X_n^m\right]' = (m+2n-2)X_{n-1}^m + \left[X_{n-2}^m\right]'.$$

Setzt man in dieser Formel: $n-2$, $n-4$, $n-6$, ... an die Stelle von n, und addirt alle sich ergebenden Gleichungen, so findet man schliesslich:

$$5.)\quad \left[X_n^m\right]' = (m+2n-2)X_{n-1}^m + (m+2n-6)X_{n-3}^m$$

$$+ (m+2n-10)X_{n-5}^m + \ldots$$

Für diese Formel kann man, um die geraden und ungeraden n von einander zu unterscheiden, auch folgende zwei Gleichungen schreiben:

$$6.)\quad \left[X^m_{2r}\right]' = (m+4r-2)X^m_{2r-1} + (m+4r-6)X^m_{2r-3} + (m+4r-10)X^m_{2r-5} + \ldots + (m+2)X^m_1$$

$$7.)\quad \left[X^m_{2r+1}\right]' = (m+4r)X^m_{2r} + (m+4r-4)X^m_{2r-2} + (m+4r-8)X^m_{2r-4} + \ldots + (m+4)X^m_2 + m.$$

Differentiirt man die Formel 5. wiederholt nach x, so erhält man der Reihe nach die folgenden Gleichungen:

$$8.)\quad \left[X^m_n\right]'' = (m+2n-2)(m+2n-4)X^m_{n-2} + 2(m+2n-4)(m+2n-8)X^m_{n-4} + 3(m+2n-6)(m+2n-12)X^m_{n-6} + \ldots$$

$$9.)\quad \left[X^m_n\right]''' = (m+2n-2)(m+2n-4)(m+2n-6)X^m_{n-3} + 3(m+2n-4)(m+2n-6)(m+2n-10)X^m_{n-5}$$
$$+ 6(m+2n-6)(m+2n-8)(m+2n-14)X^m_{n-7} + \ldots$$

$$10.)\quad \left[X^m_n\right]'''' = (m+2n-2)(m+2n-4)(m+2n-6)(m+2n-8)X^m_{n-4}$$
$$+ 4(m+2n-4)(m+2n-6)(m+2n-8)(m+2n-12)X^m_{n-6}$$
$$+ 10(m+2n-6)(m+2n-8)(m+2n-10)(m+2n-16)X^m_{n-8} + \ldots$$

. . . .

$$11.)\quad \left| X_n^m \right|^{(r)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=g} \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+r-2)}{(r-1)!}(m+2n-2\mu)(m+2n-2\mu-2)\ldots$$

$$(m+2n-2\mu-2r+4)(m+2n-4\mu-2r+4)\,X^m_{n-r-2\mu+2}$$

wo $r>0$ ist und g die grösste in $1+\frac{n-r}{2}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

Es ist aber:

$$12.)\quad \left[X_n^m\right]^{(r)} = m(m+2)\ldots(m+2r-2)\,X^{m+2r}_{n-r}$$

und daher kann man die Formel 11.) auch in folgender Gestalt schreiben:

$$13.)\quad X^{m+2r}_{n-r} = \sum_{\mu=1}^{\mu=g} \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+r-2)}{(r-1)!\,m(m+2)\ldots(m+2r-2)}(m+2n-2\mu)(m+2n-2\mu-2)\ldots$$

$$(m+2n-2\mu-2r+4)(m+2n-4\mu-2r+4)\,X^m_{n-r-2\mu+2}\,.$$

Die Gleichung 13.), welche eine neue bemerkenswerthe Eigenschaft der Functionen X_n^m ausdrückt, werden wir nun benützen, um den Werth des bestimmten Integrales:

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} \cdot X_{n-r}^{m+2r} \cdot X_{n_1-s}^{m+2s} \cdot dx$$

zu ermitteln.

Ist g_1 die grösste in $1+\frac{n_1-s}{2}$ enthaltene ganze Zahl, so hat man die Gleichung:

$$14.)\quad X_{n_1-s}^{m+2s} = \sum_{\nu=1}^{\nu=g_1} \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+s-2)}{(s-1)!\,m(m+2)\ldots(m+2s-2)}(m+2n_1-2\nu)(m+2n_1-2\nu-2)\ldots$$

$$(m+2n_1-2\nu-2s+4)(m+2n_1-4\nu-2s+4)\,X_{n_1-s-2\nu+2}^{m}.$$

Multiplicirt man das Product der Gleichungen 13.) und 14.) mit $(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}.dx$ und integrirt alsdann von $x=-1$ bis $x=+1$, so erhält man:

$$15.)\quad \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} \cdot X_{n-r}^{m+2r} \cdot X_{n_1-s}^{m+2s} \cdot dx = \sum_{\mu=1}^{\mu=g}\sum_{\nu=1}^{\nu=g} \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+r-2)\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+s-2)}{(r-1)!(s-1)!m(m+2)\ldots(m+2r-2)m(m+2)\ldots(m+2s-2)}.$$

$$(m+2n-2\mu)(m+2n-2\mu-2)\ldots(m+2n-2\mu-2r+4)(m+2n-4\mu-2r+4).$$

$$(m+2n_1-2\nu)(m+2n_1-2\nu-2)\ldots(m+2n_1-2\nu-2s+4)(m+2n_1-4\nu-2s+4).$$

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} \cdot X_{n-r-2\mu+2}^{m} \cdot X_{n_1-s-2\nu+2}^{m} \cdot dx.$$

Allé hat aber gezeigt, dass:

16.) $$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} . X_p^m . X_q^m . dx = 0.$$

17.) $$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} . \left(X_p^m\right)^2 . dx = \left[\frac{2^\rho \Pi(\rho)}{\Pi(2\rho)}\right]^2 . \frac{\Pi(\sigma+\rho)}{\Pi(\sigma-\rho)} . \frac{2}{2\sigma+1}$$

ist, wenn

$$\frac{m-1}{2} = \rho, \quad p+\rho = \sigma$$

gesetzt wird. Demnach wird das Integral 15.) nur dann einen von Null verschiedenen Werth haben, wenn die Gleichung:

18.) $$\mu - \nu = \frac{n-n_1+s-r}{2}$$

für $\mu - \nu$ eine ganze Zahl gibt.

Wir können also folgenden Satz aufstellen:

Ist der Ausdruck:

$$\frac{n-n_1+s-r}{2}$$

eine ganze Zahl, so ist:

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}\cdot X_{n-r}^{m+2r}\cdot X_{n_1-s}^{m+2s}\cdot dx=\sum_{\mu=1}^{\mu=g}\sum_{\nu=1}^{\nu=g}\left[\frac{2^\rho\,\Pi(\rho)}{\Pi(2\rho)}\right]^2\cdot\frac{\Pi(\sigma+\rho)}{\Pi(\sigma-\rho)}\cdot\frac{2}{2\sigma+1}\cdot$$

$$\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+r-2)\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+s-2)}{(r-1)!(s-1)!m(m+2)\ldots(m+2r-2)m(m+2)\ldots(m+2s-2)}\cdot$$

$$(m+2n-2\mu)(m+2n-2\mu-2)\ldots(m+2n-2\mu-2r+4)(m+2n-4\mu-2r+4)$$

$$(m+2n_1-2\nu)(m+2n_1-2\nu-2)\ldots(m+2n_1-2\nu-2s+4)(m+2n_1-4\nu-2s+4)$$

wo $\rho=\frac{m-1}{2}$, $\sigma=\rho+n-r-2\mu+2$ ist, und für μ und ν alle jene Zahlen zu setzen sind, die der Gleichung:

$$\mu-\nu=\frac{n-n_1+s-r}{2}$$

genügen und so beschaffen sind, dass μ zwischen 1 und g, ν zwischen 1 und g_1 liegt.

Um noch den Werth des bestimmten Integrals:

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}\cdot X_n^m\cdot X_{n_1-s}^{m+2s}\cdot dx$$

zu ermitteln, multipliciren wir die Gleichung 14.) mit $(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}\cdot X_n^m\cdot dx$ und integriren das Product von $x=-1$ bis $x=+1$. Aus der so erhaltenen Gleichung:

$$19.)\quad \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}X_n^m\cdot X_{n_1-s}^{m+2s}\cdot dx=\sum_{\nu=1}^{\nu=n_1}\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+s-2)}{(s-1)!\,m(m+2)\ldots(m+2s-2)}(m+2n_1-2\nu)(m+2n_1-2\nu-2)\ldots$$
$$(m+2n_1-2\nu-2s+4)(m+2n_1-4\nu-2s+4).$$
$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}X_n^m\cdot X_{n_1-s-2\nu+2}^m\cdot dx$$

folgt unmittelbar folgender Satz:

Ist:

$$n>n_1-s$$

oder:

$$n<n_1-s \quad \text{und gleichzeitig} \quad n_1-s-n$$

eine ungerade Zahl, so ist:

$$20.)\quad \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}X_n^m\cdot X_{n_1-s}^{m+2s}=0;$$

ist aber

$$n<n_1-s \quad \text{und gleichzeitig} \quad n_1-s-n$$

eine gerade Zahl, so ist:

$$21.)\quad \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}X_n^m\cdot X_{m+2s}^{n_1-s}=\left[\frac{2^\rho\,\Pi(\rho)}{\Pi(2\rho)}\right]^2\frac{\Pi(\sigma+\rho)}{\Pi(\sigma-\rho)}\,\frac{2}{2\sigma+1}\,\frac{(\tau+1)(\tau+2)(\tau+3)\ldots(\tau+s-1)}{(s-1)!\,m(m+2)\ldots(m+2s-2)}.$$

$$(m+2n_1-2\tau-2)(m+2n_1-2\tau-4)\ldots(m+2n_1-2\tau-2s+2)(m+2n_1-4\tau-2s);$$

wo:

$$\rho=\frac{m-1}{2},\quad \sigma=n+\rho,\quad \tau=\frac{n_1-n-s}{2}$$

ist.

Setzt man in den in dieser Arbeit entwickelten Formeln $m=1$ und bedenkt, dass:

$$22.)\quad \left[P^{(\lambda)}\right]^{(\vartheta)}=\frac{\Pi(2\vartheta)}{2^{\vartheta}\Pi(\vartheta)}X_{\lambda-\vartheta}^{1+2\vartheta}$$

ist, so erhält man eine Reihe von Sätzen über Kugelfunctionen erster Art, die schon von A. Winckler im Jahre 1860 aufgestellt wurden.

Über das thermoelectrische Verhalten einiger Metalle beim Schmelzen.

Von **Albert v. Obermayer.**

(Mit 1 Tafel.)

Alle bisher angestellten, mir bekannten Beobachtungen der electromotorischen Kräfte von Thermoelementen beziehen sich auf Metalle im festen Zustande. Es schien mir nicht ohne Interesse, diese Beobachtungen auch auf jene Fälle auszudehnen, wo das eine Metall im Schmelzen begriffen ist, und zu untersuchen, ob die electromotorische Kraft hiebei keine sprungweise Veränderung erleidet.

Die Einrichtung der zu vorbezeichnetem Zwecke benützten Thermoelemente ist aus Fig. 1 zu ersehen. *T* stellt hierin einen Trichter aus feuerfestem Thone vor, in welchem sich das zu schmelzende Metall befindet. Durch die Trichterröhre reicht ein Stab *mm* gleichartigen Metalles herab, dessen freies Ende mit Siegellack überzogen ist. Derlei Stäbchen wurden entweder durch Aufsaugen des geschmolzenen Metalles in erwärmte Glasröhren oder durch Giessen in eisenblecherne Formen angefertigt. Das Stäbchen *mm* taucht mit seinem unteren Ende in eine mit Quecksilber gefüllte Eprouvette, die in Eis eingesenkt ist. Damit das Quecksilber das eingesenkte Metall nicht angreife, ist an letzteres ein kurzes, amalgamirtes Kupferdrahtstückchen gelöthet und die Löthstelle mit Siegellack überzogen. Das zur Kühlung nöthige Eis befindet sich in einem Kasten aus Zinkblech, mit hohlen Wänden, dessen kubischer, innerer Raum fünf Zoll Seitenlänge hat.

Der Trichter ist in eine Blechfassung eingesetzt, welche aus einer, die Trichterröhre eng umschliessenden Röhre *A* und einer

weiteren Röhre *B* besteht. *A* und *B* sind durch angelöthete Spangen *C* mit einander verbunden. Die Röhre *B* passt in die Blechröhre *D* und wird darin durch ihren oberen umgebogenen Rand gehalten. Ein mit Siegellack überzogener Korkstöpsel, durch den das Metallstück *m* hindurchgesteckt ist, verschliesst die untere Öffnung von *A* wasserdicht.

Die Röhre *D* ist central oberhalb, die Röhre *H* central unterhalb auf eine Tasse *F* gelöthet. Das Metallstück *m* tritt durch die Röhre *H* hindurch. Ein Korkstöpsel und ein Siegellacküberzug bewirken auch hier den wasserdichten Verschluss.

Durch das seitliche Röhrenstück *E* und einen Kautschukschlauch kann Wasser aus einem grösseren Behälter in die Röhre *D* geleitet und so das Metallstück *m* gekühlt und vor dem Abschmelzen bewahrt werden. Das Wasser fliesst über den oberen Rand von *B* auf die Tasse und von dieser durch die Röhre *G* ab.

Ein Draht *NN* taucht einerseits in das im Trichter befindliche Metall, anderseits in eine mit Quecksilber gefüllte Eprouvette, die in Eis eingesenkt ist.

Um die ganze Vorrichtung zusammenzustellen, muss zuerst der Trichter mit dem Stäbchen *m* in die Fassung *A*, *C*, *B* eingesetzt, *A* durch Kork und Siegellack verschlossen werden. Sodann muss die Fassung sammt Trichter und Stäbchen in die Röhre *D* eingesetzt, *H* verschlossen und versiegelt und zwischen das Stäbchen *m* und die Wand der Trichterröhre etwas trockener Thon eingefüllt werden. Nun wird die ganze Vorrichtung wie zum Versuche hergerichtet, die Metallmenge *M* eingeschmolzen und der Draht *N* eingesetzt. Es ist sehr vortheilhaft, wenn das Ende des Drahtes, welches in das geschmolzene Metall taucht, sich mit diesem letzteren überziehen lässt.

Die obere Öffnung des Trichters wurde noch mit einem Deckel aus Eisenblech, welcher mit passenden Einschnitten versehen war, bedeckt und die Oberfläche des Metalles mit feinem Kohlenpulver bestreut, um die allzurasche Oxydation zu verhüten.

Das Erhitzen geschah durch Weingeistlampen, deren Einrichtung aus *L* Fig. 1 zu ersehen ist. Jede Lampe hatte zwei Röhren für die Dochte. Wenn vier solche Lampen auf geeigneten Trägern um den Trichter gestellt waren, konnte Zink noch über seinen Schmelzpunkt erhitzt werden. Die Regulirung der Tem-

peratur geschah durch Herausziehen und Hineinschieben der Dochte.

Von einzuschmelzenden Metallen wurden benützt: Chemisch reines Zinn, chemisch reines und käufliches Blei, chemisch reines Zink, käufliches Wismuth und eine Legirung aus drei Äquivalenten Zinn und einem Äquivalente Blei. Diese Legirung schmilzt ohne vorher weich zu werden und unterscheidet sich so von den anderen Zinnbleilegirungen.

Als eintauchende Metalle wurden sehr geschmeidiger, weicher $1^1/_2$ Linien dicker Eisendraht und ein ebenso dicker Kupferdraht benützt.

I. Bestimmung der electromotorischen Kraft.

Um über das Verhältniss der electromotorischen Kräfte Aufschluss zu erhalten, wurden die Thermoelemente mit einer Thermosäule von zwölf Kupfer-Neusilber-Elementen verglichen. Von diesen zwölf Elementen konnten, je nach Bedarf, auch vier oder acht für sich allein benützt werden. Die einen Löthstellen derselben waren durch Einsenken in Eis auf Null Graden, die anderen durch Wasserdampf auf der, dem Barometerstand entsprechenden Siedetemperatur erhalten. Das Siedegefäss hatte in seinem Deckel eine kreisförmige Öffnung, welche durch ein die Elemente zusammenhaltendes, mit Eisenlack und Asphalt überzogenes, in Blech gefasstes Holzstück geschlossen wurde. Eine cylindrische, seitlich und im Boden durchlochte Kammer umschloss die Löthstellen, welche, sowie die in Eis tauchenden, zur Vermeidung zufälliger Nebenschliessungen mit Eisenlack überstrichen waren.

Zur Vergleichung der electromotorischen Kräfte diente die Drahtcombination Fig. 2, worin *e* das zu untersuchende Element und *E* die Kupfer-Neusilber-Kette sind. In den Stromwechslern *a*, *b*, *c* sind die Klemmen durch Anbringung spaltenförmiger Vertiefungen vermieden. In das Quecksilber, mit welchem dieselben gefüllt sind, tauchen gut amalgamirte Zuleitungsdrähte. Central zu den Spalten ist, wie bei den allgemein gebräuchlichen Stromwechslern, ein Metallstäbchen senkrecht in die, jene enthaltende

Holzplatte getrieben. Ein Holzstück lässt sich mit Leichtigkeit um das Stäbchen drehen und längst desselben verschieben; es trägt zwei zweimal rechtwinkelig gebogene, amalgamirte Kupferdrähte, durch welche die Verbindung je zweier nebeneinanderliegender Spalten hergestellt wird.

f, *g*, *h* und *k* sind Quecksilbernäpfchen; zwischen *g* und *h* können Widerstände *W* eingeschaltet werden, deren Grössen zwar ein- für allemal bestimmt, jedoch an den verschiedenen Versuchstagen controlirt wurden, um den Temperatureinfluss zu eliminiren.

Alle in Quecksilber tauchenden Drahtenden sind amalgamirt.

R ist ein Rheostat mit Neusilberdraht und Gleiträdchen. Es wurde bei Beginn der Versuche nebst dem Rheostaten, welcher nur sprungweise regulirte, noch ein Agometer eingeschaltet, welches kleine Widerstandsunterschiede hervorzubringen gestattete. Nachdem sich aber herausstellte, dass der Rheostat durch Einschmieren mit einem feinen, nicht eintrocknenden Öle recht gleichmässig regulirt, wurde das Agometer bei späteren Versuchen hinweggelassen.

S ist ein Mayerstein'sches Electrogalvanometer [1]. Die Ablesungen wurden mit Fernrohr und Scala gemacht. Die beiden Hülfsmagnete, zur Astasirung des kleinen ringförmigen Magneten im Multiplicator, waren bei den Versuchen hinweggelassen. Um das Anschlagen des Magneten an das kupferne Gehäuse des Multiplicators und die daraus entspringenden Veränderungen der Gleichgewichtslage zu verhindern, konnte nach Bedarf ein den Strom hinlänglich schwächender Widerstand *U* eingeschaltet werden. Das Einschalten geschah durch die, aus der Figur ersichtliche Anordnung des Stromwechslers *d*.

Zur Ausführung der Messungen wurde das Element und die Thermokette in Gang gesetzt, dann bei *W* nacheinander gemessene Widerstände w_1 w_2 w_3 .... eingeschaltet. Durch Vorversuche war die zweckmässigste Grösse dieser Widerstände für die einzelnen Thermoelemente aufgesucht worden. Am Rheostaten *R* wurden Widerstände w_1', w_2', w_3'... von solcher Grösse eingeschaltet, dass durch das Galvanometer *S* kein Strom ging.

---

[1] Pogg. Ann. Bd. 114, S. 132. War früher Eigenthum des physiologischen Institutes der k. k. Josephs-Akademie.



Durch Anwendung der beiden Kirchhoff'schen Sätze auf die Vorgänge in der Drahtcombination Fig. 2 gelangt man, bei Combination je zweier Beobachtungen, leicht zu der Formel:

$$\frac{e}{E} = \frac{w_i' - w_k'}{w_i - w_k - w_i' + w_k'},$$

worin e die electromotorische Kraft des zu untersuchenden Elementes, E die electromotorische Kraft der Kette, mit der verglichen wurde, ist. Bei Berechnung der Beobachtungen erwies es sich vortheilhaft, je zwei aufeinanderfolgende Beobachtungen zu combiniren. Es stellten sich so die geringsten, mittleren Beobachtungsfehler heraus.

Nachdem das so gefundene Verhältniss auf ein Kupfer-Neusilber-Element bezogen, berechnet war, musste es noch bezüglich des Barometerstandes corrigirt werden, was durch Multiplication mit dem Factor $\frac{t}{100}$ geschieht, worin t die dem herrschenden Barometerstande entsprechende Siedetemperatur bedeutet.

Die Widerstände w' wurden nicht am Rheostaten abgelesen, selbst dann nicht, als er mit Öl eingeschmiert war, sondern mittelst einer Wheatstone'schen Brücke gemessen. Diese hatte eine ähnliche Einrichtung wie jene, welche ich zum Messen von Widerständen in Platinblechen [1] benützte. Diesmal hatte ich jedoch einen Neusilberdraht, statt eines Stahldrahtes, angewendet und nach dem Verfahren von Siemens [2] einen Umschalter mit der Brücke verbunden.

Dieser Umschalter besteht aus einem vorbeschriebenen Stromwechsler, dessen beide gegenüberliegende Spalten mit den Enden der Brücke durch dicke Kupferdrahtstücke verbunden sind. In die anderen beiden, gegenüberliegenden Spalten tauchen die einen Enden der zu vergleichenden Widerstände; die andern tauchen in das Quecksilbernäpfchen, von welchem der Draht zum Galvanometer führt.

Die Summen der Ablesungen, die man erhält, wenn mittelst des Umschalters die beiden zu vergleichenden Widerstände verwechselt werden, müssen stets die Länge des Messdrahtes geben.

---

[1] Sitzb. d. Wr. Akad. Bd. LX, S. 247. [2] Pogg. Ann. Bd. 110, S. 9.

Durch die Fehler beim Anlöthen des Messdrahtes an die dicken Kupferdrahtstücke können leicht Übergangswiderstände hervorgerufen werden. Durch das Umschalten der Widerstände während des Vergleichens wird man hierauf aufmerksam. Es müssen fehlerhafte Brückendrähte entweder ausgewechselt, oder an den berechneten Widerständen Correctionen angebracht werden. Entschliesst man sich zu letzterem Vorgange, so sind die zu vergleichenden Widerstände so zu wählen, dass die Ablesungen nie viel über zwei Drittel der Länge des Messdrahtes betragen. Die Genauigkeit der Messungen mit der, von mir verwendeten Brücke dürfte ungefähr 0·5 Pct. betragen, was für den vorliegenden Zweck vollkommen ausreicht.

Es folgt nun eine Tabelle, welche die Zusammenstellung der gewonnenen Resultate enthält:

e bedeutet hierin das Verhältniss der electromotorischen Kraft des Thermoelementes, bezogen auf ein Kupfer-Neusilber-Element, bei 100° C. Temperaturs-Differenz der Löthstellen;
m die Anzahl der Kupfer-Neusilber-Elemente, mit denen ververglichen wurde,
n die Anzahl der Versuche,
F den mittleren Fehler einer Beobachtung,
f den mittleren Fehler des Resultates,

letztere beiden Grössen nach den Formeln

$$F = \sqrt{\frac{\Sigma}{n-1}}, \quad f = \sqrt{\frac{\Sigma}{n(n-1)}}$$

gerechnet, worin Σ die Summe der Fehlerquadrate bedeutet.

Element	e	m	n	F		f	
Eisen, Zinn.....	1·680	8	26	0·146	9%	0·029	1·7%
	1·698	8	9	0·177		0·059	
Eisen, Blei	1·900	8	20	0·061	3·1%	0·014	0·7%
	1·891	8	21	0·057		0·013	
Eisen, Zink.....	0·400	4	16	0·028	7%	0·007	1·8%
	0·382	4	15	0·023		0·006	
Kupfer, Zink ...	0·553	4	12	0·010	1·3%	0·003	0·5%
Eisen, Wismuth..	11·62	4	12	2·99	30%	0·2	7%
Eisen, $PbSn_3$ ...	1·497	8	12	0·160	10·7%	0·046	3·1%

Selbstverständlich ist hiebei die Temperatur der erwärmten Löthstelle die Schmelztemperatur des leichter flüssigen Metalles.

Endlich wurde noch eine Vergleichung der zwölf Kupfer-Neusilber-Elemente mit einem Daniel'schen Elemente vorgenommen, dessen Zink ein sehr gut amalgamirtes Stäbchen war. Die electromotorische Kraft des Daniel'schen Elementes ergab sich aus neun Beobachtungen gleich der, von 671 Kupfer-Neusilber-Elementen. Die Fehler sind $F = 34$ oder 5% und $F = 9$ oder $1{\cdot}3\%$.

Die mittleren Beobachtungsfehler stellen sich, Wismuth ausgenommen, nicht sehr gross heraus; sie sind im allgemeinen um so bedeutender, je tiefer die Temperatur ist, bei der beobachtet wurde. Es weist dies darauf hin, dass allenfallsige Änderungen der electromotorischen Kraft während des Schmelzens höchstens beim Wismuth von Belang sein können.

II. Die Änderung der electromotorischen Kraft der Thermoelemente, während des Schmelzens und Erstarrens.

Zu diesen Versuchen wurden die Elemente nebst einem ausreichenden Widerstande in den Schliessungskreis des Galvanometer eingeschaltet und die Ablesungen an der, in Millimeter getheilten, 1355 Mm. vom Spiegel entfernten Scala beobachtet. Die mit Quecksilber gefüllten Eprouvetten, welche die Verbindung des Elementes mit dem Schliessungskreise vermitteln, waren bei diesen Versuchen in Wasser von der fast constanten Zimmertemperatur von 20° C. eingetaucht.

Wegen der grossen Metallquerschnitte ist die Änderung des Widerstandes in den Thermoelementen zu vernachlässigen, so dass die electromotorische Kraft der Stromstärke proportional gesetzt werden kann. Es handelt sich also in den vorliegenden Versuchen zunächst darum, zu entscheiden, ob die Stromstärke während eines gewissen Zeitabschnittes constant geblieben ist, oder sich geändert hat. Es wird daher genügen, im nachfolgenden nur die Ablesungen an der Scala anzuführen.

In den nachstehend beschriebenen vier Versuchen war in den Schliessungskreis des Elementes nebst dem Galvanometer, dessen Widerstand sehr nahe zwei Siemens'sche Quecksilbereinheiten betrug, noch ein Widerstand von 6·4 *SE* eingeschaltet.

1. Beim Zinn-Eisen-Elemente war die Ablesung während des Schmelzens 174·5, sie stieg sehr langsam auf 176. Bei weiterem Erhitzen des flüssigen Zinnes stieg auch die Stromstärke, schien sich aber einem Maximum zu nähern. Eine Abnahme der Stromstärke liess sich nicht constatiren, trotzdem ich bis zur Schmelztemperatur des Zinks ungefähr erhitzt haben mochte. Während des Erkaltens war das Element sich selbst überlassen, es nahm die Ablesung bis gegen 176 ab, erreichte nach längerer Zeit 175. Mittlerweile war das Zinn erstarrt. Nach dem Erstarren nahm die Ablesung sehr gleichmässig ab. Bei vielen vorhergehenden, zu verschiedenen Zeiten und mit verschiedenen Eisen-Zinn-Elementen angestellten Versuchen, gelangte ich stets zu dem Resultate, dass während des Schmelzens und Erstarrens die Stromstärke denselben Werth beibehalte.

2. Ein Eisen-Bleielement ergab während des Schmelzens und während des Erstarrens die constante Ablesung 198.

3. Ein Eisen-$PbSn_3$-Element gab sowohl während des Schmelzens, als während des Erstarrens die constante Ablesung 150.

4. Ein Eisen-Pb_3Sn-Element ergab eine, während des Schmelzens sich unregelmassig ändernde Ablesung. Es wird nämlich die Legirung vor dem Schmelzen erst bröckelig.

5. Nebst dem Galvanometer war in den Schliessungskreis des Eisen-Zink-Elementes kein Widerstand eingeschaltet. Vor dem Schmelzen war die Ablesung im Abnehmen begriffen, beim Beginn des Schmelzens war sie 100, während des Schmelzens sank sie allmälig auf 95, nach dem Schmelzen ziemlich rasch noch tiefer. Das Erstarren fand bei einer Ablesung von 110 bis 115 statt, was einer geringeren Temperatur, als der Schmelztemperatur entspräche. Nach dem Erstarren erreichte die Ablesung bald das Ende der Scala.

6. In den Schliessungskreis des Kupfer-Zink-Elementes war nebst dem Galvanometer noch ein Widerstand von 5·2 *SE* eingeschaltet. Während des Schmelzens blieb die Ablesung constant 103·5, sie hatte hisher mit der Erwärmung zugenommen. Nach dem Schmelzen nahm die Ablesung allmälig ab, so dass das Maximum der Stromstärke dieses Elementes gerade bei der Schmelztemperatur des Zinkes zu liegen scheint. Während des Erstarrens war

die Ablesung 100 und sank allmälig auf 97, was auch einer tieferen Temperatur entspräche.

7. Das Eisen-Wismuth-Element. Vorläufige Versuche, die unmittelbar nach der Bestimmung der electromotorischen Kraft angestellt wurden, ergaben, dass während des Schmelzens die Stromstärke sich ändere, jedoch nicht sehr erheblich, und dass während des Erstarrens diese Änderungen noch geringer seien. Spätere Versuche führten zu einem ähnlichen Resultate. Um noch weitere Gewissheit hierüber zu erlangen, wurde das Element zum Theile neu zusammengestellt. Die Verbindungsstellen des Elementes mit dem übrigen Stromkreise waren durch Wasser auf die Zimmertemperatur von 19° C. erhalten und nebst dem Galvanometer noch 65·6 Siemens'sche Einheiten in den Schliessungskreis eingeschaltet. Während des Schmelzens stieg die Ablesung von 155 auf 160 und nahm mit der höheren Temperatur nur langsam zu, im Gegensatz zu früheren Beobachtungen, bei denen eine rasche Zunahme constatirt wurde. Während des Erstarrens blieb die Ablesung ziemlich constant auf 155, bei späteren Versuchen auf 153 und 150. Öfter zeigte sich schon während des Hervorbrechens des geschmolzenen Wismuthes durch die erstarrte Decke, eine raschere Abnahme der Ablesung; öfter trat dies erst darnach ein. Die Berührung des Eisendrahtes mit dem Wismuth scheint auf die erhaltenen Resultate von erheblichem Einflusse zu sein, und manche Unregelmässigkeit mag in deren Unvollkommenheit ihren Grund haben.

Kurz zusammengefasst sind die Ergebnisse der Versuche folgende:

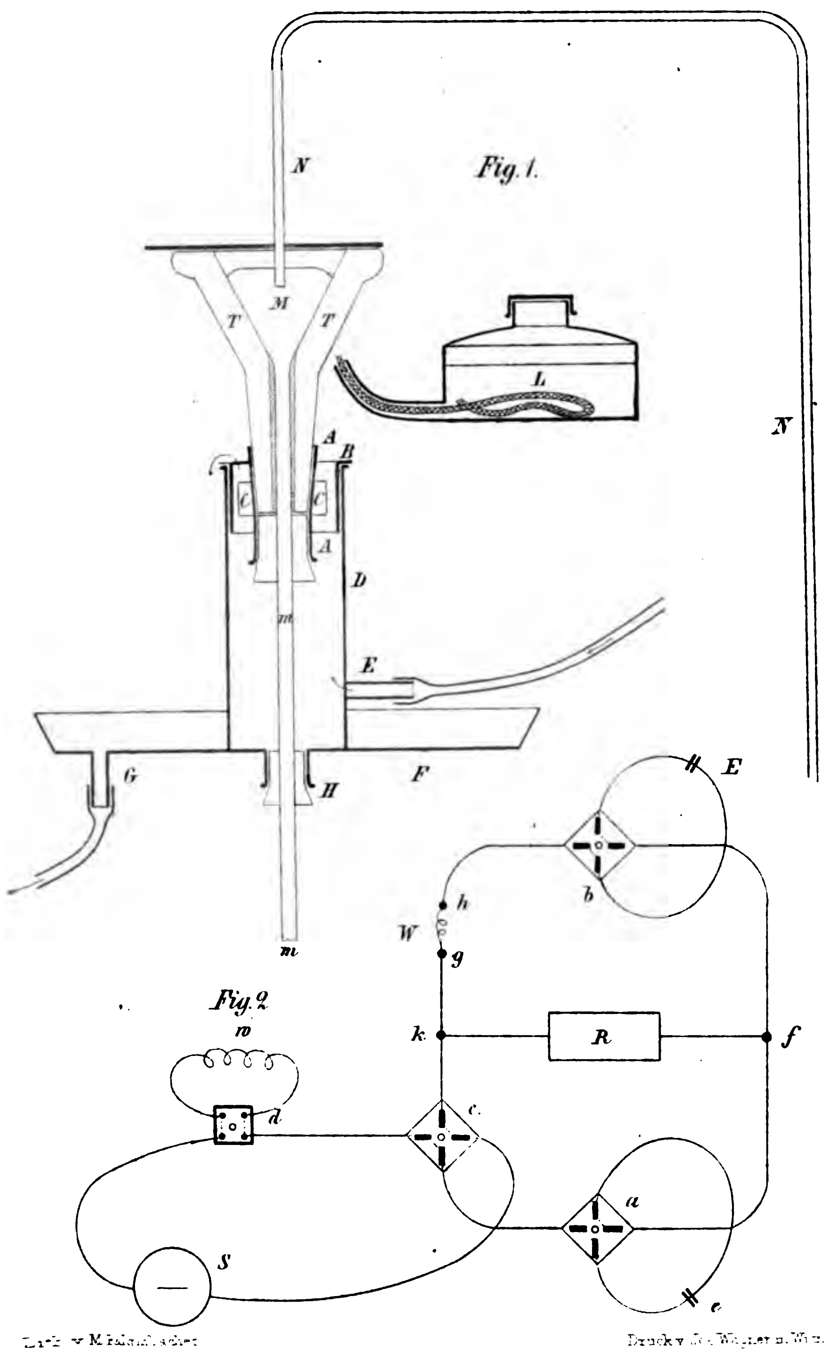
Während des Schmelzens und Erstarrens ändert sich in den Eisen-Zinn-, Eisen-Blei- und Eisen-$PbSn_3$-Elementen die electromotorische Kraft nicht, sie hat sowohl beim Schmelzen, als beim Erstarren denselben Werth.

Die electromotorische Kraft der Eisen-Zink- und Kupfer-Zink-Elemente bleibt während des Schmelzens und Erstarrens nahe constant. Das Erstarren des Zinks scheint bei einer niedrigeren Temperatur vor sich zu gehen, als das Schmelzen.

Beim Eisen-Wismuth-Elemente ist die electromotorische Kraft während des Schmelzens und Erstarrens nahe dieselbe. Sie nimmt allerdings während des Schmelzens etwas zu und während

des Erstarrens etwas ab, allein diese Änderungen sind bald bedeutender, bald geringer, bald gar nicht vorhanden, so dass sie durch Zufälligkeiten, als mangelhafte Berührung zwischen Wismuth und Eisen u. dgl. m. hervorgebracht scheinen. Vielleicht ist auch die Schmelztemperatur des Wismuths nicht constant.

Durch die Versuche ist nur constatirt, was während des Schmelzens vorgeht, sie lassen aber nicht entscheiden, was unmittelbar vor dem Schmelzen und nach dem Erstarren geschieht. Es wäre hiezu nöthig gewesen, die Temperatur im Elemente mit einer Thermokette zu beobachten. Der Mangel eines zweiten Spiegelgalvanometers oder sonstigen geeigneten Messapparates verhinderte mich jedoch, den Versuchen diese erwünschte Ausdehnung zu geben.


Fig. 1.
N
M
T
T
L
A
B
C
C
A
D
m
E
N
G
H
F
m
E
b
h
W
g
Fig. 2
w
k
R
f
d
c
a
S
e

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXVI. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

7.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

XVIII. SITZUNG VOM 4. JULI 1872.

Die Herren A. Winnecke in Carlsruhe und W. Tempel in Mailand danken mit Schreiben vom 25. und bezhgsw. 28. Juni l. J. für die ihnen zuerkannten und übersendeten Kometen-Preise.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Kritische Durchsicht der Ordnung der Flatterthiere oder Handflügler *(Chiroptera)*. Familie der Fledermäuse *(Vespertiliones)*." III. Abtheilung, vom Herrn Dr. L. J. Fitzinger in Pest.

„Über die Ursache des hohen Absonderungsdruckes in der *Glandula submaxillaris*", vom Herrn Prof. Dr. Ew. Hering in Prag.

„Zur Theorie der Bessel'schen Functionen zweiter Art", vom Herrn Prof. L. Gegenbauer in Krems.

„Über das Verhalten der Action des Herz-Ventrikels zur Pulswellenbildung in der Arterie", vom Herrn Dr. Eug. Kolisko.

Herr J. Schlesinger, Prof. an der k. k. Forst-Akademie zu Mariabrunn hinterlegt ein versiegeltes Schreiben mit der Aufschrift „Geodätisches" zur Wahrung seiner Priorität.

Herr Prof. Dr. H. Hlasiwetz legt folgende vier Mittheilungen aus dem chemischen Laboratorium der Universität Innsbruck" vor:

14. „Über einige Derivate der Dioxybenzoësäure", von den Herren L. Barth und C. Senhofer;
15. „Über Toluoldisulfosäure und einige Abkömmlinge derselben", vom Herrn C. Senhofer;
16. „Über die Einwirkung von schmelzendem Kali auf Benzoësäure", vom Herrn L. Barth;
17. „Über Sulfoparaoxybenzoësäure", vom Herrn R. Kölle.

Herr Prof. Hlasiwetz übergibt ferner eine für den Anzeiger bestimmte vorläufige Mittheilung über eine Anzahl von Verbindungen, welche aus der Einwirkung von Schwefelkohlenstoff und Ammoniak auf verschiedene Amide, Aldehyde und Alkohole hervorgehen.

Der Secretär v. Schrötter macht eine Mittheilung über den von Stokes ausgehenden Vorschlag, die Arbeiter in den Quecksilberwerken durch Schwefel vor der schädlichen Einwirkung der Quecksilberdämpfe zu schützen, und über seine hiedurch veranlassten eigenen Versuche.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Annalen der Chemie & Pharmacie, von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R. Band LXXXVII, Heft 1. Leipzig & Heidelberg, 1872; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrgang, Nr. 18—19. Wien, 1872; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1894 (Bd. 79. 22.). Altona, 1872; 4°.

Beobachtungen, Meteorologische, angestellt in Dorpat im Jahre 1871. VI. Jahrgang, II. Bd, 1. Heft. Dorpat, 1872; 8°.

Carl, Ph.: Siehe Repertorium.

Comitato, R., Geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1872, Nr. 3 & 4. Firenze, 1872; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nrs. 24—25. Paris, 1872; 4°.

Des Moulins, Charles, Fragments zoologiques. Nr. I—II. Bordeaux, 1872; 8°.

Fritsch, Anton, Cephalopoden der böhmischen Kreideformation. (Veröffentlicht mit Subvention des Comités für die Landesdurchforschung von Böhmen.) Prag, 1872; 4°.

Gelehrten-Gesellschaft, Serbische, zu Belgrad: Glasnik. Bd. XXXII & XXXIII. Belgrad, 1871 & 1872; 8°.

Gesellschaft, österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VII. Band, Nr. 12. Wien, 1872; 4°.

— k. k. mähr.-schles., zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- & Landeskunde: Mittheilungen. 1871. LI. Jahrgang. Brünn; 4°. — Notizen-Blatt der histor.-statist. Section. 1871. Brünn; 4°.

Gesellschaft, Astronomische, in Leipzig: Vierteljahrsschrift. VII. Jahrgang, 2. Heft. Leipzig, 1872; 8⁰.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrg. Nr. 25—26. Wien, 1872; 4⁰.

Istituto, Reale, Lombardo di Scienze e Lettere: Memorie. Classe di Lettere e Scienze morali e politiche: Vol. XII (III. della serie III.), Fasc. 2. Milano, 1871; 4⁰; Classe di Scienze matematiche e naturali. Vol. XII (III. della serie III.) Fasc. 2—4. Milano, 1871 & 1872; 4⁰. — Rendiconti. Serie II. Vol. III., fasc. 16—20. (1870); Vol. IV., fasc. 1—20. (1871); Vol. V., fasc. 1—7. (1872.) Milano; 8⁰. — Atti della fondazione scientifica Cagnola. Vol. V., fasc. 2—3. 1870—1871. Milano; 8⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, von C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. II. Band. Jahrgang 1869 & 1870, Heft 1. Berlin, 1872; 8⁰.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band V, 9. Heft. Leipzig, 1872; 8⁰.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 13. Graz, 1872; 4⁰.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 18. Band, 1872, Heft VI. Gotha; 4⁰.

Moniteur scientifique. 3ᵉ Série. Tome II. 366ᵉ Livraison. Paris, 1872; 4⁰.

Museum-Verein, Siebenbürgischer: Jahrbücher. VI. Band, 1. Heft. Kronstadt, 1872; 4⁰.

Nature. Nrs. 138—139. Vol. VI. London, 1872; 4⁰.

Repertorium für Experimental-Physik etc., von Ph. Carl. VIII. Band, 1. Heft. München, 1872; 8⁰.

„Revue politique et littéraire" et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger". Iʳᵉ Année (2ᵉ Serie). Nrs. 52—53. Paris & Bruxelles, 1872; 4⁰.

Société Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'Orient. XVIᵉ Année, Nrs. 1—2. Constantinople, 1872; 4⁰.

Society, The Royal Geographical, of London: Proceedings. Vol. XVI, Nr. 2. London, 1872; 8⁰.

Verein für Landeskunde von Niederösterreich: Blätter. N. F. V. Jahrgang, Nr. 1—12. Wien, 1871; 8°. — Topographie von Niederösterreich. Heft 1—3. Wien, 1871; 4°.

— für Naturkunde zu Cassel: XVI., XVII. & XVIII. Bericht. 1866—1871. Cassel, 1871; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 24—25. Wien, 1872; 4°.

Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Band, 22. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

Über einen Vorschlag von G. G. Stokes, die schädlichen Wirkungen der Quecksilberdämpfe ganz oder theilweise zu beseitigen, und über das Verhalten von Jod und Schwefel zu diesen Dämpfen.

Von dem w. M. Dr. **A. R. v. Schrötter.**

Im Jänner 1872 erhielt ich ein Schreiben von Herrn Prof. G. G. Stokes über den oben angegebenen Gegenstand, in der Absicht hiedurch zu veranlassen, dass die Aufmerksamkeit der Regierung auf das Verhalten des Schwefels zu den Quecksilberdämpfen gelenkt werde, um wo möglich die Arbeiter in den Quecksilberwerken von Idria durch passende Einrichtungen vor der schädlichen Einwirkung des Quecksilbers zu schützen, oder diese doch wenigstens zu vermindern.

Auf meine Anfrage ermächtigte mich Herr Prof. Stokes, seine Mittheilungen in einer mir passend erscheinenden Weise zu veröffentlichen, was hiemit geschieht, da ich sie für wichtig genug halte, der Akademie vorgelegt zu werden. Ich habe dieselben in freier Übersetzung unter Hinweglassung des Unwesentlichen zu einem Ganzen verschmolzen und ihnen die folgende Form gegeben.

Anhangsweise füge ich noch einige Versuche bei, die ich durch die Mittheilungen von Stokes anzustellen veranlasst wurde.

Stokes schreibt:

.... „„In einem Gespräche mit Dr. Andrews in Belfast erwähnte er seines Besuches der Quecksilberminen zu Idria und schilderte den traurigen Gesundheitszustand der dortigen

Arbeiter, welcher durch die Einwirkung des Quecksilbers bedingt wird [1].

Ich dachte hiebei sogleich an einige Versuche über den schädlichen Einfluss der Quecksilberdämpfe auf die Vegetation, über die ich einen Bericht in einer französischen Zeitschrift vor längerer Zeit gelesen hatte, und es schien mir, dass sich hierauf ein leicht ausführbares Verfahren zum Schutze der dortigen Arbeiter gründen liesse.

Professor W. H. Miller in Cambridge rieth mir, mich in dieser Angelegenheit an Sie zu wenden, da er meinte, Sie wären ganz in der Lage, an der geeigneten Stelle die Aufmerksamkeit auf meinen Vorschlag zu lenken.

Priestley war es, der die schädliche Wirkung des Quecksilbers auf die Vegetation entdeckte. An den Namen des französischen Autors [2] (oder der Autoren, wenn es mehrere waren), auf die ich mich oben bezog, kann ich mich nicht mehr erinnern, aber ich weiss, dass ihre Versuche nur eine Wiederholung derer eines holländischen Gelehrten waren, die, wie ich glaube, am Ende des vorigen Jahrhunderts angestellt wurden. Ich erinnere mich jedoch genau auf die Natur dieser Versuche und das ist wohl die Hauptsache.

Diese Versuche wurden meistens mit Petunien angestellt. Die Pflanze wurde mit einer Glasglocke bedeckt, unter welcher sich auch etwas Quecksilber in einer offenen Schale befand. Schon nach dem kurzen Zeitraume von 24 Stunden erschienen schwarze Flecken an den Blättern und die Pflanzen fingen an zu welken. Nach längerer Zeit wurden die Blätter ganz schwarz und die Pflanze starb ab. Wurde jedoch zugleich Schwefel, und zwar wie ich glaube, in der Form von Schwefelblumen unter die

---

[1] Nach amtlichen Daten wurden im Jahre 1871 nahe an 46 Pct. der dortigen Arbeiter von Krankheiten befallen, deren Ursprung mit grosser Wahrscheinlichkeit auf die Einwirkung des Quecksilbers zurückgeführt werden konnte; bei nahe an 40 Pct. war dies entschieden der Fall. Die Anzahl der Arbeiter beträgt, mit Ausnahme der in den Forsten beschäftigten, 722. Schrötter.

[2] Es dürfte dies die Arbeit von Boussingault sein, deren Quelle jedoch nicht aufgefunden werden konnte.



Glocke gebracht, so war die zerstörende Wirkung des Quecksilbers gänzlich aufgehoben.

Die Erklärung, welche die französischen Autoren von der schützenden Wirkung des Schwefels gegeben haben, ist unzweifelhaft die richtige, nämlich, dass der Schwefel, selbst bei der gewöhnlichen Temperatur, in geringem Grade flüchtig sei, und dass sich die Dämpfe desselben mit denen des Quecksilbers direct zu Quecksilbersulfid verbinden, welches für die Vegetation unschädlich ist.

Ich weiss zwar nicht, auf welchem Wege das Quecksilber in Idria an die Arbeiter gelangt, ob durch die Berührung mit den Händen oder durch die Einwirkung der Dämpfe, glaube aber, dass dieses das wahrscheinlichere ist.

Wenigstens war letzteres bei der so verhängnissvollen Vergiftung der Mannschaft des englischen Kriegsschiffes *Triumph*, über welche Dr. Burnett berichtet[1], entschieden der Fall. Ob

---

[1] Philosophical Transactions of the R. Soc. for 1823, p. 402. Ein Auszug aus Nicholson's Journ. of phil. findet sich in Gilbert's Annalen B. 40, S. 347. 1812. — Wegen der Merkwürdigkeit dieses Falles glaube ich, einen kurzen Auszug aus Dr. Burnett's Bericht hier folgen lassen zu dürfen, zumal derselbe für den vorliegenden Zweck lehrreich und wenig bekannt ist.

Im März 1810 scheiterten zwei nach Südamerika bestimmte spanische Schiffe, die ungefähr 130 Tonnen Quecksilber an Bord hatten, welche auf die in Idria übliche Weise in ledernen Säcken und Holzfässchen verpackt waren, an der Küste von Cadix. Der *Triumph* nahm später 1200 solche von Seewasser durchnässte Säcke auf und verwahrte dieselben in dem für den Zwieback bestimmten Raum. Schon nach 14 Tagen waren die Säcke vermodert und das Quecksilber fing an auszufliessen. Man sammelte davon so viel man konnte, aber ein Theil verbreitete sich in dem unzugänglichen Raume des Schiffes, wo es auch mit Wasser in Berührung kam. Die Wirkung dieses Unfalles war eine furchtbare. Alle auf dem Schiffe befindlichen Metalle überzogen sich mit einer Quecksilberschichte und die Mannschaft, etwa 200 Mann, wurde innerhalb dreier Wochen nach der Aufnahme des Quecksilbers von einem heftigen Speichelflusse befallen. Sämmtliche auf dem Schiffe befindlichen Thiere gingen zu Grunde. Das Schiff wurde nun nach Gibraltar gesendet und dort von Grund aus gereinigt; alles was entfernt werden konnte, wie die Lebensmittel etc., wurde beseitigt und durch neue ersetzt. Dessenungeachtet erneuerten sich auf der Rückkehr nach Cadix die Erkrankungen in sehr bedauerlicher Weise bis Anfangs Juni, wo das

aber der Quecksilberdampf blos durch die Lungen oder blos durch die Oberhaut des Körpers, oder durch beide absorbirt wird, ist mehr als ich sagen kann.

Wenn das Quecksilber hauptsächlich durch die Haut aufgenommen wird, so sollte ich meinen, dass es leicht wäre der Wirkung desselben vorzubeugen, indem man die Arbeiter veranlasst, Kleider zu tragen, die mit Schwefel imprägnirt sind. Es würde genügen diese mit Schwefelblumen einzureiben, zumal bei Kleidern aus Wollstoffen, oder sie in die Lösung einer höheren Schwefelverbindung eines Alkalimetalles und dann in eine gehörig verdünnte Säure zu tauchen, um den Schwefel in den Stoffen niederzuschlagen und dann mit Wasser alles Lösliche zu entfernen.

Dringt der Quecksilberdampf vorzüglich durch die Lungen ein, so würde es nothwendig sein, Mund und Nase mit einem lockeren schwefelhaltigen Tuche zu bedecken, was jedoch, wie ich fürchte, so viel Unbequemlichkeit verursachen dürfte, dass sich die Arbeiter kaum derselben unterziehen würden, zumal jene nicht die bei Feuer arbeiten. Es käme eben darauf an, ob die Leiden durch das Quecksilber so gross sind, dass sie sich geneigt finden, das kleinere Übel dem grösseren vorzuziehen.

In den Minen selbst wäre schon eine erspriessliche Wirkung zu erzielen, wenn Schwefel an Orten ausgestreut würde, wo derselbe trocken bleibt.

Die angeführten Versuche mit den Pflanzen geben so viel Hoffnung auf Erfolg, dass es der Mühe werth scheint, die von mir vorgeschlagene Methode zum Schutze der Arbeiter praktisch zu prüfen. Es dürfte indess viel Zeit verfliessen ehe man es als sichergestellt betrachten kann, ob die angegebene Methode wirklich schützt oder nicht, indem ich vermuthe, dass die Absorption des Quecksilbers durch den Körper der Arbeiter ein sehr langsam fortschreitender Process ist.

Schiff nach England zurückkehrte. Obwohl auf der Fahrt beständig alle Theile des Schiffes gelüftet, und die Mannschaft so viel als möglich auf Deck gehalten wurde, waren doch einige vierzig Mann vom Speichelfluss befallen worden. Erst nach der Ankunft in England Anfangs Juli, also etwa fünf Monate nach der Aufnahme des Quecksilbers, trat kein Krankheitsfall mehr ein. Schrötter.



Aber auch, wenn die Quecksilberdämpfe durch die Lungen absorbirt werden, wird das Tragen von mit Schwefel imprägnirten Kleidern von einigem Nutzen sein, selbst wenn der Mund frei bleibt. Denn wenn die Dämpfe, welche der Schwefel bei der gewöhnlichen Temperatur abgibt, schon genügen die Pflanzen zu schützen, so dürfte sich unter Mitwirkung der Körperwärme eines Arbeiters genug Schwefel an seinen Kleidern verflüchtigen, um ihn mit einer schützenden Atmosphäre zu umgeben.

Dr. Burnett erwähnt in seinem angeführten Berichte, dass der Schwefel von den Ärzten des *Triumph* sowohl innerlich als äusserlich angewendet wurde. Innerlich genommen vermehrte er nur die Diarrhoe, äusserlich wäre er einfach ohne Nutzen. Hieraus folgt aber keinesfalls, dass es unnütz sei meinen Vorschlag zu prüfen. Denn offenbar war Dr. Burnett der Ansicht, dass Schwefel in dem erwähnten Falle als ein einfaches Antidot gegen das bereits absorbirte Quecksilber wirke, während nach meiner Idee der Schwefel dazu dienen soll, die Absorption des noch nicht aufgenommenen Quecksilbers zu verhindern.

Bei der gänzlichen Verschiedenheit dieser beiden Ansichten muss daher auch die Art, sie zu erproben, eine ganz verschiedene sein.

Wahrscheinlich wurde in dem Falle Burnett's der Schwefel mit Speck gemischt, um ihn als Pflaster anwenden zu können. Unter diesen Umständen hat der Speck die Verdunstung des Schwefels gehindert, und selbst wenn er in trockenem Zustande angewendet worden wäre, würden wahrscheinlich nur jene Theile der Haut damit eingerieben worden sein, welche am meisten afficirt wurden, und man hätte nicht darauf Rücksicht genommen, dass die erwartete günstige Wirkung des Schwefels (wenn es eine solche gibt) davon abhängt, dass derselbe in einer grossen Ausdehnung der Luft ausgesetzt wird, ganz gleichgiltig ob er mit der Haut in unmittelbare Berührung kommt oder nicht.""

Diese interessanten Mittheilungen haben mich veranlasst zu untersuchen, wie Schwefel sich im Vacuum des Barometers, also in einem mit Quecksilberdämpfen gesättigten Raume verhält. Zu diesem Behufe wurden einige Stücke davon in das Vacuum einer Barometerröhre von etwa 1·8 Cm. Weite gebracht. Schon nach einigen Stunden konnte man die Bildung von schwarzem (amor-

phen) Quecksilbersulfid (Quecksilbermohr) wahrnehmen, das sich am Rande des Quecksilbers und etwas darüber ringförmig angesetzt hatte.

Nach einigen Tagen war aber nicht nur der schwarze Überzug vermehrt, sondern es hatte sich auch ein rother Körper an die Glasröhre angelegt, so dass nach etwa vier Wochen die Röhre bis zu einer Höhe von ungefähr 35 Mm. mit einem rothen und stellenweise beigemengten schwarzen Körper überzogen war.

Dieser Versuch wurde im diffusen Tageslichte angestellt, bei einer Temperatur, die nicht über 26° C. betrug.

Im directen Sonnenlichte erfolgt ganz dasselbe, nur rascher und unter reichlicherer Bildung des rothen Körpers, der nichts anderes als Zinnober ist.

Schon dieses Verhalten liess vermuthen, dass zur Bildung des letzteren die Mitwirkung des Lichtes nothwendig sei, was auch durch einen directen Versuch bestätiget wurde.

In einem mit Luft gefüllten Raume treten ganz dieselben Erscheinungen auf, wie im barometrischen Vacuum, denn in einer 2 Decm. langen, 1 Ctm. weiten, zugeschmolzenen Glasröhre, in der sich etwas Quecksilber und einige Stücke Schwefel befanden, und die in einer geneigten Lage der Einwirkung des Lichtes ausgesetzt war, bildete sich schon nach wenigen Tagen neben dem schwarzen auch das rothe Sulfid.

Bringt man eine solche Röhre, die jedoch der Einwirkung des Lichtes nicht ausgesetzt wurde, um die Bildung von Zinnober zu verhindern, nachdem sie sich mit Mohr überzogen hatte, an das Licht, so bildet sich sehr bald auch Zinnober.

Dies geschieht aber nicht durch Umwandlung des schon früher gebildeten schwarzen Sulfides in rothes, sondern dieses entsteht erst neu aus den Schwefel- und Quecksilberdämpfen, die während der Einwirkung des Lichtes mit einander in Berührung kommen. Dass dies so ist, geht aus dem Umstande hervor, dass fertig gebildetes, ganz reines schwarzes Sulfid, für sich allein der Einwirkung der Sonnenstrahlen ausgesetzt, weder sublimirt, noch in rothes Sulfid übergeht.

Es wird also nur dann Zinnober gebildet, wenn die Dämpfe des Schwefels und die des Quecksilbers unter Mitwirkung des Lichtes mit einander in Berührung kommen, nicht aber wenn

fertiger Mohr der Einwirkung des Lichtes ausgesetzt wird. Schwarzes, d. h. amorphes Quecksilberoxyd verdunstet überhaupt als solches nicht; denn bei stärkerem Erwärmen geht es wie bekannt in Zinnober über, worauf ja eine Bereitungsart des letzteren beruht. Es gibt also keine Dämpfe von schwarzem Quecksilbersulfid, so wenig als es Dämpfe vom amorphen Phosphor oder Schwefel gibt, und man geht wol kaum zu weit, wenn man schliesst, dass überhaupt amorphe Körper als solche nicht verdunsten. Es würde hieraus folgen, dass die Molecüle der Gase durchgehends krystallisirt sind.

Die Annahme, dass amorphe Körper nicht verdampfen, steht aber mit dem von Zöllner ausgesprochenen Satze [1], dem ich beistimme, dass die Verdampfung eine vom Aggregationszustande unabhängige allgemeine Eigenschaft der Materie sei, nicht im Widerspruche. Die Fähigkeit der Materie zu verdampfen, würde vielmehr nur von ihrem Molecularzustande abhängen, darum aber nicht aufhören eine allgemeine Eigenschaft derselben zu sein, da ja dieser nicht unveränderlich ist. Es ist hier nicht der Ort, auf dieses Verhalten der Materie weiter einzugehen, zumal dasselbe zum Gegenstande einer gründlichen Specialuntersuchung gemacht zu werden verdient.

Um bei den obigen Versuchen die Bildung des Quecksilbermohrs zu verhindern, ist es nothwendig die Einrichtung so zu treffen, dass der Schwefel mit dem Quecksilber nicht in directe Berührung kommt. Dies wird erreicht, wenn man den Schwefel über dem Quecksilber aufhängt. Zu diesem Behufe wird ein an einem Ende spiralförmig gewundener Platindraht wiederholt in geschmolzenen Schwefel getaucht, bis eine entsprechende Menge davon die Spirale in Form eines grossen Tropfens umgibt.

Dieser Platindraht wird nun in eine Glasröhre von genügender Weite, während sich dieselbe in verticaler Stellung befindet, so eingeschmolzen, dass der Schwefel ungefähr 2 Ctm. hoch über dem darin befindlichen Quecksilber schwebt. Nach kurzer Zeit färbt sich der Schwefel lichtgrau bis er endlich fast

[1] Über die Natur der Cometen etc. von F. Zöllner; Leipzig 1872.



ganz schwarz wird, während die Glasröhre ringförmig an der Stelle, an welcher der Schwefel hängt, sich mit Zinnober überzieht, dem kein Mohr beigemengt ist. Das Quecksilber bleibt bei diesem Versuche ganz rein, woraus folgt, dass die Dämpfe des verdunstenden Schwefels von denen des Quecksilbers sogleich in Beschlag genommen werden, so dass vom Schwefel nichts bis zum Quecksilber dringt.

Dieses Verhalten ist nicht in Übereinstimmung mit den älteren Beobachtungen, welche Stokes anführt, und auch wenn der Versuch so angestellt wird, dass man Quecksilber neben Schwefel unter eine Glocke bringt, wird letzterer schwarz, ohne dass ersteres eine Veränderung erleidet. Die Glocke ist also jedenfalls mit Quecksilberdämpfen gefüllt, welche nach und nach vom Schwefel absorbirt werden.

Soweit war ich mit meinen Versuchen, zu denen ich durch die gütigen Mittheilungen von Stokes veranlasst wurde, gekommen, als die so ausgezeichnete Arbeit von Merget *„Sur la diffusion des vapeurs mercurielles“* [1] in meine Hände gelangte. Nach Durchlesung derselben war mein erster Gedanke, die Veröffentlichung der obigen Mittheilungen zu unterlassen, was mir auch Stokes gleich anfangs anheimstellte. Da aber der Gegenstand so wichtig ist, dass selbst ein geringer Beitrag zur näheren Aufklärung desselben nicht überflüssig erscheint, so entschloss ich mich, die Versuche, zu denen die Idee bereits gefasst war, fortzusetzen und die Resultate zu veröffentlichen, zumal es sich nicht um ein Eingreifen in die von Merget mit so viel Scharfsinn angestellten Untersuchungen handelt.

Es schien mir von Interesse zu sehen, wie sich Jod gegen Quecksilber und Schwefel verhält, wenn diese drei Körper in abgesonderten Schalen unter die Glocke gebracht werden. Bei dem Versuche überzog sich das Quecksilber schon in sehr kurzer Zeit mit einem dunkelvioletten Körper, der nach und nach wenigstens an der Oberfläche vollständig in das rothe Queck-

[1] Comptes rendus etc. Nr. 24, 11. Dec. 1871, und Ann. de Chimie et de Physique IV. Ser. T. XXV, Janvier 1872, 121. A. l.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass auch Stokes die Arbeit von Merget noch nicht kannte, als er die obigen Mittheilungen an mich richtete.



silberjodid überging. Der Schwefel blieb hierbei ganz unverändert und hatte auch nach Wochen kein Quecksilber aufgenommen [1]. Auch vom Jod waren nach mehreren Tagen nur Spuren darin nachweisbar.

Dieser Vorgang zeigt, dass die Dämpfe des so schnell verdunstenden Jodes, welche bald den ganzen Raum der Glocke füllen, sich sogleich mit denen des Quecksilbers verbinden und sich als ein Jodür auf dasselbe ablagern, so dass es gar keine Quecksilberdämpfe in der Glocke gibt und auch an keinem anderen Orte als auf der Oberfläche des Quecksilbers die Jodverbindung sich findet.

Es blieb nun noch übrig zu untersuchen, welcher Vorgang eintritt, wenn die Verdunstung des Jodes verzögert wird. Ich glaubte dies am besten erreichen zu können, wenn ich eine Substanz in Anwendung bringe, die das Jod einigermassen festhält. Eine mit Jod gesättigte Lösung von Jodkalium in Wasser schien hierzu am geeignetsten, da man durch Änderung in den Mengen der Bestandtheile die Verdunstung des Jodes in etwas beeinflussen kann. Die angewandte Lösung enthielt auf 100 KC. Wasser 2·13 Jodkalium und war mit Jod gesättigt.

Auch in diesem Falle blieb der Schwefel unverändert, während das Quecksilber sich schon nach einer Viertelstunde, wie oben angegeben, zu verändern begann; nach zwei Stunden war die Oberfläche des Quecksilbers bereits ganz mit einem violettröthlichen Pulver bedeckt, das dann in rothes Jodid übergeht. Es befinden sich also auch, wenn das Jod langsam verdunstet, keine Quecksilberdämpfe in der Luft unter der Glocke. Die geringere Empfindlichkeit des Schwefels gegen die Quecksilberdämpfe wird bei diesem Versuche durch die längere Zeit der Einwirkung des Quecksilbers ersetzt.

Wie vorauszusehen, befinden sich auch bei diesem Versuche Joddämpfe in der Luft der Glocke, jedoch in weit geringerer

---

[1] Zu meinem grossen Bedauern hat sich in Nr. XVIII des akademischen „Anzeigers" pag. 122, Z. 19 v. u., durch ein Versehen die unrichtige Angabe eingeschlichen, dass der Schwefel sich bei diesem Versuche dunkel färbe, also gerade das Gegentheil des wirklichen Vorganges, was ich zu berücksichtigen bitte.

Menge als bei dem vorigen Versuche, wie das Verhalten einer Stärkelösung, die man unter dieselbe bringt, zeigt.

Aus diesem Versuche folgt, dass, wenn man in einem Raume, in welchem sich Quecksilber in offenen Gefässen befindet, eine mit Jod gesättigte Jodkaliumlösung in flachen Schalen aufstellt, die Quecksilberdämpfe entfernt werden und zwar so, dass sich das Jodid auf dem Quecksilber absetzt. Die anfangs dunkelbraune Jodkaliumlösung wird hiebei nach und nach fast ganz wasserhell. Würden nun durch ein geeignetes Mittel, woran es kaum fehlen dürfte, auch die Joddämpfe entfernt, so wäre es immerhin möglich, den Arbeitern, die der Einwirkung von Quecksilberdämpfen ausgesetzt sind, auf diesem Wege wenigstens eine Erleichterung zu gewähren.

Da sich dieser Gegenstand gegenwärtig in den besten Händen befindet, so bin ich nicht Willens, mich mit demselben weiter zu beschäftigen, zumal ich ja ohnedies nur durch eine mir allerdings sehr werthe Veranlassung auf denselben aufmerksam gemacht wurde.

Mittheilungen aus dem chemischen Laboratorium der Universität Innsbruck.

---

14. Über einige Derivate der Dioxybenzoësäure.

Von L. Barth und C. Senhofer.

In unserer letzten Abhandlung (Annal. Bd. 159, S. 217) haben wir erwähnt, dass durch trockene Destillation aus der Dioxybenzoësäure ein gelber krystallinischer Körper erhalten werde, über dessen Formel wir damals nichts aussagen konnten, weil die kleine zu Gebote stehende Quantität eine eingehendere Untersuchung nicht gestattete.

In derselben Mittheilung erwähnten wir auch, dass die Dioxybenzoësäure eine characteristische Reaction beim Erhitzen mit concentrirter Schwefelsäure zeige, worin sie mit rother Farbe in Lösung gehe, aus welcher dann Wasser einen schön grünen Körper fälle.

Schon damals sprachen wir die Vermuthung aus, beide Substanzen möchten identisch sein. Diese Vermuthung hat sich bei näherer Untersuchung bestätigt und es wurde auf diese Weise möglich, einigermassen hinreichende Quantitäten des Körpers zu sammeln.

Zu seiner Darstellung verfuhren wir folgendermassen:

Circa 20 Grm. Dioxybenzoësäure wurden mit der 4fachen Quantität englischer Schwefelsäure übergossen und eine Stunde lang auf 120—140° erhitzt.

Die Masse färbte sich dabei dunkel-blutroth und wurde nach dem Erkalten breiartig. Nach dem Hinzubringen von Wasser scheidet sich ein dunkelgrünes Pulver ab, das sich, so lange die üssigkeit sauer ist, leicht durch Decantiren auswaschen lässt.

Später, wenn das Waschwasser kaum mehr sauer reagirt, setzt sich der Niederschlag sehr schwierig zu Boden und um diesen Zweck zu erreichen, ist es vortheilhaft, etwas Salzsäure zuzufügen. Wenn die Masse so ausgewaschen ist, dass sie keine Schwefelsäure-Reaction mehr zeigt, bringt man sie auf ein Filter und trocknet sie an der Luft. Die getrocknete grüne Masse wird nun in Alkohol gelöst, wozu grosse Mengen des Lösungsmittels erforderlich sind, und aus dieser Lösung durch Wasser in gelbgrünen Flocken gefällt. Diese werden auf einem Filter gesammelt, nochmals in Alkohol gelöst und mit Thierkohle gekocht.

Hiebei bleibt sehr wenig einer amorphen schwarzen Substanz, von deren Analyse man wegen zu geringer Menge absehen musste, bei der Kohle.

Aus der gelben Lösung wird der Körper nunmehr durch Wasser rein, gelb, in flockig-krystallinischem Zustande ausgeschieden.

Die Ausbeute an roher Substanz betrug circa 90%, die an gereinigter circa 50% der verwendeten Säure. Nach dem Trocknen bei 150—160° analysirt, gab sie folgende Zahlen[1]:

	I.	II.	III.	IV.	V.
C —	61·90	61·81	61·99	62·11	62·00
H —	3·40	3·30	3·31	3·00	2·91.

Die lufttrockene Substanz verlor getrocknet:

H_2O — 11·82 11·51 11·90% Wasser.

Der so erhaltene Körper erwies sich in allen Eigenschaften vollkommen identisch mit dem durch trockene Destillation aus Dioxybenzoësäure erzeugten.

Beide schmelzen noch nicht bei 320°, geben dieselben Zahlen bei der Analyse (III ist mit einer durch Destillation erhaltenen Substanz ausgeführt), lösen sich schwierig in Alkohol, noch schwieriger in Äther und Benzol oder Toluol, fast gar nicht in Wasser, nicht in Schwefelkohlenstoff, verdünnter Salzsäure oder Schwefelsäure, am leichtesten noch in Eisessig, aus welcher

[1] Der Körper ist äusserst schwierig zu verbrennen, die Analysen mussten daher mit besonderer Sorgfalt ausgeführt werden.



Lösung sie durch Wasser mit einem Stich ins Grüne gefällt werden.

Die für die trockene Substanz erhaltenen Zahlen stimmen nun am besten mit der Formel $C_7H_4O_3$, und schienen auf ein Anhydrid zu deuten, das durch Verlust von 1 Mol. Wasser aus Dioxybenzoësäure entstanden war:

$$C_7H_6O_4 = H_2O + C_7H_4O_3.$$

War dies der Fall, so musste beim Erhitzen mit Wasser oder Alkalien, bei gewöhnlichem oder verstärktem Drucke wieder Dioxybenzoësäure regenerirt werden.

Dies geschah nun unter keiner Bedingung. Mit Wasser gekocht, oder in Röhren eingeschmolzen und bis 300° erhitzt, fand keine Einwirkung statt. Mit concentrirter Kalilauge unter denselben Verhältnissen zusammengebracht, erfolgte ebenfalls keine Rückbildung von Dioxybenzoësäure, sondern höchstens Braunwerden der Lösung mit beginnender tiefer greifender Zersetzung.

Daraus glaubten wir mit Wahrscheinlichkeit auf eine Vergrösserung des Moleculs schliessen zu dürfen und mit Rücksicht auf die bemerkenswerthe Arbeit von Jaffé [1] schien es nicht unwahrscheinlich, dass hier ein ähnlicher Vorgang wie bei der Bildung von Rufigallussäure aus Gallussäure beim Erhitzen derselben mit Schwefelsäure stattgefunden habe.

Die Frage, ob unser Körper noch ein Benzol- oder vielleicht ein Anthracenderivat sei, wurde am einfachsten durch Destillation desselben über erhitzten Zinkstaub einer Entscheidung zugeführt.

Mischt man den gelben Körper mit Zinkstaub und erhitzt das Gemische, während man noch reinen Zinkstaub vorlegt, in einer Verbrennungsröhre im Kohlensäurestrome zum schwachen Rothglühen, so bemerkt man bald die Bildung eines krystallinischen Sublimats, das sich zwar, weil ein Theil der Substanz verkohlt, in nicht allzugrosser Menge bildet, aber nach dem Reinigen

---

[1] Liebermann und Chojnacki haben durch eine ähnliche, wenn auch nicht so einfache Reaction aus Opiansäure Rufiopin, ein Derivat des Anthracens, nebenbei bemerkt isomer mit unserem Körper, dargestellt. Wir erhielten von dieser schönen Arbeit erst Kenntniss, als wir unsere Untersuchung beinahe beendigt hatten.



und Umkrystallisiren aus Benzol alle Eigenschaften des Anthracens zeigt.

Die Substanz krystallisirte in glänzenden Blättchen, ihre Lösung in Benzol lässt die bekannte blauviolette Fluorescenz deutlich hervortreten. Der Schmelzpunkt des gereinigten Kohlenwasserstoffes lag bei 210—211°.

Mit Picrinsäurelösung zusammengebracht, erhielt man die characteristische, in rothen Nadeln anschiessende Picrinsäureverbindung.

Durch Kochen mit Chromsäure und nachheriges Ausfällen mit Wasser wurde er in eine in langen weissen Nadeln krystallisirende Verbindung übergeführt, die bei 277—278° schmolz (Anthrachinon).

Die letztere mit Schwefelsäure erwärmt und die enstandene Sulfosäure mit Kali verschmolzen, zeigte bald die characteristische Blaufärbung der Alizarinschmelze und aus der mit Säure abgesättigten Lösung derselben liess sich Alizarin mit allen characteristischen Eigenschaften abscheiden. Eine Elementaranalyse hielten wir bei den so scharf zutreffenden Reactionen für überflüssig.

Es ist somit kein Zweifel, dass unser Körper ein Anthracenderivat ist, und dass seine Bildung ganz analog der Bildung von Rufigallussäure verläuft, indem zwei Molecüle Dioxybenzoësäure unter Verlust von zwei Molecülen Wasser zu einem Tetraoxyanthrachinon zusammentreten.

Der chinonartige Character unserer Substanz scheint uns durch die Art der Bildung, ihre Schwerlöslichkeit, die intensive Farbe derselben, den chinonartigen Geruch beim Erhitzen genügend festgestellt.

Eine Überführung in das entsprechende Hydrochinon gelang jedoch nicht. Mit Natriumamalgam tagelang zusammengestellt, entfärbte sich die Lösung der Substanz nicht und Säuren fällten sie aus derselben unverändert, wenn auch mit etwas dunklerer Farbe, die jedoch nach dem Umkrystallisiren aus Alkohol wieder in ein reines Gelb überging.

Wir nennen den Körper, um an seine Beziehung zum Anthracen, seine goldgelbe Farbe und seine chinonartige Constitution zu erinnern, Anthrachryson.



Seine Bildung erfolgt also nach der Gleichung:

$$2(C_7H_6O_4) = 2H_2\Theta + C_{14}H_8O_6.$$

Die analytischen Daten stimmen mit dieser Annahme befriedigend überein.

	$C_{14}H_8\Theta_6$	Mittel der Versuche
C	— 61·76	61·69
H	— 2·94	3·18.

Lufttrocken enthält er 2 Molecüle Krystallwasser.

	$C_{14}H_8O_6+2H_2\Theta$	Gefunden im Mittel der Versuche [1]
H_2O	— 11·69	11·74.

Der Körper vereinigt sich mit Basen zu salzartigen Verbindungen, von denen zur Controle das Barytsalz analysirt wurde.

Erhitzt man denselben mit frisch gefälltem kohlensauren Baryt und viel Wasser, filtrirt und lässt stehen, so scheidet sich die Verbindung in dunkelrothen krystallinischen Flocken aus, die bei 160° getrocknet folgende Zusammensetzung zeigten:

	Gefunden	$C_{14}H_7baO_6$ [2]
C	— 49·23	49·48
H	— 2·42	2·06
Ba	— 20·40	20·18.

Die lufttrockene Substanz verlor bei 160° getrocknet 22·79% Wasser, für $C_{14}H_7baO_6+5^1/_2H_2\Theta$ berechnen sich 22·58%.

Erhitzt man Anthrachryson mit Barytwasser, mit der Vorsicht, keinen Überschuss von Baryt anzuwenden, so erhält man nach dem Filtriren und Einengen halbzollange, dunkelroth gefärbte Nadeln, in Wasser schwer löslich, die nach dem Trocknen

---

[1] Diese Zahlen beziehen sich auf Präparate, die mehrere Wochen in trockener Luft gelegen hatten. Bei anderen Wasserbestimmungen lufttrockener Substanz, zwischen deren Darstellung und Analyse nur wenige Tage vergangen waren, wurden etwas höhere Zahlen gefunden: H_2O=13·7—13·6—13·4. Die Formel $C_{14}H_8O_6+2^1/_2H_2O$ verlangt 14·19 Pct.

[2] ba = 68·5.

bei 160° sich ebenfalls nach obiger Formel zusammengesetzt zeigten.

Ba gefunden: 22·34%.

Die wässerige Lösung dieser Verbindung wird schon durch freie Kohlensäure zersetzt.

Ein baryumreicheres Salz erhielt man durch Versetzen des Ammonsalzes mit Chlorbaryum. Nach und nach scheiden sich dunkelrothe Nadeln ab, der vorigen Verbindung sehr ähnlich. Die Analyse der bei 160° getrockneten Substanz ergab:

Gefunden	Berechnet für $C_{14}H_6BaO_6$
Ba — 34·53	33·66.

Kalksalz. Aus ammoniakalischer Lösung des Anthrachrysons erhält man durch Chlorcalcium einen hellrothen Niederschlag in Wasser schwer löslich, unter dem Mikroskope als kurze Nadeln sich zeigend.

Magnesiumsalz, wie das vorige bereitet, ist ein amorpher rother Niederschlag, fast unlöslich in Wasser.

Thonerdesalz, auf gleiche Weise dargestellt, ist der vorigen Verbindung sehr ähnlich.

Kupfersalz, braune, amorphe, in Wasser unlösliche Masse.

Silbersalz wie das Kupfersalz.

Durch schmelzendes Kali wird das Anthrachryson leicht angegriffen. Die anfangs rothe Farbe verwandelt sich in ein schmutziges Braun. Nach dem Ansäuern und Filtriren nimmt Äther aus dem Filtrate eine braune humusartige Substanz auf, in der sich einzelne Krystallansätze zeigen, die aber in zu geringer Menge vorhanden waren, um damit eine eingehendere Untersuchung ausführen zu können.

Am Filter blieb ebenfalls eine humusartige, in Wasser unlösliche Substanz.

Färbeversuche mit Anthrachryson ergaben auf mit Eisensalzen gebeizten Zeugen eine bräunliche Nüance. Bei Anwendung von Alaun als Beize wurde dagegen eine hübsche rothe Farbe erzielt, den Krappfarben ähnlich, aber matter.

Monobromdioxybenzoësäure. In unserer früher citirten Arbeit haben wir eine Tribromdioxybenzoësäure beschrieben, erhalten

durch directes Zusammenreiben der freien Dioxysäure mit überschüssigem Brom, und dabei erwähnt, dass sich als Nebenproduct eine bromärmere Säure bildet, die wir nicht isoliren konnten.

Wir haben nun gefunden, dass sich sehr leicht und rein eine Monobromdioxybenzoësäure darstellen lässt nach der Gleichung:

$$C_7H_6O_4 + 2Br = C_7H_5BrO_4 + HBr.$$

Man löst Dioxybenzoësäure in nicht zu wenig kaltem Wasser und fügt die durch obige Gleichung gegebene Brommenge, ebenfalls in kaltem Wasser vollkommen gelöst, langsam hinzu. Die Farbe des Brom verschwindet augenblicklich, die Flüssigkeit erwärmt sich hiebei nicht, und wenn alles Bromwasser zugesetzt ist, so hat man eine farblose Lösung, die man sofort auf dem Wasserbade zur Trockne bringt, um den gebildeten Bromwasserstoff zu verjagen. Die rückständige, wenig gefärbte Masse nimmt man in warmem Wasser auf und lässt sie krystallisiren. Nach dem Auskühlen scheiden sich fast zolllange verwachsene Nadeln aus, welche schon ganz reine Monobromdioxybenzoësäure sind. Die Säure schmilzt bei 253°. Ihre Lösung wird von Eisenchlorid gelbbräunlich gefärbt und gibt, mit Bleizucker versetzt, keine Fällung. Mit concentrirter Schwefelsäure erwärmt, färbt sie sich intensiv roth, auf Zusatz von Wasser scheiden sich gelbgrüne Flocken ab, identisch mit Anthrachryson. Eine Lösung der Säure, mit Kalilauge versetzt, färbt sich nicht.

Die lufttrockene Substanz verlor bei 120° getrocknet 7·04 % Krystallwasser.

Die getrocknete Säure gab bei der Analyse:

	Gefunden	$C_7H_5BrO_4$
C	36·32	36·06
H	2·30	2·10
Br	34·22	34·33.

Die krystallisirte hält ein Molecül Wasser:

	Gefunden	$C_7H_5BrO_4 + H_2O$
H_2O	7·04	7·17.

Silbersalz. Sättigt man diese freie Säure mit Ammoniak und fügt zu der, vom überschüssigen Ammoniak befreiten Lösung

salpetersaures Silber, so fällt ein gelblicher amorpher Niederschlag, der am Lichte schnell dunkler wird und lufttrocken nach der Formel $C_7H_2Ag_3BrO_4$ zusammengesetzt ist, also auch die beiden Hydroxylwasserstoffe durch Silber ersetzt, enthält:

	Gefunden	$C_7H_2Ag_3BrO_4$
C	15·07	15·16
H	0·66	0·36
Ag	58·42	58·66
Br	14·48	14·44.

Barytsalz, erhalten durch Sättigen der freien Säure mit kohlensaurem Baryt und Verdunstenlassen der Lösung bei gewöhnlicher Temperatur, ist leicht löslich in Wasser und krystallisirt in langen Nadeln.

Kupfersalz. Sättigt man eine sehr verdünnte Lösung der freien Säure mit Kupferhydroxyd in der Siedhitze und filtrirt schnell, so fällt nach dem Auskühlen ein hellgrünes Salz in körnigen Drusen, das unter dem Mikroskope concentrisch gruppirte, scharf ausgebildete Prismen erkennen lässt, die in heissem Wasser schwer, in kaltem so zu sagen unlöslich sind. Das Salz krystallisirt mit 4 Mol. Krystallwasser, die bei 120° entweichen. Dabei ändert es seine Farbe von grün in braun. Nach dem Lösen des getrockneten Salzes in heissem Wasser wird es aber wieder in den ursprünglichen grünen Krystallen erhalten.

Die Analyse der getrockneten Verbindung gab:

	Gefunden	$C_7H_4cuBrO_4$ [1]
Cu	12·50	12·02.

Die lufttrockene Substanz verlor

	Gefunden	$C_7H_4cuBrO_4+4H_2O$
H_2O	21·31	21·45.

Kalisalz. Versetzt man eine Lösung der freien Säure mit kohlensaurem Kali, jedoch so, dass noch ungesättigte Säure vorhanden ist, schüttelt, um letztere zu entfernen, mit Äther und

[1] cu = 31·7.

lässt die Lösung des so erhaltenen Kalisalzes verdunsten, so erhält man gut ausgebildete nadelförmige Krystalle, die in Wasser sehr leicht löslich sind.

Aus der Monobromdioxybenzoësäure müsste durch Erhitzen mit Kali eine Trioxybenzoësäure, also Gallussäure oder eine Isomere entstehen. Da der Versuch nicht ohne Interesse war, haben wir denselben ausgeführt.

Etwa 20 Grm. Monobromsäure wurden mit überschüssigem Kali in der Silberschale erhitzt. Die Reaction vollzieht sich sehr leicht und in sehr kurzer Zeit, die Temperatur beträgt kaum 200°. Nach dem Absättigen der Schmelze mit Schwefelsäure, Ausziehen der Lösung mit Äther und Abdestilliren desselben hinterbleiben bräunliche Krystalle, die in Wasser aufgenommen werden, worin sie sich leicht lösen. Man versetzt mit Bleizucker, wodurch ein gelbliches Bleisalz gefällt wird, das nach dem Zersetzen mit Schwefelwasserstoff und Einengen des Filtrats Krystalle vom Ansehen der Gallussäure lieferte. Durch Pressen und mehrfaches Umkrystallisiren gereiniget, zeigten sie genau den Schmelzpunkt der Gallussäure und dieselben qualitativen Reactionen. Durch Erhitzen mit Schwefelsäure erhielt man daraus Rufigallussäure. Durch Kochen einer Lösung der Substanz mit doppeltkohlensaurem Kalk, färbte sich die Flüssigkeit nach dem Erkalten blau, ganz in derselben Weise wie es auch Gallussäure thut. Mit Eisenchlorid gab die wässerige Lösung eine tief blauschwarze Färbung, vollkommen mit der unter gleichen Umständen aus Gallussäure erhaltenen identisch.

Sie krystallisirt mit 1 Mol. Krystallwasser wie die Gallussäure auch und gab bei der Elementaranalyse:

	Gefunden	$C_7H_6O_5$
C	49·73	49·41
H	3·77	3·53.

Die lufttrockene Substanz verlor nach dem Trocknen bei 120°.

	Gefunden	$C_7H_6O_5+H_2O$
H_2O	9·31	9·57.

Es kann somit kein Zweifel darüber bestehen, dass dieselbe mit Gallussäure identisch ist.

Die vom gallussauren Blei abfiltrirte Flüssigkeit gab nach dem Entbleien Krystalle, die sich als Dioxybenzoësäure erwiesen. Ihre Menge ist beträchtlicher als die der erhaltenen Gallussäure.

Es wird also ein grosser Theil der bromirten Säure wieder in die ursprüngliche Substanz zurückverwandelt, eine Beobachtung, die schon öfters gemacht wurde und für die wir weiter unten noch ein Beispiel anführen wollen.

Die Gallussäure ist bisher künstlich aus Dijodsalicylsäure und aus Monobromprotocatechusäure erhalten worden.

Nimmt man in der Salicylsäure die Stellung der Carboxyl- und Hydroxylgruppe zu 1, 2 [1], in der Protocatechusäure zu 1, 3, 4, so ergeben sich für die Gallussäure nur zwei Constitutionsformeln:

1, 2, 3, 4 oder 1, 3, 4, 6.

Wenn man nun bedenkt, dass in der Disulfobenzoësäure, also auch in der daraus entstehenden Dioxybenzoësäure eine SHO_3-Gruppe, resp. ein Hydroxyl die Stellung 3 einnimmt, was sich durch die Umwandlung der Disulfobenzoësäure in Isophthalsäure beim Schmelzen mit ameisensaurem Natron ergibt [2], so können in der Dioxybenzoësäure nur folgende relative Stellungen der Carboxylgruppe zu den Hydroxylen angenommen werden:

1, 2, 3 oder 1, 3, 6.

Von den sechs möglichen Stellungen sind nämlich 1, 2, 4 und 1, 3, 4, als der Ascher'schen Säure und der Protocatechu-

[1] Die Carboxylgruppe an der Stelle 1 gedacht.

[2] Die Schlussfolgerungen von v. Richter (Berliner Berichte IV. 459 u. 553 u. V. 422) sind bei dieser Zusammenstellung nicht berücksichtiget. Da sie eine vollständige Änderung aller bisherigen Ansichten über die relative Stellung der substituirenden Atome oder Atomgruppen im Benzolkerne bewirken würden und bei manchen Reactionen Umsetzungen resp. Ortsveränderungen innerhalb des Moleculs annehmen, so scheint es wohl gerechtfertigt, einstweilen weitere bestätigende Versuche hierüber abzuwarten.



säure angehörend, von vorneherein ausgeschlossen. 1, 2, 6 scheint nicht gerechtfertigt wegen der Bildung von Isophthalsäure [1]. 1, 3, 5 endlich widerspricht der Bildung von Gallussäure.

Wir haben mehrere Versuche angestellt, um uns mit Sicherheit für die eine oder die andere Formel aussprechen zu können; zu vollständiger Gewissheit sind wir jedoch nicht gelangt.

Wir werden später darauf zurückkommen, warum von diesen möglichen beiden Stellungen die zweite als wahrscheinlicher angenommen werden kann.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir auch noch eines Versuches Erwähnung thun, den wir angestellt haben, um von der Tribromdioxybenzoësäure zu einem hydroxylreicheren Derivate zu gelangen.

Schmilzt man die dreifachgebromte Säure mit Kali im Überschusse, bis das starke Schäumen aufgehört hat und die Masse gelbbräunlich geworden ist und löst dann die erkaltete Schmelze in verdünnter Schwefelsäure, so nimmt Äther daraus einen krystallisirten Körper auf, der nach dem Reinigen und Umkrystallisiren sich als Dioxybenzoësäure erwies.

Die getrocknete Substanz gab bei der Verbrennung:

C — 54·43
H — 4·10.

Auch die qualitativen Reactionen, speciell die Bildung des grünen Körpers beim Behandeln mit Schwefelsäure und Wasser trafen vollständig zu.

Als Nebenproduct in sehr geringen Mengen und hartnäckig der Dioxybenzoësäure anhaftend, bildet sich noch eine Substanz, welche durch Eisenchlorid vorübergehend grün gefärbt wird. Die Reaction verläuft also in diesem Falle auch unter Rücksubstitution von Wasserstoff statt Brom und ohne Bildung höher hydroxylirter Producte, wie dies schon z. B. in einem dem vorliegenden ganz ähnlichen Falle, beim Schmelzen von Dibromgallussäure mit Kali von Hlasiwetz nachgewiesen wurde.

---

[1] Auch die Bildung eines Anthracenderivats durch Wasserverlust wäre bei dieser Stellung schwer erklärlich.

Diäthyldioxybenzoësäure. Schliesst man dioxybenzoësaures Äthyl mit den berechneten Mengen Ätzkali und Jodäthyl und etwas Alkohol in Röhren ein und erhitzt durch einige Stunden auf 130°, so findet man nach Beendigung der Reaction in denselben viel Jodkalium ausgeschieden. Die Flüssigkeit reagirt schwach sauer. Man verdünnt mit Wasser, schüttelt wiederholt mit Äther und erhält nach dem Verdunsten des Äthers ein Öl (diäthyldioxybenzoësaures Äthyl), das mit Kali gekocht sich grösstentheils löst. Säuert man diese Lösung mit Schwefelsäure an und schüttelt mit Äther, so hinterlässt der letztere eine ölige Flüssigkeit, die bald krystallinisch erstarrt und nach dem Umkrystallisiren aus Wasser in schönen nadelförmigen Prismen erhalten wird.

Sie sind wasserfrei und schmelzen bei 87—88°. — Bei der Analyse gaben sie folgende Zahlen:

	Gefunden	$C_{11}H_{14}O_4$
C	62·92	62·86
H	6·76	6·67.

Die Säure mit kohlensaurem Baryt gekocht, liefert ein Barytsalz, das, bei 120° getrocknet, folgende Zusammensetzung zeigte:

	Gefunden	$C_{11}H_{13}baO_4$
C	47·10	47·57
H	5·01	4·68
Ba	24·57	24·68.

Das lufttrockene Salz enthält wahrscheinlich ein Molecül Krystallwasser, dessen Bestimmung jedoch etwas zu niedrig ausfiel, da dasselbe unter der Luftpumpe eingedampft war.

Wir hatten die Äthersäure vornehmlich deswegen dargestellt, um vielleicht durch trockene Destillation daraus ein Diäthyldihydroxylbenzol zu erhalten, das dann durch Kali oder Jodwasserstoff in das entsprechende zweiatomige Phenol konnte umgewandelt werden. Es war nämlich möglich, dass dabei keine Condensation und Bildung eines Anthracenderivats statthatte.

Mischt man die Äthersäure mit überschüssigem Kalk und erhitzt, so geht Wasser über, es entwickeln sich scharf aromatisch riechende Dämpfe und es destillirt ein Öl, das nach dem Rectificiren, ohne scharf markirte Zwischenstufen zu zeigen, zwischen 205 und 260° überging. Bei der Verbrennung ergab es einen etwas höheren Kohlenstoffgehalt als ein Diäthyldihydroxylbenzol verlangt und war demgemäss sicher ein Gemische, das durch fractionirte Destillation nicht in seine Bestandtheile zerlegt werden konnte, weil die Ausbeute an demselben keine beträchtliche war.

Weder durch Erhitzen mit Kali noch durch Behandlung mit Jodwasserstoff bei gewöhnlichem oder verstärktem Drucke, liess sich daraus ein Dihydroxylbenzol, Hydrochinon, Brenzcatechin oder Resorcin abscheiden.

Bei der Behandlung mit Jodwasserstoff erhielt man eine harzige Masse, die, in Alkalien gelöst, einen äusserst starken, in grösster Verdünnung noch deutlich bemerkbaren Dichroïsmus (grün im auffallenden, gelbroth im durchfallenden Lichte) besass[1].

Wir haben nun zum Vergleiche den Diäthyläther des Resorcins synthetisch dargestellt, indem wir in bekannter Weise Resorcin, Kali und Jodäthyl auf einander wirken liessen und das erhaltene Product nach dem Reinigen destillirten. Wir erhielten so ein Öl vom Siedepunkte 251°, das keine Farbenreaction mit Eisenchlorid mehr lieferte und bei der Verbrennung folgende Zahlen gab:

	Gefunden	$C_{10}H_{14}O_2$
C	— 72·00	72·29
H	— 8·44	8·43.

Dieses Diäthylresorcin lässt sich nun auch, weder durch Erhitzen mit Kali noch durch Jodwasserstoff in Resorcin zurückverwandeln, wohl aber bildete sich im letzteren Falle wieder der schon erwähnte harzartige Körper, der in alkalischer Lösung den beschriebenen Dichroïsmus zeigte.

[1] Ein Harz von ganz ähnlichen Eigenschaften, speciell denselben prachtvollen Dichroïsmus zeigend, erhielt der Eine von uns beim Behandeln von Resorcin mit Wasserstoffsäuren unter erhöhtem Drucke, worüber seiner Zeit berichtet werden soll.



War uns demnach die Darstellung eines Dihydroxylbenzols in reinem Zustande aus unserer Säure nicht gelungen, so deuten doch die erhaltenen Resultate darauf hin, dass dasselbe, falls nicht weitere Umsetzung eingetreten wäre, höchst wahrscheinlich Resorcin sein musste.

Die beiden Hydroxyle würden demnach in der Dioxybenzoësäure die Stellung 1, 4 (resp. 2, 5 oder 3, 6) einnehmen und diesen kann nur eine einzige Säure von der Formel $C_7H_6O_4$ entsprechen.

Deshalb haben wir auch, wie schon früher erwähnt, für die Dioxybenzoësäure die Anordnung 1, 3, 6 als die wahrscheinlichste angenommen.

Die Parastellung der Hydroxyle in derselben scheint aber auch noch aus einem anderen Grunde gefolgert werden zu können.

Die Dioxybenzoësäuren (mit Ausnahme der unserigen) liefern, so weit die bisherigen Erfahrungen reichen, leicht unter Kohlensäure-Abspaltung Brenzcatechin oder Hydrochinon und geben keine Condensationsproducte. Auch Hypogallussäure, wenn sie überhaupt existirt, erzeugt kein Rufiopin, sondern nur die Muttersubstanz derselben, die Opiansäure, die noch Methylgruppen und eine Aldehydgruppe enthält. Protocatechusäure mit concentrirter Schwefelsäure erhitzt, liefert ebenfalls kein Condensationsproduct, wie wir uns durch besondere Versuche überzeugt haben.

Das von den der übrigen Isomeren $C_7H_6O_4$ abweichende Verhalten der Dioxybenzoësäure scheint demnach von der Stellung der Hydroxyle abzuhängen, die, wie gesagt, nur für eine einzige Verbindung von der gegebenen Formel die Parastellung sein kann.

Andere Versuche, die Constitution der Dioxybenzoësäure mit Sicherheit festzustellen, ergaben keine befriedigenden Resultate.

Zunächst versuchten wir, ob nicht aus der einfach gebromten Säure ein gebromtes Dihydroxylbenzol zn erhalten sei, indem vielleicht durch den Einfluss des Brom die Condensation verhindert werden konnte.



Erhitzt man die gebromte Säure mit Ätzkalk, so tritt vollständige Zerstörung der Substanz ein und es konnte keine Spur eines Destillationsproductes erhalten werden.

Beim Erhitzen für sich erhält man ein krystallinisches, gelb gefärbtes Destillat, das nicht unbedeutende Mengen von Anthrachryson enthielt, daneben etwas unveränderte bromirte Säure und etwas regenerirte Dioxybenzoësäure.

Bei der Darstellung von Dioxybenzoësäure aus Disulfobenzoësäure hatten wir bemerkt, dass ein Schwefelsäurerest schon beim Kochen mit concentrirter Kalilauge ausgelöst werde. Wir versuchten deshalb die so erzeugte Monosulfoxybenzoësäure unbekannter Constitution zu isoliren und durch die Meyer'sche Reaction eine Oxyphtalsäure daraus zu erhalten, die dann weitere Anhaltspunkte zur Feststellung der gegenseitigen Lage der substituirenden Reste hätte geben können.

Eine Reindarstellung der Sulfosäure scheiterte an der grossen Unbeständigkeit derselben.

Aus dem Bleisalze mit aller Sorgfalt abgeschieden, hielt sie hartnäckig noch bedeutende Quantitäten Asche zurück und selbst beim Concentriren ihrer Lösung im Vacuum bei gewöhnlicher Temperatur zersetzte sie sich fortwährend unter Entwickelung von Schwefelsäure.

Das Kali- (oder Baryt-)Salz derselben mit ameisensaurem Natron verschmolzen, lieferte keine nachweisbare Menge einer krystallisirten Substanz.

Endlich haben wir noch den schon in unserer ersten Abhandlung erwähnten Versuch, aus Disulfobenzoësäure und ameisensaurem Natron eine Tricarbonsäure zu erzeugen, in mehrfacher Abänderung wiederholt, ohne jedoch ein besseres Resultat als früher zu erzielen. Stets war das Product der Reaction Isophtalsäure.

Ein etwas niedrigerer Schmelzpunkt, den wir an derselben einigemale fanden, bewog uns zu neuen Analysen.



Wir erhielten:

	Gefunden	$C_8H_6O_4$
C	— 57·71	57·83
H	— 3·87	3·61.

Der Körper war also Isophtalsäure. Vielleicht bildet sich auch eine geringe Menge Phtalsäure, die den Schmelzpunkt etwas herabdrücken konnte, ohne die analytischen Daten zu beeinflussen.

Nachweisbar ist sie in dem Reactionsproducte nicht, ebenso wenig wie Benzoësäure.

Durch Spuren einer möglicher Weise dennoch entstandenen Tricarbonsäure, würde allerdings die Schärfe der Zahlen auch nicht sonderlich beeinträchtiget. Die Gegenwart einer solchen konnte aber, wie gesagt, nicht constatirt werden und die Reaction muss daher für das vorgesteckte Ziel als nicht entsprechend bezeichnet werden.

15. Über Toluoldisulfosäure und einige Abkömmlinge derselben.

Von C. Senhofer.

Ein Gemisch von wasserfreier Phosphorsäure mit Vitriolöl oder mit dem erst übergehenden breiigen Destillate des Vitriolöles hat sich als ein passendes Mittel erwiesen, um unter erhöhtem Druck zweimal die Gruppe SHO_3 in das Molecül der Benzoësäure einzuführen. Es schien daher von Interesse festzustellen, ob dieses Verfahren einer weiteren und allgemeineren Anwendung fähig sei und gestatte, den Schwefelsäure-Rest auch bei solchen Körpern zwei oder mehrmals zu substitutiren, bei welchen dies durch die bis jetzt üblichen Methoden nicht gelungen war.

Ein Versuch, durch das oben angegebene Verfahren Phenol in eine Trisulfosäure überzuführen, ergab ein negatives Resultat. Bei einer Temperatur von 180° war schon eine weitgehende Zersetzung und Verkohlung des Phenols, sowie massenhafte Bildung flüssiger, schwefliger Säure eingetreten. Wurde die Temperatur unterhalb 180° gehalten, so bildete sich vornehmlich nur eine Disulfosäure, wie die Analyse des daraus dargestellten Barytsalzes bewies.

Unterwirft man aber Toluol der Behandlung mit Vitriolöl und wasserfreier Phosphorsäure, so bildet sich nicht eine der bekannten Toluolmonosulfosäuren, sondern eine Toluoldisulfosäure.

Man verfährt dabei, um die Toluoldisulfosäure darzustellen, in folgender Weise:

Circa 10 Grm. Toluol werden mit dem fünffachen Gewichte eines Gemisches aus 1 Theil wasserfreier Phosphorsäure und 2 Theilen Vitriolöls in starken Glasröhren eingeschlossen. Durch vorsichtiges Bewegen der Röhren mischt man den Inhalt, wobei unter bedeutender Temperaturerhöhung ein Gelbwerden desselben und eine vollkommene Lösung des Toluols in dem Vitriolöl erfolgt. Die Röhren werden nun durch vier bis fünf Stunden

im Luftbade auf 230° erhitzt. Nach dem Erkalten besteht der Röhreninhalt aus zwei Flüssigkeiten, wovon die untere braun und zähflüssig, die obere, in geringerer Menge vorhanden, farblos und leicht beweglich ist und sich als flüssige schweflige Säure erwies. Beim Öffnen zeigte sich ein bedeutender Druck und unter stürmischem Sieden entweicht die Hauptmenge der schwefligen Säure. Die zurückbleibende braune Masse wurde in viel Wasser aufgenommen, durch Sieden von den letzten Resten schwefliger Säure befreit und hierauf solange mit kohlensaurem Baryt versetzt, bis die Reaction neutral geworden war. Die durch das Filter vom kohlensauren, schwefelsauren und phosphorsauren Baryt befreite und jetzt farblos gewordene Flüssigkeit wurde eingedampft.

Da sich erst nach langem Einengen ein leicht löslicher Krystallbrei ausscheidet, der durch Umkrystallisiren schwer zu reinigen ist, fällt man besser, bevor die Flüssigkeit zu concentrirt geworden ist, mit Alkohol. Es entsteht dabei ein weisser, krystallinischer Niederschlag, der noch zwei- bis dreimal in Wasser gelöst und durch Alkohol wieder abgeschieden wird.

Die vereinigten alkoholischen Filtrate geben eingeengt und nochmals mit Alkohol versetzt eine kleine Quantität desselben Körpers von geringerer Reinheit.

Der Niederschlag, der unter dem Mikroskope kaum Spuren einer Krystallisation zeigt, ist die Barythverbindung einer Toluoldisulfosäure.

Das Salz entspricht lufttrocken der Formel:

$$C_6H_3 \begin{cases} CH_3 \\ SO_3 \\ SO_3 \end{cases} \!\!\!\begin{matrix} \\ \Big\} Ba + 3^1/_2 H_2O. \end{matrix}$$

Es verlor bei 160° getrocknet 14·07 Pct. Wasser, für obige Formel berechnen sich 14·00 Prct.

Das getrocknete Salz zeigte bei der Analyse nachstehenden Procentgehalt:

	Gefunden	Berechnet
C	— 21·42	21·71
H	— 1·44	1·55
Ba	— 35·72	35·40
S	— 16·79	16·51
O	— —	25 80.

Da das Barytsalz seiner Eigenschaften wegen sich nicht gut zur Darstellung von grösseren Quantitäten der Säure eignet, und ein vorläufiger Versuch gelehrt hatte, dass das Kalisalz leichter krystallisirbar und leichter zu reinigen sei, so wurde auf die Darstellung des letzteren hingearbeitet. Dabei wurde zur Entfernung der Schwefel- und Phosphorsäure aus dem verdünnten Röhreninhalte nicht kohlensaurer Baryt, sondern Kalkmilch verwendet. Das Filtrat wird zur Befreiung von dem überschüssig zugesetzten und gelösten Ätzkalk bei 100° mit Kohlensäure behandelt und nach Entfernung des Niederschlages so lange vorsichtig mit einer Lösung von kohlensaurem Kali versetzt, bis eine abfiltrirte Probe auf weiteren Zusatz von kohlensaurem Kali keinen Niederschlag mehr gibt. Der gebildete kohlensaure Kalk wird heiss abfiltrirt, aus dem Filtrat scheidet sich nach starkem Einengen das Kalisalz der Toluoldisulfosäure in undeutlichen Krystallmassen aus. Durch Abpressen von den Mutterlaugen und oftmaliges Umkrystallisiren kann es gereinigt werden und stellt dann kurze, wohl ausgebildete Prismen dar, denen lufttrocken die Formel $C_7H_6S_2O_6K_2 + H_2O$ zukommt.

Sie wurde bei 160° getrocknet.

	Gefunden	Berechnet
H_2O —	5·45	5·20.

Die getrocknete Substanz enthielt:

	Gefunden	Berechnet
C —	25·71	25·61
H —	1·87	1·83
K —	23·50	23·78
S —	19·22	19·51
O —	—	29·27.

Bei längerem Liegen an der Luft verliert das Salz einen Theil seines Krystallwasers und wird dabei opak.

In starkem Alkohol ist es unlöslich. Da es sich wegen seiner grösseren Krystallisationsfähigkeit besser reinigen lässt, als das entsprechende Barytsalz, schien es nicht ungeeignet als Ausgangspunkt zur Darstellung der freien Säure.

Eine bei der oben angegebenen Temperatur getrocknete und gewogene Quantität desselben wurde in Wasser gelöst, mit

etwas weniger als der zur Bildung von schwefelsaurem Kali berechneten Menge von Schwefelsäure versetzt, darauf erst auf dem Wasserbade eingedampft, später unter der Luftpumpe über Schwefelsäure so lange sich selbst überlassen, bis keine Gewichtsabnahme mehr zu bemerken war. Die zähflüssige, vom schwefelsauren Kali durchsetzte Masse wurde nun in absolutem Alkohol, dem $^{1}/_{6}$ Theil des Gewichtes Äther zugesetzt worden war, gelöst, von dem ungelösten schwefelsauren Kali durch das Filter getrennt und durch abermaliges Trocknen und Aufnehmen in Ätheralkohol zu reinigen versucht. Die zurückbleibende syrupöse Masse zeigte sich aber bei allen oftmals wiederholten Versuchen schwefelsäurehältig und es musste daher von der Darstellung der freien Säure aus dem Kalisalze abgesehen werden.

Ich wandte mich daher dem Barytsalze zu, behandelte dies ganz gleich wie das Kalisalz, erhielt auch schliesslich eine Lösung der freien Säure, die vollkommen frei von Schwefelsäure war und nur sehr geringe Spuren von Asche hinterliess. Bei dem Versuche, das Lösungsmittel vollkommen zu entfernen, trat jedoch stets eine Zersetzung der Substanz ein.

Im Vacuum über Schwefelsäure war eine Entfernung des Wassers nicht vollkommen möglich, die Masse wurde dickflüssig und war nach langer Zeit von weichen mikroskopischen, nadelförmigen Krystallen durchsetzt. Auf dem Wasserbade zeigte die Verbreitung eines unangenehmen, stechenden Geruches bald die beginnende Zersetzung der Substanz an. Sie löste sich dann nicht mehr vollkommen in Wasser und die filtrirte Lösung gab mit Chlorbaryum einen Niederschlag.

Die Lösung der freien Säure, die aus dem Barytsalz dargestellt worden war, wurde zur Darstellung einiger Metallsalze verwendet.

Silbersalz. Neutralisirt man eine Lösung der Toluoldisulfosäure mit Ammoniak und versetzt selbe mit salpetersaurem oder Fluorsilber, so entsteht hiedurch kein Niederschlag. Versetzt man aber bei 100° die Lösung der freien Säure mit frisch gefälltem Silberoxyd und filtrirt, so scheiden sich beim Einengen und langen Stehen gelbe Krystallansätze aus, die am Lichte sich allmälig schwärzen.

Das Salz enthielt bei 110° getrocknet:

	Gefunden	Berechnet für $C_7H_6S_2Ag_2O_6$
Ag —	46·58	46·35.

Es ist schwer lufttrocken zu erhalten. Am nächsten kommen die aus dem Wasserverlust berechneten Procente der Formel:

$$C_7H_6S_2Ag_2O_6+2H_2O.$$

Cadmiumsalz, erhalten durch Kochen der freien Säure mit einem Überschusse von kohlensaurem Cadmium, Filtriren und Einengen des Filtrates. Stellt eine gummiartige Masse dar, die sehr leicht löslich ist.

Bei 120° getrocknet gab sie:

	Gefunden	Berechnet
Cd —	31·24	30·91.

Ammoniaksalz. Es wird erhalten durch Übersättigen der Lösung der freien Säure mit Ätzammoniak und Verjagen des Ammoniaküberschusses auf dem Wasserbade. Man löst heiss in wenig Wasser und überlässt die Flüssigkeit der Krystallisation. Es scheiden sich beim Erkalten leichtlösliche Krystallnadeln aus, die häufig gekreuzt erscheinen.

Erhitzt man das gereinigte Kalisalz der besprochenen Säure unter Zusatz von etwas Wasser mit einem bedeutenden Überschuss von Ätzkali, so wird die Masse bald homogen und nimmt eine fast orangerothe Färbung an. Zugleich beginnt die Bildung eines grossblasigen Schaumes. Verschwindet dieser wieder allmälig und entwickelt eine herausgenommene Probe beim Ansäuern sehr viel schweflige Säure, so unterbricht man die Schmelze und nimmt in Wasser auf.

Die Lösung wird nach dem Ansäuern mit Schwefelsäure hellgelb und scheidet keine harzigen oder verkohlten Bestandtheile aus. Nach dem Erkalten wurde mit Äther geschüttelt. Derselbe hinterliess nach dem Abdestilliren eine dickflüssige, gelbbraune Masse, die, in kochendem Wasser aufgenommen, nach dem Filtriren zuerst schwerlösliche Krystallnadeln abschied, bei wei-

terem Verdunsten aber syrupös wurde und an der Oberfläche nochmals feine Nadeln ansetzte. Zur Trennung wurden beide Körper wieder in Wasser aufgenommen, die Flüssigkeit mit kohlensaurem Natron alkalisch gemacht, wobei sie dunkel wurde und mit Äther behandelt. Derselbe nahm dabei die im Wasser leicht lösliche Substanz auf, während das kohlensaure Natron die schwerlösliche zurückgehalten hatte.

Die alkalische Flüssigkeit wurde daher abermals angesäuert und mit Äther geschüttelt. Der Äther hinterliess in Krusten eine gelbe Substanz, die sich in heissem Wasser ziemlich leicht, in kaltem sehr schwer löste. Nach wiederholtem Umkrystallisiren gab sie prächtige Krystallnadeln, die einen Schmelzpunkt von 152° zeigten und nach dem Reinigen durch Sublimation bei 155° schmolzen. Die wässerige Lösung gab mit Eisenchlorid eine tiefviolette Farbenreaction. Durch essigsaures Blei entstand kein Niederschlag. Der ganze Habitus, sowie die angegebene Reaction, die Krystallform und der Schmelzpunkt deuteten darauf hin, dass es Salicylsäure sei, was auch die Analyse bestätigte.

Die Säure krystallisirt ohne Krystallwasser.

	Gefunden	$C_7H_6O_3$
C —	61·28	60·9
H —	4·52	4·3.

Der Äther, welcher zum Schütteln der alkalischen Lösung verwendet worden war, hinterliess beim Abdestilliren eine ölige Flüssigkeit, die sich nach dem Verdunsten der letzten Ätherreste in Wasser leicht löste.

Die Lösung wurde zuerst mit neutralem essigsaurem Blei behandelt, wobei ein grauer Niederschlag entstand. Derselbe wurde abfiltrirt, konnte aber der geringen Quantität halber nicht weiter untersucht werden.

Das Filtrat wurde nun mit basisch essigsaurem Blei versetzt, so lange noch ein Niederschlag entstand, letzterer abfiltrirt, ausgewaschen und einstweilen unter Wasser aufbewahrt. Die filtrirte Flüssigkeit wurde mit kohlensaurem Natron vom Blei befreit, abermals mit Äther behandelt, das vom Äther gelöste in Wasser wieder aufgenommen und mit Bleiessig gefällt. Dies



Verfahren wurde so oft wiederholt, als sich noch ein Niederschlag durch die Bleisalzlösung bildete.

Werden die vereinigten Bleiniederschläge mit Wasser angerührt, das Bleisalz durch Zusatz verdünnter Schwefelsäure zersetzt, das schwefelsaure Blei durch ein Filter entfernt, so gibt die fast farblose Flüssigkeit an Äther ein schwachgelb gefärbtes, dickflüssiges Liquidum ab, das nach dem Verjagen des Lösungsmittels durch wiederholte Destillation noch weiter gereinigt wird.

Die Substanz zeigt einen Siedepunkt von circa 260° und erstarrt beim Erkalten zu einer strahlig krystallinischen Masse. Sie schmilzt bei 87°. Ihre wässerige Lösung, lange sich selbst überlassen, wird erst syrupös und dann rasch durch die ganze Masse fest, indem, von einzelnen Punkten ausgehend, sich feine Nadeln radial compact aneinander lagern.

Bei 100° getrocknet ist die Substanz wasserfrei. So analysirt entspricht sie der Formel $C_7H_8O_2$.

	Gefunden		Berechnet
	I[1]	II.	
C —	67.25	67·81	67·74
H —	6·30	6·57	6·45.

Die Substanz krystallisirt mit Krystallwasser, eine genaue Bestimmung desselben ist jedoch sehr schwierig ausführbar. Trocknet man sie bei 100°, so verliert sie nach etwa 2 Stunden nahezu 1 Molecül Wasser, dabei bemerkt man aber schon, dass dieselbe zu verdampfen beginnt. Der Punkt, in dem alles Wasser entfernt, jedoch noch keine Substanz als solche weggegangen ist, ist daher sehr schwer zu treffen, Trocknet man sie bei circa 95°, so verliert sie in kurzer Zeit $^1/_2$ Molecül Wasser, während die andere Hälfte hartnäckig zurückgehalten wird. Auch hier beginnt schon ein theilweises Verdampfen, was man daran erkennen kann, dass sich die Oberfläche der Substanz mit feinen Nadeln überzieht.

---

[1] Diese Analyse war mit einer Substanz ausgeführt, die aus einem nicht durch mehrmaliges Umkrystallisiren gereinigten toluoldisulfosauren Kali erzeugt war.



Der Körper, dem äusseren Ansehen nach dem Orcin sehr ähnlich und von derselben Zusammensetzung, weicht gleichwohl in seinen Reactionen bedeutend von demselben ab. Es zeigt:

	Orcin.	Neuer Körper.
Beim Stehen an der Luft.	Röthlich.	Keine Änderung der Farbe.
Mit Eisenchlorid.	Tiefschwarzviolett.	Braungrün.
Mit salpetersaurem Silber und Ammoniak.	Beim Erhitzen metallisches Silber ausscheidend.	Schon in der Kälte einen schwarzen Niederschlag von Silber gebend.
Mit Chlorkalk.	Tief violett, allmälig braun, dann gelb.	Roth, allmälig gelb werdend.
Krystallwasser.	2 Molecüle.	1 Molecül.
Mit Ammoniak an feuchter Luft.	Intensiv roth, beim Versetzen mit Essigsäure Ausscheidung rother Flocken.	Bräunlich, beim Versetzen mit Essigsäure farblos werdend, ohne einen Niederschlag zu geben [1].
Siedepunkt.	290°	260°
Schmelzpunkt.	86°	87°

Die Substanz ist daher nach ihrer Entstehung, Zusammensetzung und den Reactionen als eine mit dem Orcin isomere Verbindung zu betrachten. Ich nenne sie Isorcin.

Es schmeckt schwach süss, aber nicht ekelerregend, löst sich leicht in Wasser, Alkohol und Äther und wird wie das gewöhnliche Orcin nicht gefällt durch neutrale Metallsalze. Mit Alkalien der Luft ausgesetzt, wird es braun.

Die Ausbeute an rohem Isorcin beträgt circa 12 Pct. der Theorie und ebensoviel wurde ungefähr an Salicylsäure erhalten.

---

[1] Die nicht absolut reine Substanz färbt sich bei dieser Gelegenheit blau, auf Essigsäure-Zusatz erhielt man schwach röthliche Flocken. Durch Ammoniak-Zusatz konnte die blaue Farbe stets wieder hervorgerufen werden. Eine solche Substanz gab auch die unter I angeführten Daten. Das Ausbleiben der blauen Färbung bei der genannten Reaction kann als Zeichen der Reinheit der Substanz angesehen werden.

Die Bildung von einem Dihydroxyltoluol beim angeführten Processe bedarf keiner Erklärung.

Die Entstehung der Salicylsäure betreffend muss man, da das angewendete toluoldisulfosaure Salz vollkommen rein war, annehmen, es sei eine SHO_3-Gruppe durch Wasserstoff, die anderen durch Hydroxyl ersetzt und zugleich die Methylseitenkette zu Carboxyl oxydirt worden.

Schmilzt man toluoldisulfosaures Kali mit dem doppelten Gewichte ameisensauren Natrons (20 Grm. des ersteren und 40 Grm. des letzteren sind passende Quantitäten) so lange, bis die erste Schaumbildung vollkommen verschwindet, und erhitzt dann noch einige Zeit lang bei vermindertem Feuer, bis die Masse beinahe fest geworden ist und eine dunkelgrüne Farbe angenommen hat, löst dann im Wasser, filtrirt von ausgeschiedener Schmiere ab und schüttelt die angesäuerte Flüssigkeit mit Äther, so nimmt dieser eine in Wasser schwerlösliche, braun gefärbte undeutlich krystallinische Substanz auf. Diese wird durch Umkrystallisiren aus Wasser gereiniget, in ein Barytsalz übergeführt, dieses durch Salzsäure zersetzt, mit der ausgeschiedenen Substanz die Operation wiederholt, dieselbe endlich öfters in Alkohol gelöst und krystallisiren gelassen. Die ausgeschiedene krystallinische Masse wurde in ammoniakalischer Lösung mit Thierkohle gekocht und aus dem Filtrate neuerdings durch Chlorwasserstoffsäure gefällt, nochmals in Äther aufgenommen, der Äther verdunstet und der Rückstand nochmals aus Wasser krystallisirt.

So gereinigt stellt sie einen in undeutlichen, mikroskopischen Nadeln krystallisirten Körper dar, der eine entschiedene Säure ist. Er enthält kein Krystallwasser. Die getrocknete Substanz entspricht der Formel $C_9H_8O_4$ und gab bei der Analyse:

	Gefunden		Berechnet
C	— 59·60	60·04	60·00
H	— 4·42	4·51	4·44.

Die Säure ist zweibasisch. Sie hat dieselbe Formel wie die Uvitinsäure, Isuvitin- und Xylidinsäure.

In heissem Wasser ist sie sehr schwer löslich, in kaltem fast unlöslich, namentlich auf Zusatz von etwas Salzsäure in Alkohol und Äther leicht löslich. Eine wässerige Lösung der Säure wird von Eisenchlorid in ihrer Farbe nicht verändert. Die Salze der Alkalien und alkalischen Erden sind sehr leicht löslich in Wasser und geben mit den meisten Salzen der schweren Metalle Niederschläge. Der Schmelzpunkt der Säure lässt sich nicht genau bestimmen. Bei 280—282 fängt sie an zu sintern, bei 310 wird sie weich, vollkommen geschmolzen erscheint sie erst bei 315°.

Sie lässt sich sublimiren und erscheint dann in blassgelblichen gut ausgebildeten Nadeln. Ein Theil verkohlt jedoch dabei. Die sublimirte Säure zeigt nach dem Umkrystallisiren aus Wasser die gleichen Formen wie die nicht sublimirte, eine Abspaltung von Kohlensäure kann deshalb nicht angenommen werden.

Zur Controle wurden das Barytsalz und Silbersalz dargestellt und analysirt.

Barytsalz, erhalten durch Kochen einer wässerigen Lösung der freien Säure mit kohlensaurem Baryt, Filtriren und Eindampfen des Filtrates, ist eine undeutlich krystallinische, gelbliche Masse. Es entspricht lufttrocken der Formel:

$$C_9H_6BaO_4 + 2H_2O.$$

Das Salz wird bei 140° wasserfrei.

	Gefunden	Berechnet
H_2O —	10·65	10·26,

Das trockene Salz gab bei der Analyse:

	Gefunden	$C_9H_6BaO_4$
C —	34·46	34·29
H —	2·21	1·91
Ba —	43·27	43·49.

Silbersalz, dargestellt durch Fällen des neutralen Ammoniaksalzes mit Silbersalpeter. Weisser flockiger amorpher Niederschlag.

Bei 100 getrocknet erhielt man:

	Gefunden	$C_9H_6Ag_2O_4$
C	— 27·60	27·41
H	— 1·88	1·52
Ag	— 54·78	54·80

Kupfersalz, erhalten durch Fällen des Ammoniaksalzes mit schwefelsaurem Kupferoxyd, ist ein hellgrüner, amorpher Niederschlag, im Wasser unlöslich.

Bleisalz, aus dem Ammoniaksalz durch Bleizucker erhalten, weisse, amorphe Masse, unlöslich im Wasser.

Zinksalz, aus dem Ammoniaksalz mit Zinkvitriol dargestellt. Weiss amorph, in Ammoniak löslich.

Wie aus den vorstehenden Angaben ersichtlich ist, hat die Säure mit der Uvitinsäure und namentlich mit der Xylidinsäure grosse Ähnlichkeit.

Die mit vollkommen reiner Substanz und der grössten Sorgfalt ausgeführte Prüfung ergab jedoch einige Verschiedenheiten, die dieselbe sicher als eine neue Verbindung betrachten lassen. Ich nenne sie Isoxylidinsäure.

In der folgenden Tabelle sind die Unterschiede, durch welche sich die drei genannten Säuren auseinander halten lassen, zusammengestellt.

	Uvitinsäure.	**Xylidinsäure.**	**Isoxylidinsäure.**
Schmelzpunkt	287°	280—283°	310—315°
Kupfersalz	Hellblau flockig, in Wasser fast unlöslich.	Hellblau flockig, in Wasser fast unlöslich.	Hellgrün, in Wasser unlöslich.
Zinksalz	Aus dem Ammoniaksalz durch Zinkvitriol als weisser flockiger Niederschlag erhalten.	Zinkvitriol erzeugt in der Lösung des Ammonsalzes keinen Niederschlag.	Aus dem Ammonsalz durch Zinkvitriol weiss, flockig amorph.

Silbersalz	Aus dem Ammoniaksalz durch salpetersaures Silberoxyd erhalten, weiss, flockig voluminös, am Lichte und beim Kochen beständig und in Wasser sehr schwer löslich. Beim Erkalten der gesättigten Lösung in farblosen Krystallen zu erhalten.	Aus dem Ammonsalz mit salpetersaurem Silber, weiss, flockig voluminös. Beim Kochen beständig, in heissem Wasser ziemlich löslich. Die erkaltet gesättigte Lösung scheidet keine Krystalle, sondern eine glänzende Salzhaut ab.	Aus Ammonsalz und salpetersaurem Silberoxyd weiss, flockig voluminös, beim Kochen beständig, in siedendem Wasser kaum löslich, nach dem Erkalten der gesättigten Lösung weisse Trübung.

16. Über die Einwirkung von schmelzendem Kali auf Benzoësäure.

Von **L. Barth.**

Nach den bei der Oxydation des Phenols durch schmelzendes Kali gemachten Erfahrungen, schien es nicht ohne Interesse, dieses Reagens auch auf andere aromatische Körper anzuwenden. Ich wählte zunächst zu diesen Versuchen die Benzoësäure, welche leicht rein und in grösserer Menge zu beschaffen war, und vermuthete, vorerst nach Analogie des Processes beim Phenol, neben einem Condensationsproducte zu einer der isomeren Phtalsäuren gelangen zu können. Der Versuch lieferte nun zwar ein anderes Resultat, aber dennoch scheint mir dasselbe der Mittheilung werth.

Erhitzt man Benzoësäure mit überschüssigem Kali in der Silberschale, so tritt nach einiger Zeit ziemlich starkes Schäumen, von einer Wasserstoffentwicklung herrührend, ein, die Masse färbt sich lebhaft dunkelroth, mit einem Stiche ins bräunliche. Nach einiger Zeit verschwindet diese Farbe und macht einer gelbbraunen Platz, die immer dunklere Nüancen annimmt, das Schäumen wird stärker und es entwickelt sich ein melissenartig riechender Dampf. Nachdem der Process in dieser Phase einige Zeit stehen geblieben ist, unterbricht man denselben, um etwa beginnende Verkohlung oder Verglimmung hintanzuhalten. Die Temperatur, die dabei in Anwendung kam, dürfte ungefähr 360°, die Dauer des Versuches $^1/_2$ Stunde betragen.

Die Schmelze wurde in Wasser gelöst, mit Schwefelsäure übersättigt, wobei sich eine theils krystallinisch erstarrende, theils harzige Masse ausschied, und nach dem Erkalten filtrirt. Das Filtrat war schwach gelblich gefärbt, der Filterrückstand bräunlich. Beide wurden mit Äther mehrmals durchgeschüttelt und der

Äther durch Destillation verjagt. Die aus dem Filtrate erhaltene Masse zeigte bald Krystallisation. Man unterschied deutlich die Formen der Benzoësäure neben anderen prismatischen Krystallen, Die Masse wurde auf dem Wasserbade ganz zur Trockne gebracht und dann in einem Extractionsapparate mit kochendem Schwefelkohlenstoff behandelt, um die Benzoësäure zu lösen und auf diese Weise zu entfernen. Das vom Schwefelkohlenstoff Ungelöste wurde einstweilen bei Seite gestellt. *a*.

Der Ätherrückstand, der die bei der ersten Trennung auf dem Filter gebliebenen Substanzen (mit Ausnahme des schwefelsauren Kali's) enthielt, wurde wiederholt mit Wasser ausgekocht, (etwa 15—20 mal), bis sich nichts mehr löste und der Rückstand eine bräunliche krümmelige Masse darstellte. Derselbe, *c* wurde bis zu weiterer Behandlung aufgehoben.

Die Filtrate aller Auskochungen schieden beim Erkalten gelbliche Flocken in ziemlicher Menge aus, die auf einem Filter gesammelt wurden. *b*.

Die von *b* getrennte Flüssigkeit wurde mit Äther geschüttelt, der nach dem Abdestilliren einen krystallinischen Rückstand hinterliess, in dem Benzoësäure leicht zu erkennen war. Dieser Rückstand wurde mit Schwefelkohlenstoff extrahirt, um die Benzoësäure zu lösen, und hierauf mit *a* vereinigt.

Diese Partie enthält nun vornehmlich zwei Substanzen: Paraoxybenzoësäure und einen durch Bleizucker fällbaren Körper, der eine schöne rothe Farbenreaction mit Eisenchlorid gibt.

Zur Trennung beider Körper löst man in möglichst wenig heissen Wassers (dabei bleibt manchmal noch etwas von *b* ungelöst, das mit diesem vereinigt wird) und fällt noch warm mit essigsaurem Blei. Der entstehende weisse Niederschlag wird auf einem Filter gesammelt, gut mit kaltem Wasser gewaschen, mit verdünnter Schwefelsäure zersetzt und die ganze Masse, ohne dass man früher das schwefelsaure Blei durch Filtration getrennt hätte, mit Äther durchgeschüttelt [1].

---

[1] Der Körper aus dem Bleiniederschlage ist nämlich, wenn er rein ist, in Wasser, namentlich in kaltem, schwer löslich, kann sich daher zum Theile schon mit dem schwefelsauren Blei ausscheiden und so einen Verlust bedingen.

Nach dem Verjagen des Äthers bleibt eine gelbliche Masse, die aus heissem Wasser mehrmals umkrystallisirt wurde. So erhielt man sie in undeutlich krystallinischen Flocken. Aus verdünntem Alkohol, worin sich der Körper leicht auflöst, wird er in microscopischen, kurzen, gekreuzten Prismen erhalten. Er ist eine Säure, in reinem Wasser, wie gesagt, schwer löslich, leicht löslich in Alkohol und Äther, unlöslich in Schwefelkohlenstoff. Die Färbung, die er mit Eisenchlorid zeigt, ist sehr empfindlich, schon roth mit einem Stich ins violette. Er schmilzt circa bei 245°.

Der bei 115° getrocknete Körper gab bei der Elementaranalyse:

C —	57·80	57·53
H —	4·12	4·10.

Daraus berechnet sich am nächsten die Formel:

$$C_{14}H_{12}O_7,$$

welche verlangt:

C —	57·53
H —	4·11.

Der lufttrockene Körper verlor beim Trocknen:

H_2O —	4·98	5·01.

Für $C_{14}H_{12}O_7+H_2O$ berechnen sich 5·80 Pct.

Ich muss es dahin gestellt sein lassen, welchem Grunde die nicht unbeträchtliche Differenz zwischen dem gefundenen und berechneten Krystallwassergehalte zuzuschreiben ist.

Durch Sättigen der Säure mit kohlensaurem Baryt erhält man ein in Warzen krystallisirtes Barytsalz, dessen Analyse jedoch keine brauchbaren Zahlen lieferte. Am nächsten kam es der Formel $C_{14}H_9ba_3O_7$ [1], doch wurde der Barytgehalt stets etwas zu gross befunden.

Der von Bleizucker nicht gefällte Theil von *a* wird nach dem Entbleien mit Schwefelsäure ebenfalls mit Äther durchgeschüttelt, der Äther verdampft, der krystallinische Rückstand

[1] ba = 68·5.

aus Wasser umkrystallisirt. Man erhielt so farblose, massive Prismen vom Habitus der Paraoxybenzoësäure, die mit 1 Mol. Krystallwasser krystallisirten, alle qualitativen Reactionen der Paraoxybenzoësäure zeigten und einen Schmelzpunkt von 210° besassen.

Die bei 110° getrocknete Substanz gab bei der Analyse:

	Gefunden	$C_7H_6O_3$
C	60·82	60·87
H	4·34	4·35.

Die lufttrockene Säure verlor 11·7 Pct. Krystallwasser; für $C_7H_6O_3+H_2O$ berechnen sich 11.54 Pct.

Die Substanz war also unzweifelhaft Paraoxybenzoësäure.

Der Körper, den wir früher mit *b* bezeichnet haben, ist in Wasser, auch in heissem, sehr schwer löslich, deswegen auch ziemlich leicht zu reinigen. Er stellt ein amorphes gelbliches Pulver dar, ist seinen Eigenschaften nach eine schwache Säure, erzeugt mit Eisenchlorid in wässeriger Lösung keine bemerkenswerthe Färbung. Er verlor bei 100° nichts an Gewicht und gab bei der Elementaranalyse:

C — 74·91
H — 4·46.

Auf diese Zahlen lässt sich am nächsten die Formel:

$$C_{14}H_{10}O_3$$

berechnen, welche verlangt:

C — 74·34
H — 4·46.

Löst man den Körper in Ammoniak, verjagt das überschüssige Lösungsmittel auf dem Wasserbade und fügt salpetersaures Silber hinzu, so fällt ein flockiger, weisser, am Lichte dunkel werdender amorpher Niederschlag, der nach dem Trocknen bei 100° enthielt:

	Gefunden	$C_{14}H_9AgO_3$
Ag	32·12	32·43.

Ohne auf die gegebene Formel viel Werth zu legen, scheint mir doch die Thatsache festzustehen, dass der Körper ein Condensationsproduct der Benzoësäure und zwar ein sauerstoffärmeres ist.

Die früher mit *c* bezeichnete bräunliche Masse ist vollständig amorph, sie lässt sich noch in einen in Alkohol löslichen und einen darin unlöslichen Theil trennen. Beide Körper haben schwachsaure Eigenschaften, und stellen ebenfalls ähnliche Condensationsproducte dar, wie der so eben beschriebene gelbe Körper. Nach den davon gemachten Analysen, die einen noch höheren Kohlenstoffgehalt, als den der vorigen Verbindung ergaben, eine Formel zu berechnen, hielt ich, da jede Controle fehlt, für vollkommen überflüssig.

Zu bemerken wäre noch, dass alle drei letztgenannten Producte von schmelzendem Kali nicht leicht angegriffen werden, dass aber aus dem wie gewöhnlich verarbeiteten Schmelzen eine gewisse, wenn auch nicht bedeutende Menge von Paraoxybenzoësäure erhalten werden konnte.

Was die Mengenverhältnisse betrifft, in denen die erwähnten Producte erhalten werden, so sind sie nicht bei allen Operationen gleichbleibend. Nach vorgenommenen Gewichtsbestimmungen, die allerdings keine absolute Genauigkeit beanspruchen können, bilden sich aus 100 Theilen Benzoësäure:

10—12	Theile	Paraoxybenzoësäure.
1— 2	„	der Säure $C_{14}H_{12}O_7$.
18—20	„	des gelben amorphen Körpers $C_{14}H_{10}O_3$.
18—20	„	der braunen in Wasser unlöslichen Harze.
20—25	„	regenerirte, oder nicht in der Reaction eingetretene Benzoësäure.
23—26	„	Verlust (durch vollständige Oxydation) eines Theiles der verwendeten Benzoësäure.

Betrachtet man die im Vorstehenden mitgetheilten Resultate, so erscheint als das bemerkenswertheste die Bildung von Paraoxybenzoësäure, welche hier durch directe Oxydation und

nicht wie gewöhnlich durch Substitution von OH statt eines, Wasserstoff in der Benzoësäure ersetzenden Atomes oder Restes entsteht. Es ist ferners die Beobachtung nicht uninteressant, dass, während zugleich Oxydation eintritt, auch Condensation und Reduction beobachtet wird, und zwar letztere in grösserem Masse gegen die erstere, wie die Bildung der kohlenstoffreicheren Producte beweist. Ähnliche Fälle von Oxydation durch schmelzendes Kali sind schon beobachtet, so die Überführung des Bittermandelölharzes in Paraoxybenzoësäure und die Bildung von Alizarin aus Antrachinonmonosulfosäure, bei welcher gleichzeitig allerdings auch Substitution von OH statt SHO_3 eintritt.

Diese Thatsachen scheinen mir einer weiteren Verfolgung werth, und ich beabsichtige noch andere, zunächst aromatische Substanzen in ähnlicher Richtung zu untersuchen. Unsere Kenntnisse über die Wirkungen des schmelzenden Kali's können dadurch eine nicht unwesentliche Bereicherung erfahren.

Vorgänge der beschriebenen Art sind aber, wie mir scheint, fast immer zu trennen von denjenigen Wirkungen dieses Reagens, wo es sich um Substitution von OH statt Cl, Br, J, SHO_3 etc. handelt, in welchen Fällen die Reaction gewöhnlich bei niedrigeren Temperaturen und in der Regel ziemlich glatt und einfach verlauft, obwohl auch hier Ausnahmen keineswegs ausgeschlossen sind.

Was die Säure $C_{14}H_{12}O_7$ betrifft, so haben mich besondere Versuche belehrt, dass sie der zuerst gebildeten Paraoxybenzoësäure ihre Entstehung verdankt. Schmilzt man nämlich Paraoxybenzoësäure mit Kali durch längere Zeit, so erhält man neben unveränderter Substanz, zwei schwerlösliche, durch Bleizucker fällbare Körper, von denen der eine seiner Eisenreaction, seiner Krystallform und seinen übrigen qualitativen Reactionen nach identisch mit der angeführten Säure $C_{14}H_{12}O_7$ ist. Mit Zuhilfenahme dieser Beobachtung erklärt sich auch der Vorgang beim Schmelzen der Sulfoparaoxybenzoësäure, wobei, wie ich früher bemerkt habe, neben Protokatechusäure eine schwer lösliche, durch Bleizucker fällbare Säure mit rother Eisenreaction in geringer Menge entsteht, die ich irrthümlich für eine Isomere der Protocatechusäure gehalten hatte und aus deren Entstehung ich

auf die Anwesenheit einer isomeren Sulfoparaoxybenzoësäure geschlossen hatte (siehe folgende Abhandlung). Diese Säure ist nämlich nach allen Eigenschaften auch identisch mit der hier beschriebenen, und ihre Entstehung in geringerer Menge ist entweder dem Umstande zuzuschreiben, dass dem Gemische von Sulfoparaoxybenzoësäure und Schwefelsäure durch Äther nicht alle unzersetzt gebliebene Paraoxybenzoësäure entzogen werden konnte, oder dass sich in Folge geringer Rücksubstitution aus der Sulfosäure etwas Paraoxybenzoësäure gebildet hatte. Die erstere Ansicht hat indessen mehr Wahrscheinlichkeit für sich. Leider entsteht der Körper bei allen Reactionen nur in sehr geringer Menge. Doch hoffe ich so viel davon sammeln zu können, um durch Versuche seine Constitution aufzuklären, welche, bestätigt sich anders die gegebene Formel, nicht ohne Interesse sein dürfte.

Bei dieser Gelegenheit sei es mir auch gestattet, einige Bemerkungen über die Abhandlung von Hübner: „Wie entsteht Salicylsäure aus der Brombenzoësäure vom Schmelzpunkt 155°“ (Annal. Bd. 162 S. 71) zu machen.

In meiner Notiz über die Bildung von Protocatechusäure aus Oxybenzoësäure (Annal. Bd. 159, S. 233) habe ich gelegentlich ausgeführt, dass Reactionen mit schmelzendem Kali wohl benützt werden können zur Erforschung von Isomerieverhältnissen aromatischer Substanzen, und bin damit der Ansicht, die Hübner und Friedburg mehrfach geäussert haben, entgegengetreten. Bemerkungen, die ich l. c. über die Producte der Einwirkung des schmelzenden Kali's auf Monobrombenzoësäure gemacht habe, veranlassten Hübner zu der oben erwähnten Entgegnung.

Diese scheint mir nun in vieler Beziehung überflüssig, in anderer ungerechtfertigt. Vor allem habe ich nicht die Bildung geringer Mengen Salicylsäure einer Verunreinigung der verwendeten Brombenzoësäure mit einer Isomeren zugeschrieben, wie mir Hübner vorwirft. Jeder, der die betreffende Stelle in meiner Notiz gelesen hat, wird dies zugeben müssen. Wohl aber glaubte ich im Rechte zu sein, wenn ich die Bildung von geringen Mengen Salicylsäure aus der mehrerwähnten Brombenzoësäure nicht, wie Hübner und Friedberg dies gethan haben als Beweis

gegen die Brauchbarkeit der Reaction mit schmelzendem Kali gelten liess. Mir schien eben die so überwiegend stattfindende Erzeugung von Oxybenzoësäure ein hinlänglicher Beweis dafür, dass auch in diesem Falle meine Ansicht die richtige sei. Hübner sagt weiter:

„Barth scheint zu glauben, ich bezweifelte die Bildung von Oxybenzoësäure bei Vertretung des Broms durch die Hydroxylgruppe in der Brombenzoësäure (Schmelzpunkt 155°). Ich hielt aber diese Bildung für so selbstverständlich etc.

Ich habe nun allerdings geglaubt, Hübner bezweifle diese Bildung, und die Berechtigung zu diesem Glauben schien mir daraus gefolgert werden zu können, dass Hübner und Friedburg, wenn sie von den Producten der Einwirkung von schmelzendem Kali auf die erwähnte Brombenzoësäure sprechen, wohl immer der dabei auftretenden Salicylsäure und der sehr schwer löslichen, sehr klein krystallisirenden Säure erwähnten, niemals aber der Oxybenzoësäure gedachten, die doch bei dem Versuche stets die allergrösste Hauptmenge ausmacht und demgemäss als das eigentliche Reactionsproduct angesehen werden kann.

Deshalb habe ich auch die Angabe von Friedburg als nicht richtig bezeichnet.

Im weiteren Verlaufe seiner Bemerkungen führt Hübner dann aus, dass aus Brombenzoësäure beim Schmelzen mit Kali mehr als einige Milligramme Salicylsäure, selbst bei Anwendung von nur 2—3 Grm. Brombenzoësäure entstehen. Dies ist richtig. Ich habe in meinen Auseinandersetzungen keine Angabe über die Procente der erzeugten Salicylsäure gemacht, da ich die erhaltenen Quantitäten nicht gewogen habe; nur das wollte ich mit meiner Angabe feststellen, dass die Menge der so gebildeten Salicylsäure eine verhältnissmässig sehr geringe gegenüber der entstandenen Oxybenzoësäure war.

Bei der Erklärung, die Hübner später über die Bildung der Salicylsäure in diesem Falle gibt, ist es übrigens auffallend, dass bei $^1/_4$stündigem Schmelzen 2·85 Pct. der angewandten Brombenzoësäure an Salicylsäure erhalten wurden, bei sechsstündigem nur 1·67 Pct., bei achtstündigem 2·50 Ptc. Man sollte glauben, dass die längere Dauer der Einwirkung auch die Menge der Salicylsäure beträchtlich vermehren würde.

Einen anderen Versuch hat Hübner ausführen lassen, um zu zeigen, dass Phenol, mit Kali geschmolzen, bei derselben Temperatur Salicylsäure liefert, wie dies Brombenzoësäure thut (193 bis 280°). Ich habe diesen Versuch wiederholt und kann seine Richtigkeit bestätigen.

Er wendet sich deshalb gegen meine Angabe: dass Phenol sich erst bei viel höheren Temperaturen in die beiden Oxybenzoësäuren und in Diphenol verwandle. Ich muss im grossen und ganzen auch diese meine Bemerkung aufrecht erhalten, obwohl es dem Wesen der Sache keinen Eintrag thun würde, wenn man dieselbe fallen liesse. Die Reaction von schmelzendem Kali auf Phenol, wobei die von mir angeführten Producte erhalten werden, verläuft bei Temperaturen, die über 300° liegen, also nicht mehr leicht mit dem Quecksilberthermometer gemessen werden können. Dort beginnt überhaupt erst ein inniges Verschmelzen der Kaliverbindung des Phenols mit dem überschüssigen Ätzkali.

Was die Temperatursangaben betrifft, so habe ich eben meine Versuche und nicht die von Friedburg dabei im Auge gehabt. Die Bildung geringer Mengen Salicylsäure bei niedriger Temperatur kann ich mit Vergnügen zugeben.

Hübner gibt nun eine Erklärung, wie er sich die Salicylsäure aus Brombenzoësäure entstanden denkt. Habe ich seine Gleichungen recht verstanden, so soll zunächst aus brombenzoësaurem Kali und Kalihydrat Brombenzol und kohlensaures Kali entstehen, das erstere liefert dann weiterhin Phenol neben Bromkalium, und das Phenol dann mit kohlensaurem Kali, kalium-salicylsaures Kali und Wasser.

Hübner schreibt nämlich:

$$C_6H_4Br.COOK + KHO^{1} = C_6H_4Br.H + CO_3K_2 + KHO$$
$$= C_6H_5OH + CO_3K_2 + KBr. = C_6H_4.OK.COOK + H_2O + KBr.$$

Es ist nun schwer einzusehen, wie sich aus einmal gebildetem Brombenzol Phenol erzeugen kann, da alle Angaben über Brombenzol darin übereinstimmen, dass das Brom aus demselben

[1] Aus Versehen ist in der Hübner'schen Gleichung ein Mol: KHO zu wenig gesetzt.



durch Schmelzen mit Kali nicht ausgelöst und durch Hydroxyl nicht ersetzt werden kann.

Die Erklärung des Vorganges auf die angeführte Weise scheint also nicht stichhältig. Nimmt man aber keine Bildung von Brombenzol an, so muss doch wohl das Brom durch Hydroxyl ersetzt werden, da in der Schmelze nach beendigter Reaction keine Brombenzoësäure, auch keine Benzoësäure und kein Benzol enthalten ist, wohl aber Bromkalium. Ist dies der Fall, so hat sich eben Oxybenzoësäure gebildet, und um die Salicylsäurebildung zu erklären, müsste man annehmen, dass im Momente, wo das Brom durch OH ersetzt wird, sich auch Kohlensäure abspalte. Wäre dies richtig und enstünde die Salicylsäure aus so gebildetem Phenol, so müssten, da die Umwandlung des letzteren in erstere auch bei langer Schmelzdauer nur eine sehr unbedeutende ist, in der angesäuerten Masse leicht nachzuweisende Mengen von Phenol sich befinden. Bei vielen in dieser Richtung angestellten Versuchen habe ich nun gar kein Phenol in der sauren Lösung der Schmelze auffinden können (auch durch den Geruch war keines nachweisbar), in anderen Fällen wurde zwar ein ganz schwacher Phenolgeruch bemerkt, niemals aber konnte Phenol in Substanz erhalten werden, obwohl sich jedesmal Salicylsäure gebildet hatte. Spuren von Phenol können aber wirklich durch die angegebene Nebenreaction entstehen, nur erklären sie nicht das besprochene Auftreten von Salicylsäure, weil, wie gezeigt, unter den angegebenen Bedingungen nur ein sehr geringer Bruchtheil des Phenols in die Säure übergeführt wird.

Lässt man daher diese Erklärung als unberechtigt fallen, so bleibt nichts übrig als anzunehmen, die anfänglich gebildete Oxybenzoësäure zerfalle beim weiteren Schmelzen mit Kali zum Theile in Kohlensäure und Phenol, und dieses letztere gäbe die Veranlassung zur Salicylsäurebildung. Aber auch diese Annahme wird durch den Versuch widerlegt.

Schmilzt man nämlich schon fertig gebildete Oxybenzoësäure mit Kali unter den gegebenen Bedingungen, so erhält man keine Spur von Phenol oder Salicylsäure, wie ich mich mehrfach überzeugt habe.

Nach alledem scheint die Frage: „Wie entsteht Salicylsäure aus der Brombenzoësäure vom Schmelzpunkte 155°“ noch eine offene zu sein und als solche habe ich sie auch in meiner früheren Notiz behandelt.

Die durch den zweiten Theil der oben angeführten Gleichung gegebene Erklärung scheint Hübner derjenigen, die ich seinerzeit für die Entstehung der Oxybenzoësäure gegeben habe, vorzuziehen. Nach ihm spielt kohlensaures Kali dabei eine Hauptrolle. Ich will nun durchaus nicht meine Ansicht als die richtige vertheidigen, zumal dieselbe von der Hübner'schen nicht einmal weit verschieden ist; nur die Bemerkung möchte ich mir erlauben, dass der Zusatz von kohlensaurem Kali zum Ätzkali, wie er ihn bei einem angeführten Versuche macht, überflüssig erscheint, weil bei dem Processe selbst sich durch Zerstörung eines Benzolringes grosse Quantitäten Kohlensäure, resp. kohlensaures Kali bilden, wie die stürmische Gasentwicklung beim Absättigen der Schmelze beweist.

Zum Schlusse kann ich nicht umhin zu bemerken, dass Hübner in der letzten Abhandlung die Kalischmelze als ein Mittel zur Bestimmung der Reihe, zu welcher ein Körper gehört, anerkennt, mit der Beschränkung, dass die Mengenverhältnisse der entstandenen Verbindungen, namentlich bei der gleichzeitigen Bildung isomerer Körper berücksichtigt werden.

Ich hätte es nicht gewagt, aus den früheren Äusserungen Hübner's diesen Schluss zu ziehen, und constatire diese Thatsache deshalb mit Vergnügen. Mir anderseits ist es nie in den Sinn gekommen, aus den bei solchen Reactionen auftretenden Nebenproducten einen Schluss auf die Constitution der ursprünglichen Substanz zu ziehen, sondern ich habe immer den der Menge nach als Hauptproduct auftretenden Körper als den in dieser Beziehung massgebenden angesehen. Eine andere Auffassung wird in keiner meiner Arbeiten zu finden sein.

17. Über Sulfoparaoxybenzoësäure.

Von **Rudolf Kölle.**

In einer Abhandlung über die Constitution der Protocatechusäure erwähnte Professor Barth der Sulfoparaoxybenzoësäure, aus der durch Schmelzen mit Kali die Protocatechusäure entsteht. Er bemerkte dazu, dass man zugleich einen Körper mit rother Eisenreaction erhalte, der eine neue Isomere $C_7H_6O_4$ sein könne, deren Bildung auf die Anwesenheit zweier. isomeren Sulfosäuren schliessen lasse. Nach den in der vorstehenden Abhandlung mitgetheilten Thatsachen konnte die Entstehung dieser Substanz auf andere Weise befriedigend erklärt werden.

Ich habe nun die Untersuchung der Sulfoparaoxybenzoësäure unternommen, zunächst um diese selbst und einige Salze derselben kennen zu lernen, dann aber auch, um mich von der An- oder Abwesenheit einer isomeren Verbindung zu überzeugen.

Vollkommen trockene, reine, gepulverte Paraoxybenzoësäure wurde in einem Kolben so lange den Dämpfen von wasserfreier Schwefelsäure ausgesetzt, bis sich allmälig eine syrupdicke braune Masse gebildet hatte. Es schien dabei sehr vortheilhaft zu sein, Retorten mit kurzem Halse anzuwenden, um dadurch die Temperatur im Kolben zu erhöhen, da sich sonst immer Klumpen unzersetzter Paraoxybenzoësäure bildeten, die der Zersetzung durch Schwefelsäure hartnäckig widerstanden.

Hat sich alles gelöst, so schüttet man den Inhalt vorsichtig in das zehnfache Quantum Wasser, entfernt durch Schütteln mit Äther die vielleicht noch unzersetzte Paraoxybenzoësäure, und versetzt die etwas röthlich gefärbte Flüssigkeit bis zur Neutralisation mit Ätzkalk, filtrirt vom Gips, leitet in das Filtrat Kohlensäure, filtrirt vom ausgeschiedenen kohlensauren Kalk und zersetzt die so erhaltene Lösung von sulfoparaoxybenzoësaurem Kalk

mit kohlensaurem Kali, wobei man einen Überschuss des letzteren Salzes vermeidet. Man filtrirt wieder und fällt das gebildete Kalisalz mit Bleizucker, wodurch ein voluminöser weisser Niederschlag entsteht, der weder in kaltem noch in heissem Wasser löslich ist. Er wird filtrirt, sehr gut ausgewaschen, in ein Becherglas gespült und durch Schwefelwasserstoff zersetzt. Man trennt vom ausgeschiedenen Schwefelblei und dampft das Filtrat im Wasserbade ein. Der Rückstand enthält die noch rohe, aschenhältige freie Säure. Zu ihrer Reinigung wurde sie mit absolutem Alkohol längere Zeit gekocht, vom ungelösten filtrirt, der Alkohol verjagt, der syrupartige Rückstand in Wasser aufgenommen, von den sich ausscheidenden Flocken getrennt und der Krystallisation überlassen. Erst wenn die Masse eine zähe Consistenz angenommen hat, beginnen langsam weisse seidenglänzende Nadeln anzuschiessen, die sich in Wasser äusserst leicht lösen und mit Eisenchlorid eine blutrothe Farbenreaction geben, welch letztere auf Zusatz von kohlensaurem Natron oder Ammoniak sogleich wieder verschwindet.

Die Säure ist zerfliesslich, leicht löslich in Alkohol, unlöslich dagegen in Äther.

Sie schmilzt schon unter 100° und erstarrt nicht mehr krystallinisch.

Die Substanz wurde zur Analyse bei 120° getrocknet.

Man erhielt:

	Gefunden	Berechnet nach der Formel $C_7H_6SO_6$
C	— 38·02	38·53
H	— 3·11	2·75
S	— 14·73	14·68.

Von einer sicheren Krystallwasserbestimmung konnte wohl kaum die Rede sein, da die Säure ihrer hygroskopischen Eigenschaft wegen bei längerem Stehen an der Luft zerfliesst. Die erhaltenen Zahlen deuten darauf hin, dass sie mit einem Molecül Krystallwasser krystallisirt.

Zur Controle wurde von den Salzen das Kali-, Baryt-, Silber-, Kupfer- und Cadmiumsalz näher untersucht und bestimmt.

Das **Kalisalz** wurde, wie schon erwähnt, durch Wechselzersetzung des Kalksalzes mit kohlensaurem Kali erhalten. Nach Entfernung des ausgeschiedenen kohlensauren Kalkes wurde die Flüssigkeit eingedampft. Man erhält nach einigem Stehen krystallinische Krusten aus deutlich ausgeprägten quadratischen Tafeln bestehend. Später beobachtet man noch andere nadelförmige Krystalle. Es schien nun möglich, dass man es hier mit den Salzen von zwei isomeren Säuren zu thun habe, von denen die eine beim Behandeln mit schmelzendem Kalihydrat Protocatechusäure, die andere eine Isomere liefern würde. Doch diese Ansicht erwies sich nicht als stichhältig. Beide gaben dasselbe Product, nämlich Protocatechusäure. Der Unterschied besteht einzig nur darin, dass sich zuerst, wie die Analyse zeigte, ein basisches Kalisalz, in dem auch noch der Hydroxyl-Wasserstoff der Säure durch Kalium ersetzt ist, ausscheidet.

Dies ist das in Tafeln krystallisirte Salz, während das neutrale erst später anschiesst. Aus den Mutterlaugen des ersteren Salzes scheidet sich zunächst eine gemischte Krystallisation aus: Tafeln und Nadeln, endlich folgen nur mehr die letzteren. Beide Arten von Krystallen sind von strohgelber Farbe, ziehen an der Luft Wasser an, welche Eigenschaft die Tafeln in einem geringeren Grade besitzen. Ihre Lösungen reagieren alkalisch und geben, wie überhaupt alle Salze der Sulfoparaoxybenzoësäure mit Eisenchlorid eine blutrothe Farbenreaction.

Das in Tafeln krystallisirte Salz ist nach der Formel $\underbrace{C_7H_3K_3SO_6 + 2H_2O}$ zusammengesetzt.

Das Salz verliert sein Krystallwasser erst bei 160°.

	Gefunden	Berechnet
H_2O —	9·43	9·78.

Eine Kalibestimmung des getrockneten Salzes ergab:

	Gefunden	$C_7H_3K_3SO_6$
K —	35·60	35·24.

Die Analyse des zuletzt ausgeschiedenen in Nadeln krystallisirten Salzes ergab für dasselbe im lufttrockenen Zustande die Formel:

$$(C_7H_4K_2SO_6 + H_2O).$$

Es ist also das eigentliche neutrale Salz. Sein Krystallwasser verliert es bei 150°.

Gefunden	Berechnet
H_2O — 6·20	5·77.

Die vollständige Analyse der getrockneten Verbindung lieferte folgende Zahlen:

Gefunden		$C_7H_4K_2SO_6$
C	— 28·35	28·57
H	— 1·44	1·36
K	— 26·33	26·53
S	— 11·07	10·88.

Versetzt man das neutrale Salz mit etwas Kali und lässt einige Zeit stehen, so erhält man wiederum die erst beschriebenen Tafeln des basischen Salzes. Eine isomere Sulfosäure konnte weder in den Kalisalzen noch in den später zu beschreibenden Salzen aufgefunden werden. Es bildet sich somit bei der Einwirkung von Schwefelsäure auf Paraoxybenzoësäure nur eine einzige Sulfosäure.

Neutrales Barytsalz. Neutralisirt man das breiige Gemisch von Schwefelsäure und Sulfoparaoxybenzoësäure anstatt mit Ätzkalk mit kohlensaurem Baryt und dampft nach dem Entfernen des schwefelsauren Baryts das Filtrat ein, so erhält man das genannte Salz. Es wird nochmals in Wasser gelöst, zur Vorsicht mit Ätzbaryt gekocht, vom Überschuss des letzteren durch Kohlensäure befreit und im Wasserbade eingeengt. Es krystallisirt in weissen Blättchen, die sich in Wasser leicht lösen und $3^1/_2$ Mol. Krystallwasser enthalten, das bei 150° entweicht.

Es entspricht demnach lufttrocken der Formel:

$$2(C_7H_4BaSO_6) + 7H_2O.$$

Eine Krystallwasserbestimmung gab:

Gefunden	Berechnet
H_2O — 15·15	15·14.

Das getrocknete Salz gab analysirt folgende Zahlen:

Gefunden	$C_7H_4BaSO_6$
C — 24·21	23·80
H — 1·41	1·13
Ba — 39·02	38·81
S — 9·50	9·07.

Ein **basisches Barytsalz** scheidet sich als weisses amorphes Pulver bei der Wechselzersetzung des basischen Kalisalzes mit Chlorbarium aus.

Es entspricht getrocknet der Formel:

$$2(C_7H_3SO_6)Ba_3$$

Gefunden	Berechnet
Ba — 49·10	48·87.

Silbersalz. Löst man in kochender freier Säure Silberoxyd bis zur Sättigung auf und filtrirt die noch heisse Flüssigkeit vom überschüssigen Silber, so scheiden sich nach dem Erkalten weisse Flocken aus, die unter dem Mikroskop deutliche Krystallisation zeigen. Das Salz besitzt kein Krystallwasser und ist sehr beständig. Nach der Analyse kommt ihm die Formel zu:

$$C_7H_4Ag_2SO_6.$$

Gefunden	$C_7H_4Ag_2SO_6$
Ag — 50·24	Ag — 50·00.

Das **Kupfersalz** erhielt ich durch Kochen der freien Säure mit kohlensaurem Kupfer. Nach dem Verdunsten des Lösungsmittels hinterblieb ein dunkelgrünes amorphes Pulver, dessen Analyse nach dem Trocknen bei 100° folgenden Kupfergehalt ergab:

Gefunden	$C_7H_4CuSO_6$
Cu — 22·83	22·69.

Das **Cadmiumsalz**, erhalten durch Lösen von kohlensaurem Cadmium in der freien Säure, bildet mikroskopische Krystalle, die sich im Wasser sehr leicht lösen. Bei 130° getrocknet verliert es sein Krystallwasser.

Lufttrocken hat es die Formel

$$C_7H_4CdSO_6 + 3H_2O.$$

Eine Cadmiumbestimmung des trockenen Salzes ergab:

Gefunden	$C_7H_4CdSO_6$
Cd — 33·93	34·15.

Das wasserhältige Salz verlor beim Trocknen:

Gefunden	Berechnet
H_2O — 13·80	14·14.

XIX. SITZUNG VOM 11. JULI 1872.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Note über die Zugeordneten der Functionen X_n^m" und „Einige neue Eigenschaften der Functionen X_n^m", vom Herrn Prof. L. Gegenbauer in Krems.

„Über den Zustand gesättigter und übersättigter Lösungen", vom Herrn Prof. Dr. Al. Handl in Lemberg.

Herr Director Dr. J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Über die Eigenschaften der Schwingungen eines Systems von Punkten".

Herr Dr. Jos. Nowak legt eine Abhandlung: „Über den Nachweis giftiger Pflanzenstoffe bei forensischen Untersuchungen" vor.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia Olimpica di Vicenza: Atti. 1° e 2° Semestre 1871; Atti del Consiglio Academico 5 Marzo 1872. 8°.

— Gioenia di scienze naturali di Catania: Atti. Serie III^a. Tome V. Catania, 1871; 4°.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin. Monatsbericht. März 1872. Berlin; 8°.

— — Königl. Bayer., zu München: Sitzungsberichte der philos.-philolog.-histor. Classe. 1871, Heft V & VI; 1872, Heft I. München, 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1895—1896. (Bd. 79, 23—24.) Altona, 1872; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIV, Nr. 26. Paris, 1872; 4°.

Gesellschaft, österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VII. Band, Nr. 13. Wien, 1872; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 27—28. Wien, 1872; 4°.

Istituto, R., Veneto di Scienze, Lettere ed Arti: Atti. Tomo I°. Serie IV^a, Disp. 6^a. Venezia, 1871—72; 8°.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 14. Graz, 1872; 4°.

Lanzillo, Vincenzo, Navigazione atmosferica con un aerostato-battello-vapore. Torino, 1872; kl. 4°.

Lotos. XXII. Jahrgang, Mai 1872. Prag; 8°.

Nature. Nr. 140, Vol. VI. London, 1872; 4°.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. VI, Nr. 6. Torino, 1872; 4°.

Respighi, Lorenzo, Osservazione dell' eclisse totale del 12 Decembre 1871 a Poodoocottah nell' Indostan. Roma, 1872; 4°. — Sulla Nota del prof. P. Secchi intitolata: Sull' ultima eclisse del 12 Dicembre 1871. 4°.

„Revue politique et littéraire“ et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger“. 2me Année, (2e Série) Nr. 1. Paris & Bruxelles, 1872; 4°.

Scarenzio, Pietro, Giuseppe Belli. Commemorazione. Pavia, 1872; 8°.

Société Entomologique Belge: Annales. Tomes I—XIV. Bruxelles, 1857—1871; 8°.

— Malacologique de Belgique: Annales. Tomes I—V, Années 1863—1870. Bruxelles; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 27. Wien, 1872; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIV. Jahrgang, 9. Heft. Wien, 1872; 4°.

Über den Zustand gesättigter und übersättigter Lösungen.

Von Dr. **Al. Handl,**
k. k. Professor in Lemberg.

(Beiträge zur Moleculartheorie. III.)

Ein Versuch, die früher von mir ausgesprochene, der kais. Akademie in der Sitzung am 10. Mai d. J. vorgelegte Ansicht über die Molecular-Constitution der Flüssigkeiten auch zu einer Erklärung der Vorgänge bei der Auflösung [1] eines festen Körpers in einer Flüssigkeit zu verwenden, zeigte bald, dass dies noch nicht möglich ist, ehe man anderweitig zu genaueren Kenntnissen über die Eigenschaften der Molecüle gelangt ist; denn es lassen sich a priori so viele Verhältnisse und darauf begründete Vorgänge angeben, welche alle ein Losreissen der Theilchen eines festen Körpers und deren flüssige Ausbreitung zwischen den Flüssigkeitstheilchen zur Folge haben müssten, dass man vorläufig gar keinen von ihnen als den wahrscheinlicheren zu erkennen im Stande ist. Um zu erfahren, welche Vorgänge eigentlich die Auflösung bedingen, müsste man erst im einzelnen wissen, welches die Massen, Geschwindigkeiten, Distanzen und allenfalls auch die Wirkungssphären der Molecüle in den bei der Auflösung betheiligten Körpern sind; man müsste die Verhältnisse dieser einzelnen Daten bei löslichen und nicht löslichen

[1] Es sei hier gestattet, nebenbei zu bemerken, dass ich die öfters vorkommende Anwendung eines und desselben Wortes für verschiedene Begriffe unter allen Umständen für verwirrend und schädlich halte, und dass ich daher speciell hier unter „Auflösung“ den Vorgang des Zerfallens der Molecüle eines festen Körpers und ihrer Ausbreitung zwischen den Flüssigkeitstheilchen verstehe, während ich die daraus entstehende, die beiden Substanzen enthaltende Flüssigkeit als „Lösung“ bezeichne. Eine „Lösung“ entsteht also durch „Auflösung“ eines festen Körpers in einer Flüssigkeit.



festen Substanzen und den betreffenden Flüssigkeiten nach einer allgemein giltigen Regel verschieden finden, um dann aus allen überhaupt denkbaren Vorgängen diejenigen heraussuchen zu können, welche wirklich statthaben und die beobachteten Thatsachen bedingen. Die nächste Vorarbeit, zu diesem Ziele zu gelangen, wäre eine nach den Methoden der Naturgeschichte entworfene Characteristik der einzelnen Flüssigkeiten und der in jeder von ihnen löslichen und unlöslichen Substanzen.

Es ist klar, dass eine solche Erklärung gleichzeitig auch über verwandte Thatsachen, über die Umstände z. B. von denen das Benetzen oder nicht Benetzen eines festen Körpers durch eine Flüssigkeit abhängig ist, Auskunft geben müsste; denn mit der blossen Stärke der Anziehungskräfte (Cohäsion und Adhäsion) reichen wir nicht mehr aus, sobald wir die Molecüle nicht mehr als ruhend ansehen dürfen, sondern ihre Bewegungszustände mit in Betracht ziehen müssen.

Obwohl demnach die Bewältigung dieser Aufgabe vorläufig noch dahingestellt bleiben muss, ergab sich während der vorhin erwähnten Überlegungen eine sehr einfache Erklärung des Zustandes gesättigter Lösungen und der eben so häufig eintretenden Übersättigung. Meines Wissens hat man bisher weder für das Gesetz, dass eine Flüssigkeit in Berührung mit einem fremden Körper nicht mehr als eine bestimmte Menge desselben in den flüssigen Zustand überzuführen und sich mit demselben zu mischen vermag, noch für die schon zur zweiten Regel gewordene Ausnahme, dass die Flüssigkeit doch eine grössere als jene angebliche Maximalmenge des fremden Körpers in flüssiger Form in sich enthält, eine Erklärung aufgestellt; man musste sich damit begnügen, die quantitativen Verhältnisse in dieser Beziehung so gut als möglich festzustellen, und konnte nur constatiren, dass keine einfachen oder allgemeinen Beziehungen zwischen der Löslichkeit und anderen Eigenschaften der Körper, z. B. Äquivalentgewicht, Dichtigkeit u. s. w. zu bestehen scheinen. Solche Beziehungen und überhaupt ein begründender Aufschluss über die quantitativen Verhältnisse der Löslichkeit werden sich wohl nur im Zusammenhange mit einer näheren Einsicht in die mechanischen Vorgänge bei der Auflösung ergeben; aber auch ohne

bestimmte Voraussetzungen oder Kenntnisse über jene Vorgänge kann man folgende Betrachtungen anstellen:

Bringt man eine lösliche feste Substanz in Gestalt eines Pulvers oder grösserer unregelmässig geformter Stücke in ein Lösungsmittel, aber in einer grösseren als der zur vollständigen Sättigung nothwendigen und hinreichenden Menge, so bleibt ein Theil derselben zwar ungelöst, aber nicht auch unverändert. Man beobachtet vielmehr, wenn die Lösung in einem vollkommen verschlossenen Gefässe, bei möglichst constanter Temperatur und geschützt gegen Erschütterungen von aussen gehalten wird, nach längerer Zeit eine vollständige Umwandlung des ungelösten Überschusses. Die einzelnen, früher getrennten Körner wachsen zusammen, nehmen eine vollständig krystallinische Structur in der ganzen vereinigten Masse und nicht selten auch eine gut entwickelte äussere Krystallform an. Daraus folgt, dass ein fester Körper auch in einer gesättigten Mutterlauge durchaus nicht gegen die Angriffe der Flüssigkeit geschützt ist, und dass sich die Gesammtheit der daselbst in fester und flüssiger Form befindlichen Theile des gelösten Körpers in einem Zustande des beweglichen Gleichgewichtes befindet. Der Vorgang, durch welchen ein Molecül eines festen Körpers gezwungen wird, sich der dasselbe bis dahin beherrschenden Cohäsion zu entziehen und selbst flüssig in das Lösungsmittel hinaus zu treten, mag was immer für einer sein, er wiederholt sich fortwährend an der Grenze der beiden Körper; es steht ihm aber auch ein anderer, gewissermassen umgekehrter Vorgang zur Seite, durch welchen ein bisher gelöstes Molecül, an der Grenze zwischen der Flüssigkeit und dem festen Körper angelangt, wieder von dem letzteren erfasst und festgehalten wird. Dieser zweite Vorgang findet unter sonst gleichen Umständen offenbar desto häufiger statt, je mehr von der festen Substanz in der Lösung enthalten ist. In einer Lösung, welche noch mit fester Substanz in Berührung steht, findet ein fortwährendes Auflösen einerseits, und Auskrystallisiren andererseits statt, und sie heisst gesättigt, wenn die beiden Vorgänge in gleichem Masse statthaben, d. h. wenn die in jeder Zeiteinheit neu in die Lösung tretende Menge des festen Körpers ebenso gross ist als die gleichzeitig auskrystallisirende. Unter dieser Bedingung allein ist auch der Salzgehalt der Lösung ein

constanter; man hätte aber Unrecht, wenn man aus der Unveränderlichkeit der in die Lösung eintretenden Salzmenge den Schluss ziehen wollte, dass sie zur weiteren Auflösung fester Substanz oder zur erhöhten Aufnahme derselben unfähig sei, dass der Flüssigkeit gewissermassen eine bestimmte Capacität für diesen oder jenen Stoff zugeschrieben und dass diese nicht überschritten werden könne.

Dass der Sättigungszustand einer Lösung nicht auf einer specifischen Capacität der Flüssigkeiten beruht, scheint auch aus dem Verhalten der Colloidsubstanzen (wie Leim, Gummi, Harze u. s. w.) hervorzugehen; sie haben keine Sättigungsgrenze, sie lösen sich in den überhaupt zu ihrer Auflösung geeigneten Flüssigkeiten in unbegrenzten Mengen auf, so dass die Lösungen als dickflüssige und weiche Körper in allen Abstufungen bis zum allmäligen Übergang in den Zustand vollkommener „Festigkeit“, sogar verbunden mit bedeutender Sprödigkeit, auftreten. Die gegenseitige Anziehung ihrer Molecüle wird also nie mehr grösser als die von den Flüssigkeitstheilchen auf sie ausgeübte, sie finden in ihren gegenseitigen Einwirkungen auf einander keine Veranlassung sich aus der Flüssigkeit in festem Zustande auszuscheiden. Diese Auffassung stimmt auch mit der Thatsache überein, dass sie sämmtlich amorph sind, also kein Bestreben zu regelmässiger Aneinanderlagerung ihrer Theilchen erkennen lassen.

Der Zustand einer gesättigten Lösung eines krystallinischen Körpers ist also sehr ähnlich dem Zustande eines mit Dampf von irgend einer Flüssigkeit gesättigten Raumes, welcher ja ebenfalls auf der Gleichheit der in jeder Zeiteinheit ausgesendeten und wieder condensirten Dampfmengen beruht; der Unterschied zwischen beiden besteht eigentlich, ausser der Verschiedenheit der Aggregatzustände nur noch darin, dass bei der Aussendung und Condensation der Dämpfe die Beschaffenheit des etwa noch vorhandenen Mittels (Luft z. B.) gleichgültig und nicht von wesentlichem Einflusse ist, während bei der Auflösung die Molecüle der Flüssigkeit wesentlich mitwirken, und durch ihre Beschaffenheit die stattfindenden Vorgänge bedingen. Diese Vergleichung wird noch deutlicher und die Übereinstimmung noch vollkommener, wenn wir den Begriff der Lösung etwas erweitern und nicht blos für feste, sondern auch für gasförmige Körper gelten lassen;

in der That hindert uns gar nichts, die sogenannte Absorption eines Gases durch eine Flüssigkeit, wie es ohnehin öfters geschieht, eine Auflösung desselben zu nennen, und ich habe diese Begriffserweiterung früher schon stillschweigend vorausgesetzt. indem ich das Sättigungsgesetz in der für Auflösung und Absorption gleich anwendbaren Form aussprach, dass eine Flüssigkeit in Berührung mit einem fremden Körper (sei er also fest oder gasförmig) nur eine bestimmte Menge desselben und nicht mehr in den flüssigen Zustand überführen und sich damit vermischen kann. Bei der Aufnahme eines Gases durch eine Flüssigkeit lassen sich offenbar alle von Hrn. Clausius für das Verhalten der Dämpfe zu einer Flüssigkeit, aus der sie aufgestiegen sind, ausgesprochenen Anschauungen wieder anwenden, mit dem einzigen Unterschiede, dass man es hier mit den gegenseitigen Einwirkungen verschiedenartiger, statt gleichartiger Molecüle zu thun hat. Damit wird auch das Gesetz, dass die Menge des von einer Flüssigkeit absorbirten Gases nicht von dem ganzen auf der Flüssigkeit lastenden Drucke aller umgebenden Gase, sondern nur von dem Partialdrucke des zu absorbirenden Gases abhängig und zwar demselben proportional ist, unmittelbar klar; denn mit der eigenen Spannkraft eines über der Flüssigkeit befindlichen Gases wächst die Zahl der in der Raumeinheit vorhandenen Molecüle desselben, und im gleichen Verhältnisse steigert sich die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens solcher Vorgänge, durch welche ein Gasmolecül in der Flüssigkeit festgehalten (absorbirt) wird.

Es ist klar, dass auch die Mischungen zweier Flüssigkeiten sich unter demselben Gesichtspunkte betrachten lassen, welcher für die Lösungen massgebend ist; weichen die Beschaffenheiten ihrer Molecüle in gewissen, vorläufig noch nicht näher bekannten Beziehungen nur wenig von einander ab, so verhält sich jede von ihnen zur anderen wie ein Colloid zu seinem Lösungsmittel, und sie mischen sich in jedem beliebigen Verhältnisse mit einander; im entgegengesetzten Falle, wenn die massgebenden Eigenschaften ihrer Molecüle sehr verschieden sind, verhält sich jede Flüssigkeit zur andern wie ein löslicher, krystallisirbarer, fester Körper, bei welchem das Gleichgewicht zwischen dem Auflösen und Niederschlagen der Theilchen den Sättigungszustand her-

beiführt. Zwei solche Flüssigkeiten, in einem Gefässe nach Maassgabe ihrer specifischen Gewichte übereinander gelagert, verhalten sich so, dass jede von ihnen eine gewisse kleine Quantität der anderen in Lösung aufnimmt. Nimmt bei einem solchen Versuche die Gewichtseinheit einer Flüssigkeit F_1 ein Maximalgewicht p_1 von einer zweiten Flüssigkeit F_2, diese hingegen das Maximalgewicht p_2 von der ersteren auf, so müsste man sagen, wenn man eine specifische Capacität der einen Flüssigkeit für die andere annehmen wollte: die Gewichtseinheit der Flüssigkeit F_1 kann von der anderen (F_2) jede beliebige Menge (m) aufnehmen, welche entwender: $m \leqq p_1$ oder $m \geqq \frac{1}{p_2}$ ist; solche Gewichtsmengen aber, welche zwischen p_1 und $\frac{1}{p_2}$ liegen, können nicht aufgenommen werden. Wenn man auch bei sonstigen Lösungen eine begrenzte Capacität einer Flüssigkeit für fremde Molecüle annehmen wollte, so würde doch eine solche, mit einer Unterbrechung von bedeutender Ausdehnung behaftete, sonst aber unbegrenzte Capacität zu viel des Unwahrscheinlichen an sich haben.

Dass die ihrer Art nach bisher noch ganz unbestimmt gelassenen molecularen Vorgänge, welche die Auflösung bedingen, jedenfalls wesentlich von den Geschwindigkeiten der Molecüle, also von der Temperatur abhängen, ist offenbar; der Einfluss der Temperatur auf die Löslichkeits-Verhältnisse im Einzelnen aber kann erst mit der genaueren Kenntniss jener molecularen Vorgänge selbst aufgeklärt werden.

Die Entstehung und das Verhalten der übersättigten Lösungen lassen sich nach den für die gesättigten angenommenen Grundsätzen leicht erklären und stehen mit denselben in Einklang. Übersättigung einer Lösung tritt niemals während der directen Auflösung ein, weder bei festen Körpern noch bei Gasen; d. h. wenn eine noch so grosse Menge des löslichen Körpers mit einer bestimmten Menge des Lösungsmittels zusammen gebracht wird, so nimmt letzteres niemals mehr als die „normale“ Menge des ersteren auf, und zwar die letzten Antheile derselben auch schon schwer, nämlich sehr langsam. Die Übersättigung tritt immer nur, dann aber oft sehr reichlich, bei solchen Veränderun-

gen der bestehenden Verhältnisse, zu denen in erster Linie die Temperatur gehört, auf, welche das Verhältniss zwischen den in gleichen Zeiten in die Flüssigkeit eintretenden und von ihr ausscheidenden Mengen des fremden Körpers zu Ungunsten der ersteren abändern; diese Veränderungen haben zur Folge, dass die Flüssigkeit unter den neuen Umständen nicht mehr ebensoviele Theilchen des fremden Körpers aufnehmen könnte, wie sie unter den früheren Umständen aufgenommen hat; aber es ist ihr auch nicht unmöglich geworden, den Überschuss in sich zu behalten. Die Ursache, warum die Flüssigkeit unter den neuen Verhältnissen nicht mehr die ganze früher aufgenommene Menge des fremden Körpers behalten soll, liegt nicht im Innern der Flüssigkeit selbst, sondern an den Begrenzungsflächen, wo sich die Lösung und der unveränderte Antheil des in die Lösung eingegangenen Körpers berühren.

Das Ausscheiden der im Überschuss aufgelösten Theile findet demgemäss auch nicht im Innern der Flüssigkeit selbst, sondern an den Berührungsstellen eingetauchter Körper statt; die ausgeschiedenen Theile verbreiten sich nicht gleichmässig durch die ganze Flüssigkeit, sondern gruppiren sich um einzelne Mittelpunkte, seien es Krystalle, Staubtheilchen, Gasbläschen, o. dgl. und selbst dabei hat die Ausscheidung an einer Stelle nicht auch den gleichen Vorgang an allen übrigen Orten zur Folge, wie es z. B. beim Erstarren einer überkälteten Flüssigkeit der Fall ist; es bedarf vielmehr einer längeren Zeit oder einer durch bewegen, schütteln, u. s. w. vermittelten innigen Berührung aller Theile der Lösung mit dem „Fällungsmittel", um wirklich die Übersättigung aufzuheben. Es ist wohl einzusehen, dass dieses Fällungsmittel, der das Ausscheiden der überschüssig gelösten Theilchen bewirkende Körper, nicht gerade die gelöste Substanz selbst zu sein braucht, dass er aber ähnliche Wirkungen ausüben, also in gewissen Beziehungen ähnliche oder übereinstimmende Molecülar-Eigenschaften haben muss. Es ist also nicht zu verwundern, wenn in manchen Fällen die Reduction einer übersättigten Lösung durch einen dritten Körper von dem Material und der sonstigen Beschaffenheit desselben abhängig und mit demselben veränderlich ist.

Über den Nachweis giftiger Pflanzenstoffe bei forensischen Untersuchungen.

Von Dr. **Josef Nowak.**

I.

Wie vielfachen Schwierigkeiten man bei der Aufsuchung organischer Gifte in Gemengen mit anderen Substanzen begegnet, zeigt der Reichthum an verschiedenartigen Vorschlägen, welche auf die Ermittlung organischer Gifte Bezug nehmen, zeigt das stetig wiederkehrende Streben der Forscher auf dem Gebiete der gerichtlichen Chemie durch zweckentsprechende Modificationen der bereits bekannten Verfahren, durch Auffindung neuer Reactionen auf giftige Pflanzenstoffe und durch das Studium der Löslichkeitsverhältnisse derselben, die Mängel der gewöhnlich benützten Methoden zu beseitigen, die Lücken derselben auszufüllen.

Die günstigen Resultate, welche ich durch die Art und Weise erzielte, die ich bei Aufsuchung organischer Gifte in Gemischen, wie sie bei forensischen Untersuchungen vorliegen, einschlug, bestimmten mich zur Veröffentlichung der in dieser Beziehung von mir gemachten Erfahrungen. Alle jene Vorschläge, nach welchen die giftigen organischen Verbindungen durch Fällungsmittel von den sie begleitenden Stoffen gesondert werden sollten, haben keinen Anklang gefunden. Man überzeugte sich bald, dass auf diese Weise nur eine beschränkte Zahl organischer Gifte nachweisbar sei, und dass durch die hiebei auszuführenden Manipulationen sehr leicht weitgehende Zersetzungen der aufzusuchenden Substanz eintreten können. Dagegen erkannte man immer mehr die Zweckmässigkeit und das Erfolgreiche des Strebens, durch Aufsuchung geeigneter Lösungsmittel Behelfe zu finden, durch welche die organischen

Gifte von den in gerichtlichen Untersuchungsobjecten vorkommenden Beimengungen isolirt werden könnten. Als derartige Lösungsmittel sind Äther, Amylalkohol, Essigäther, Chloroform, Benzol, Petroleumäther, Carbolsäure(!) u. s. w. anempfohlen worden.

Die Anforderungen, welche man an diese Lösungs- und Trennungsmittel und an einen mit Hilfe derselben aufzustellenden systematischen Gang zur Auffindung giftiger organischer Verbindungen in gerichtlichen Untersuchungsobjecten stellen muss, sind mannigfach.

Das einzuschlagende Verfahren soll vorerst eine allgemeine Brauchbarkeit haben, d. h. alle hieher gehörigen Gifte nachweisen lassen. Weiter muss das Gift dort, wo es vorkommt, zuverlässlich und möglichst vollständig abgeschieden werden, da, wie bekannt, oft sehr geringe Mengen dieser Substanzen hinreichen, den Tod herbeizuführen, und manche derselben sehr rasch im Körper sich verbreiten; endlich muss das Gift rein und unzersetzt erhalten werden, damit man mit dem gewonnenen Untersuchungsmateriale die nöthigen Identitätsreactionen anstellen könne.

Diesen Anforderungen zu entsprechen, sind die chemischen und physikalischen Eigenschaften der verschiedenen in Vorschlag gebrachten Mittel nicht in gleichem Masse günstig. Der Äther und Essigäther vermag nur eine kleine Zahl organischer Gifte aufzunehmen; auch ist die Löslichkeit in Wasser dem Gebrauche dieser Flüssigkeiten als Ausschüttlungsmittel für Pflanzengifte hinderlich. Für die Anwendung des Amylalkohols spricht der Vortheil, dass sämmtliche hieher gehörigen Gifte von demselben leicht und sicher aufgenommen werden können. Dagegen ist die Leichtigkeit, mit welcher der Amylalkohol auch die fremdartigen Beimengungen aufzunehmen und hiedurch die unumgänglich nothwendige Reinigung der aufzusuchenden Substanzen zu erschweren vermag; weiter der höhere Temperatursgrad, der zum Verdampfen desselben nothwendig ist, sowie der Umstand, dass erst nach längerer Zeit ein Abheben desselben von der wässerigen Flüssigkeit möglich wird, von grossem Nachtheil. Unter dem Namen Benzin kommen Producte im Handel vor, welche bei der Destillation

des Steinöls gewonnen, oft nur sehr geringe Mengen jener Körper enthalten, welche der Chemiker als Benzol und dessen Homologe bezeichnet. Polymere Kohlenwasserstoffe anderer Reihen sind die vorwiegenden, der Menge nach wechselnden Bestandtheile der diesen Namen führenden Handelsware. Für forensische Arbeiten ist es aber unbedingt nothwendig, das anzuwendende Lösungsmittel von stets gleicher Zusammensetzung zu haben, denn nur so lange weiss man, welche Leistungsfähigkeit das gewählte Mittel besitzt, nur so lange kann man zu der mit Hilfe desselben auszuführenden Arbeit volles Vertrauen haben. Auch können beim Verdunsten eines solchen käuflichen Benzols sehr leicht Oxydationen auftreten und zur Bildung von nicht oder schwer flüchtigen Substanzen Anlass geben, welche die später vorzunehmenden Reactionen auf die Alkaloide in störender Weise beeinflussen können. Die Darstellung des reinen krystallisirbaren Benzols aus der Handelsware unterliegt aber schon deshalb Schwierigkeiten, weil, so weit meine mehrfachen Erfahrungen mich lehrten, das reine Benzol nur einen untergeordneten Bestandtheil in dem wenigstens am hiesigen Platze käuflichen Benzin bildet, ja darin oft gänzlich fehlt.

Dagegen sind die Eigenschaften des Chloroforms der Verwendung dieser Flüssigkeit als Lösungs- und Trennungsmittel für Pflanzengifte sehr günstig. Das hohe specifische Gewicht und die höchst minimale Löslichkeit des Chloroforms in Wasser ermöglicht eine leichte mechanische Trennung desselben von der wässerigen Flüssigkeit. Der niedere Siedepunkt gestattet das Lösungsmittel von dem gelösten Körper bei Temperaturen zu trennen, bei welchen weder eine Verflüchtigung noch eine Zersetzung der gelösten Substanz zu besorgen ist. Auch der Umstand, dass das Chloroform rein und leicht überall verschaffbar ist, und dass es durch die vorzunehmenden Operationen keine Veränderung erleidet, die eine störende Wirkung auf die nachfolgenden Reactionen hervorbringen könnte, fällt hier ins Gewicht.

Das Chloroform wurde zuerst von Rodgers und Girdwood einzig und allein zur Ermittlung von Strychnin angewendet. Später wurde es mehrfach zum Nachweise einzelner

anderer Alkaloide empfohlen; dagegen ist die Frage, in wie weit das für die Zwecke der Isolirung der organischen Gifte mit so vorzüglichen Eigenschaften begabte Chloroform eine allgemeine Verwendbarkeit bei der Aufsuchung der hieher gehörigen Körper finden könne, bisher nur von Prof. Schneider ventilirt worden.

Ich habe deshalb vielfache Ausschüttlungsversuche mit Chloroform ausgeführt und dieselben auf alle jene chemisch näher studierten Pflanzenstoffe ausgedehnt, welche entweder wegen ihrer toxischen Eigenschaften oder wegen ihrer medicinischen Anwendung hier in Betracht kommen müssen, ohne Rücksicht darauf zu nehmen, ob dieselben vom chemischen Standpunkte zu den Alkaloiden oder zu anderen Gruppen organischer Verbindungen gerechnet werden.

Diese Versuche lehrten:

Aus der schwefelsauren Lösung wandern beim wiederholten Schütteln mit Chloroform in dasselbe allmälig nachfolgende Substanzen über: Caffeïn, Theobromin, Colchicin, Thebaïn, Papaverin, Narkotin und Pikrotoxin.

Der alkalisch gemachten Lösung entzieht Chloroform rasch und vollständig schon in der Kälte: Strychnin, Chinin, Chinidin, Cinchonin, Caffeïn, Theobromin, Emetin, Atropin, Hyoscyamin, Aconitin, Veratrin, Physostygmin, Narkotin, Kodeïn, Thebain, Nicotin und Coniin. Etwas langsamer wird Brucin, Colchicin und Papaverin, erst in der Wärme Sabadillin, und in geringer Menge Narceïn aus alkalischer Lösung aufgenommen.

Morphin und Solanin gehen weder aus saurer noch aus alkalischer Lösung ins Chloroform über.

Um nun diese Ergebnisse für die Aufstellung eines mit Hilfe des Chloroforms auszuführenden methodischen Verfahrens, durch welches nebst der Abscheidung der Gifte auch die gleichzeitige Reindarstellung derselben, welche zur Vornahme der Identitätsreactionen unumgänglich nothwendig ist, in expediter Weise erzielt werden soll, praktisch zu verwerthen, wollte ich mir auch darüber Aufschluss verschaffen, ob das die Gifte gelöst enthaltende Chloroform beim Schütteln mit (schwe-

fel-)saurem Wasser sich analog verhalte, wie der Äther beim Stass'schen Verfahren.

In dieser Richtung angestellte Versuche zeigten, dass durch mehrmaliges Schütteln mit saurem Wasser dem Chloroform alle jene Substanzen, welche aus der wässerig alkalischen Flüssigkeit ins Chloroform wandern, entweder vollständig oder nahezu vollständig (beim Caffeïn, Theobromin, Narkotin und Papaverin blieben etwa 2 Proc., beim Colchicin 5 Proc. im Chloroform zurück) entzogen, während die fremdartigen fettigen und sonstigen Beimengungen vom Chloroform zurückgehalten werden.

Bezüglich des Digitalin muss ich noch erwähnen, dass das zu den Ausschüttlungsversuchen benützte Präparat (von E. Merck in Darmstadt bezogen) ein Gemenge verschiedener Substanzen zu sein schien. Selbst nach wiederholten Ausschüttlungen wanderte nur ein Theil desselben (etwa die Hälfte) aus alkalisch gemachter Lösung ins Chloroform, der Rest wurde vom Amylalkohol leicht aufgenommen. Durch Schütteln mit schwefelsaurem Wasser konnte ich der Chloroformlösung keine wägbare Menge des gelösten Körpers entziehen. Dagegen vermochte ich durch Vermengen des Chloroforms mit Eisessig und nachherigem Zusatz von so viel Wasser, als zur vollständigen Wiederabscheidung des Chloroforms nothwendig war, in die wässerige essigsaure Lösung einen deutlich krystallisirbaren Körper überzuführen, welcher sehr elegante, reine Reactionen mit Schwefelsäure und Bromwasser lieferte, die sich durch die Farbe und die ganze Art ihres Auftretens wesentlich von jenen unterschieden, welche das zum Versuch benützte Präparat an und für sich, sowie der in Chloroform zurückbleibende, in die essigsaure Lösung nicht überführbare, als auch der in den Amylalkohol übergegangene Rest mit diesen Reagentien gab. Diese Substanz, in mit freiem Auge sichtbaren Nadeln krystallisirend, wurde durch Schwefelsäure sogleich hellroth gefärbt und dann mit gleicher Farbe gelöst. Bromdampf rief in dieser Lösung sofort eine schön rein violette Färbung hervor. Der nachherige Zusatz von Wasser bewirkte, dass die Flüssigkeit sich mattgrün färbte, ohne dass ein grünflockiger Körper zur Ausscheidung kam. Der in Chloroform verbliebene, nicht

krystallisationsfähige, und der vom Amylalkohol aufgenommene Theil des zum Versuche genommenen Digitalinpräparates färbte sich hingegen beim Zusatz von concentrirter Schwefelsäure zuerst dunkelbraun (umbrafärbig) und später röthlichbraun. Die schwefelsaure Lösung wurde durch Bromdampf rothbraun. Ein Zusatz von Wasser schied grüne Flocken ab.

II.

Auf Grundlage dieser Erfahrungen wurde nun der nachfolgende systematische Gang zur Aufsuchung giftiger Pflanzenstoffe eingeschlagen.

Die zu untersuchenden Objecte werden zerschnitten, mit schwefelsäurehaltigem Wasser versetzt, bis auf 75° C. erwärmt; die Lösung wird warm colirt, der ungelöste Rückstand abgepresst und wiederholt mit warmem Wasser ausgezogen. Die so erhaltenen sauren Colaturen werden mit doppelt kohlensaurem Natron bis zur schwach sauren Reaction abgestumpft und dann am Wasserbade in flachen Schalen bis zum dünnen Syrup verdunstet. Dieser wird mit seinem vierfachen Volum 90percentigen Alkohols vermengt, nach 24 Stunden auf 40—50° erwärmt, abfiltrirt und der Filterrückstand mit Alkohol ausgezogen. Von den gesammelten alkoholischen Auszügen wird der Weingeist vollständig abdestillirt. Der Destillationsrückstand wird filtrirt und das Filtrat in einen Scheidetrichter gebracht. Hiezu eignen sich am zweckmässigsten solche, welche ballonförmig aufgeblasen sind, deren Eingussöffnung mit einem Glasstöpsel luftdicht verschlossen werden kann, und die am Ablaufrohr mit einem vollkommen gut schliessenden Glashahn versehen sind. Alle auszuführenden Operationen des Ausziehens, Fällens, Waschens u. s. w. lassen sich in diesen Ballons vornehmen. Zu dem im Scheidetrichter befindlichen Inhalt wird zuerst Chloroform und dann Ammoniak bis zur deutlich alkalischen Reaction gebracht. Es wird sofort wiederholt geschüttelt. Die Chloroformlösung wird getrennt und die alkalische Flüssigkeit mit neuen Portionen von Chloroform so lange ausgezogen, bis eine abgehobene Portion, ohne Rückstand zu lassen, verdampft. Die alkalische Flüssigkeit wird indessen zur Seite gestellt und die sämmt-

lichen Chloroformlösungen werden mehreremal mit neuen Portionen schwefelsäurehältigen Wassers geschüttelt. Das Chloroform wird von dem schwefelsauren Wasser getrennt, letzteres mit Ammoniak übersättigt und sodann einigemal mit Chloroform geschüttelt. Die nun erhaltene Chloroformlösung wird durch ein mit Chloroform angenetztes Filter filtrirt, mit Chloroform nachgewaschen und verdunstet. Ein hiebei verbleibender Rückstand wird auf alle jene Alkaloide geprüft, welche, wie oben erwähnt, aus alkalischer Lösung durch Chloroform ausgezogen werden. Die zur Seite gestellte alkalisch wässerige Flüssigkeit wird mit neuem Chloroform und mit verdünnter Schwefelsäure bis zur sauren Reaction versetzt und geschüttelt. Das Chloroform wird getrennt und verdunstet. Etwa vorhandenes Pikrotoxin und Reste des Colchicins werden im Rückstand bleiben.

Wird die jetzt sauer reagirende wässerige Flüssigkeit mit Amylalkohol überschichtet, mit Ammoniak alkalisch gemacht und geschüttelt, der Amylalkohol abgehoben, filtrirt und verdampft, so wird man nach dem Verdunsten allfällig vorhandenes Morphin, Digitalin und Solanin und den grösseren Theil der Reste des Sabadillins, Narceins und Pikrotoxins auffinden.

Im Falle, als in den Verdunstungsrückständen Narkotin, Papaverin, Theobromin, Caffeïn, Colchicin oder Digitalin gefunden wurde, lassen sich noch die geringen fehlenden Mengen des Papaverin, Narkotin, Caffeïn, Theobromin und Colchicin, sowie ein nicht unbeträchtlicher Theil des Digitalin im ersten Chloroformauszuge aufsuchen. Derselbe wird verdunstet, der Rückstand wiederholt mit warmem schwefelsäurehältigem Wasser ausgezogen, die saure Flüssigkeit mit Ammoniak übersättigt und mit Chloroform ausgeschüttelt. Die Reste der genannten Substanzen bleiben beim Verdampfen des Chloroforms zurück.

Um die Brauchbarkeit dieser Methode durch praktische Versuche zu erproben, habe ich in Gemeinschaft mit den Herren Gruber, Genser, v. Reuss und Heinrich gewogene Mengen verschiedener Gifte in zweckmässig gewählte Leichentheile (Magen- und Darminhalt, Leber, Blut u. s. w.) vermengt und in der angegebenen Weise aufgesucht. Die hiebei erhaltenen Resultate sind aus nachfolgender Tabelle ersichtlich. Die zu diesen Versuchen benützten Substanzen waren sämmtlich von

der Firma E. Merck bezogene Präparate. Das den letzten Verdunstungsrückständen mehr weniger hartnäckig anhaftende Chloroform wurde mittelst der Luftpumpe weggebracht.

Name der giftigen Verbindung	Die mit Leichentheilen vermengte Menge in Grm.	Die gefundene Menge		Anmerkung
		in Grm.	in Proc.	
Chinin.......	0·050	0·049	98	
Chinidin	0·050	0·048	96	
Cinchonin ...	0·050	0·048	96	
Strychnin ...	0·050	0·047	94	Blieb durch 8 Tage mit den Leichentheilen in Berührung und wurde erst dann in Arbeit genommen.
Brucin......	0·022	0·022	100	
Caffeïn......	0·026	0·025	97	
Theobromin.	0·020	0·0195	98	
Emetin	0·035	0·035	100	Blieb durch 6 Tage mit den Leichentheilen in Berührung und wurde erst dann in Arbeit genommen.
Atropin	0·031	0·030	97	
Hyoscyamin.	0·025	0·020	80	Das zum Versuch verwendete Präparat war nicht krystallisirt.
Aconitin	0·028	0·025	89	
Veratrin	0·051	0·049	96	Blieb durch 6 Tage mit den Leichentheilen in Berührung und wurde erst dann in Arbeit genommen.
Sabadillin ...	0·046	0·038	82	
Morphin	0·060	0·057	95	
Narkotin	0·050	0·045	90	
Papaverin...	0·033	0·026	78	Blieb durch 13 Tage mit Leichentheilen in Berührung und wurde erst dann in Arbeit genommen.
Thebaïn	0·016	0·015	93	
Kodeïn	0·025	0·023	92	
Narceïn.....	0·035	0·021	60	Der grösste Theil wurde im Amylalkohol gefunden.
Delphinin ...	0·017	0·017	100	
Colchicin ...	0·050	0·035	70	
Digitalin	0·035	0·029	80	Der grösste Theil wurde im Amylalkohol gefunden.
Pikrotoxin ..	0·096	0·083	80	Ausserdem war noch eine Spur im Amylalkohol nachweisbar.
Solanin	0·040	0·049	—	

Die aus dieser Tabelle ersichtlichen Ergebnisse unserer Versuche zeigen, dass in vielen Fällen die ganze Menge des den Leichentheilen zugesetzten Körpers, in den meisten der grösste Theil desselben, und nur einmal (Narceïn) etwa die Hälfte der aufzusuchenden Substanz wieder gefunden wurde.

Die erhaltenen Resultate befriedigten aber insbesondere des hohen Grades von Reinheit wegen, welchen die aus Chloroform wiedergewonnenen Substanzen zeigten. Jene Körper, zu deren Aufnahme der Amylalkohol bestimmt ist, waren in Folge der vorhergegangenen mehrmaligen Ausschüttlungen der alkalischen und sauren wässerigen Flüssigkeit mit Chloroform so weit von den fremdartigen Beimengungen befreit worden, dass an denselben meistens sofort die Identitätsreactionen vorgenommen werden konnten. Kleine Mengen fettiger und färbender Verunreinigungen hafteten denselben aber immer an und konnten nur durch wiederholtes Überführen in wässerige Lösung und aus dieser in den Amylalkohol allmälig entfernt werden. Durch das Vorgehen nach der oben beschriebenen Weise ist aber der Gebrauch des Amylalkohols nur auf eine sehr kleine Zahl organischer Gifte beschränkt, für welche bis jetzt kein passenderes Lösungsmittel gefunden wurde.

III.

Bei der Wahl von Reagentien, durch welche die isolirte Substanz ihrer Natur nach unzweideutig erkannt werden soll, handelt es sich zumeist darum, mit den kleinsten Mengen des vorliegenden Untersuchungsmaterials dieses Ziel zu erreichen. Ein Jeder, der Gelegenheit hatte, bei gerichtlichen Untersuchungen auf Alkaloide zu prüfen, wird erfahren haben, dass man wirklich nur minimale Mengen zu den verschiedenen Reactionsproben zur Verfügung hat, und wie sehr man mit dem gewonnenen Untersuchungsmateriale sparen müsse. Die anzuwendenden Reagenzmittel müssen demnach einerseits sehr empfindliche und andererseits für die einzelnen hier in Betracht kommenden Substanzen charakteristische Erscheinungen hervorrufen. Diesen Anforderungen kann man durch Anwendung

von concentrirter Schwefelsäure unter Zuhilfenahme einiger weniger anderen Reagentien leicht entsprechen.

Von der gewonnenen giftigen Substanz wird eine kleine Menge auf ein Uhrglas gebracht, dieses auf eine rein weisse Unterlage gestellt und ein bis zwei Tropfen chemisch reiner Schwefelsäure zugefügt. Man beobachtet die hiebei sogleich auftretenden Veränderungen, wobei nachfolgende Fälle möglich sind, durch welche die hier in Betracht kommenden Körper in sechs Gruppen zerfallen.

1. Die Substanz bleibt farblos: Chinin, Cinchonin, Morphin, Strychnin, Caffeïn, Theobromin, Codeïn (Coniin und Nicotin), Atropin.

2. Es tritt eine gelbe, verschieden nüancirte Färbung ein: Chinidin, Colchicin, Emetin, Narcotin, Aconitin, Pikrotoxin, Solanin, Veratrin und Sabadillin.

3. Die Substanz wird rosaroth: Brucin.

4. Die Substanz färbt sich anfangs roth, wird alsbald mit gelber Farbe gelöst: Thebaïn.

5. Es tritt eine violette Färbung auf: Papaverin [1].

6. Braune Färbungen geben: Delphinin, Narceïn und Digitalin.

Ad 1. Man gibt einen Krystall von Chromsäure zur schwefelsauren Lösung. Ist Strychnin vorhanden, so entwickelt sich von der Peripherie dieses Kryställchens die bekannte blaue, allmälig purpurroth werdende Färbung. Beim Neigen des Uhrglases werden eben so gefärbte Streifen sichtbar. In allen übrigen Fällen tritt eine in verschiedenartigen Farbenabstufungen sich entwickelnde, nicht charakteristische grüne Färbung auf.

Eine neue Probe der zu prüfenden Substanz wird nach Zusatz von Chlorwasser zur Trockene am Wasserbade eingedampft. Der Eindampfrückstand bietet bei Morphin, Cinchonin und Atropin nichts charakteristisches, ist hingegen bei Chinin grünlich, bei Caffeïn und Theobromin roth und bei Codeïn gelb. Wird dieser Trockenrückstand etwas befeuchtet und eine Spur Ammon zugefügt, so entsteht bei Morphin eine hellbraune, bei

[1] Ich habe keine Erfahrungen über jene Sorte von Papaverin, welche, wie Hesse sagt, mit Schwefelsäure farblos bleibt.



Caffeïn und Theobromin eine purpurviolette, bei Codeïn eine schön rothbraune und bei Chinin eine stark grüne Färbung. Bei Cinchonin beobachtet man die Ausscheidung eines weissen Körpers, bei Atropin tritt keine auffällige Veränderung auf. Durch diese Reactionen wird man bereits in der Lage sein, mit grosser Wahrscheinlichkeit das zur Untersuchung vorliegende Glied der Gruppe zu erkennen. Man wird deshalb mit dem noch übrigen Untersuchungsmaterial zunächst jene Reactionen vornehmen, welche für die vermuthete Substanz charakteristisch sind. Von den in dieser Beziehung bekannten Reactionen eignet sich auf Morphin die mit Eisenchlorid, welches in neutralen Salzlösungen dieser Base die bekannte blaue Färbung hervorruft. Codeïn mit Schwefelsäure zusammengebracht, welche eine kleine Menge von Salpetersäure enthält, gibt eine anfangs kirschrothe, allmälig blutroth und schliesslich orange gefärbte Lösung. Caffeïn und Theobromin, welche gegen Chlorwasserammoniak sich ganz gleich verhalten, aber dadurch als solche hinlänglich charakterisirt werden, unterscheiden sich von einander schon dadurch, dass Caffeïn beim Verdunsten des Chloroforms stets in langen nadelförmigen Krystallen, das Theobromin in pulveriger Form erhalten wird. Für Atropin, das bei 95° C. schmilzt, empfiehlt sich als bestätigende Reaction am besten das physiologische Experiment. Lösungen des Chinins in verdünnter Schwefelsäure fluoresciren Cinchoninlösungen nicht[1].

Ad 2. Die Körper dieser Gruppe lassen sich in zwei Unterabtheilungen scheiden: in solche, bei welchen die gelbe Färbung eine andauernde oder wenigstens durch längere Zeit anhaltende ist (Chinidin, Narkotin, Colchicin, Emetin, Aconitin, Solanin und Pikrotoxin), und in solche, bei welchen sie nur im Anfang auftretend, sich schon nach wenigen Minuten in ein deutliches Violettroth umwandelt.

Bei den Substanzen der ersten Untergruppe sind folgende Fälle möglich. Die Färbung ist schwach strohgelb — Chinidin, hellgelb — Narkotin, grüngelb — Colchicin, schmutzig bräun-

[1] Coniin und Nicotin sind durch ihre ölige Beschaffenheit, durch ihre Flüchtigkeit in höheren Temperaturen und durch ihren charakteristischen Geruch erkennbar.



lich gelb — Emetin, gelbbraun — Aconitin, orange — Solanin und Pikrotoxin. Werden diese Substanzen mit der Schwefelsäure fünf Minuten lang am Wasserbade erhitzt, so tritt keine wesentliche Veränderung beim Chinidin und Emetin (dieses wird höchstens ganz wenig dunkler) ein, dagegen wird die Lösung bei Narkotin anfangs röthlich, später violett, beim Colchicin braun, beim Aconitin und Pikrotoxin rothbraun und bei Solanin himbeerroth.

Schon durch dieses Verhalten wird man leicht im Stande sein, die in diese Gruppe gehörenden Körper ihrer Natur nach zu erkennen. Als bestätigende und charakteristische Reactionen empfehlen sich für diese Substanzen nachfolgende: Chinidinlösungen mit Chlorwasser versetzt scheiden nach Zusatz von Ammoniak grüne Flocken ab, die sich im Überschuss von Ammoniak mit smaragdgrüner Farbe lösen. Narkotin gibt mit salpetersäurehaltiger Schwefelsäure eine tiefrothe, Colchicin eine schön violette Färbung. Für Emetin fehlt ein gutes Specialreagens. Noch am dienlichsten ist heisse Salzsäure, die nebst einem Tropfen Bleichkalklösung zu Emetin gefügt einen orangegelben Niederschlag gibt, der durch mehr Bleichkalklösung zu einer intensiv zwiebelrothen Flüssigkeit gelöst wird. Das physiologische Experiment ist bei dieser Substanz nicht zu unterlassen. Aconitin wird beim vorsichtigen Erwärmen mit Phosphorsäure allmälig röthlich, und dann, unter sorgfältigem Umrühren behutsam weiter erhitzt, violett. Pikrotoxin reducirt eine alkalische Kupferlösung schon in der Kälte, rascher beim Erwärmen. Beim Solanin ist es höchst charakteristisch, dass, wenn es in wenig warmem Weingeist oder Amylalkohol gelöst wird, diese Lösung beim Erkalten zu einer dicken Gallerte erstarrt.

Hat sich die anfangs gelbe Lösung allmälig ins Purpurrothe umgewandelt, so deutet das auf die Anwesenheit von Veratrin oder Sabadillin. Bei dem letzteren Körper entwickelt sich die bläulichrothe Färbung rasch, bei Veratrin findet ein langsamer Farbenwechsel aus gelb in roth und schliesslich violett statt. Auch wird Sabadillin von Chloroform schwierig und erst in der Wärme vollständig, Veratrin schon in der Kälte leicht gelöst. Beide Substanzen mit concentrirter Salzsäure erwärmt,

geben eine blaurothe Lösung, in der Zinnchlorür einen veilchenblauen Niederschlag bewirkt.

Ad 3. Eine rosenrothe Färbung weist auf Brucin. Setzt man der schwefelsauren Lösung einen Tropfen Salpetersäure zu, so tritt eine intensiv zwiebelrothe Färbung auf, die nach Zusatz von Zinnchlorür ins violette übergeht.

Ad 4. Das Thebaïn ist schon durch seine Schwefelsäurereaction hinlänglich charakterisirt; andere unterscheidende und charakteristische Reactionen fehlen.

Ad 5. Auch das Papaverin ist schon durch die Schwefelsäurereaction leicht erkennbar. Sie besteht in einer tief violettblauen Färbung, welche langsam verblasst. Eine Spur Salpetersäure ist darauf ohne Einfluss, mehr Salpetersäure erhöht anfänglich den Farbenton, der dann bald in orange und schmutziggelb umschlägt.

Ad 6. Die braunen Färbungen, welche Digitalin, Delphinin und Narceïn mit Schwefelsäure geben, unterscheiden sich schon durch die Nuancirung. In welcher Weise die Reaction bei Digitalin auftritt, ist bereits oben besprochen worden; Delphinin wird durch Schwefelsäure bleibend hellbraun. Narceïn, anfangs braun, löst sich allmählig mit gelber Farbe auf. Kommt die schwefelsaure Lösung dieser drei Körper mit Bromdampf zusammen, so gibt Digitalin die oben erwähnten Reactionen, Delphinin wird hiebei anfangs hellblutroth, später braun, Narceïn entfärbt sich ganz.

In nachfolgender Tabelle sind die eben besprochenen Identitätsreactionen der besseren Übersicht wegen schematisch zusammengestellt [1].

---

[1] Da ich mir bis jetzt kein reines (krystallisirbares) Hyoscyanin und Porphyroxin und keine ausreichenden Mengen von Physostigmin verschaffen konnte, habe ich die Reactionsverhältnisse dieser drei Körper in diese Versuchsreihe nicht aufgenommen.



Concentrirte Schwefelsäure löst die Substanz:

Farblos	Zusatz von Chromsäure färbt	Eine neue Probe wird mit Chlorwasser zur Trockene verdampft. Der Eindampfrückstand ist	Der mit Chlorwasser erhaltene Eindampfrückstand wird mit Ammon	Specielle Reactionen
Strychnin	blau			
Chinin	grün, nicht charakteristisch	grün	sattgrün	die Lösung in verdünnter Schwefelsäure fluorescirt
Cinchonin	grün, nicht charakteristisch	nicht charakteristisch	weiss	die Lösung in verdünnter Schwefelsäure fluorescirt nicht
Morphin	grün, nicht charakteristisch	nicht charakteristisch	hellbraun	Eisenchlorid erzeugt eine bläuliche Färbung
Caffeïn	grün, nicht charakteristisch	roth	violett	krystallisirt aus Chloroform in Nadeln
Theobromin	grün, nicht charakteristisch	roth	violett	krystallisirt aus Chloroform in pulverigen Krystallen
Codeïn	grün, nicht charakteristisch	gelb	rothbraun	wird mit salpetersäurehältiger Schwefelsäure tiefroth
Atropin	grün, nicht charakteristisch	nicht charakteristisch	nicht verändert	schmilzt bei 95°; erweitert die Pupille
Coniin	durch ihre ölige Consistenz und durch ihren charakteristischen Geruch erkennbar			
Nicotin	durch ihre ölige Consistenz und durch ihren charakteristischen Geruch erkennbar			

Concentrirte Schwefelsäure löst die Substanz:

		Substanz	Farbe	beim Erwärmen am Wasserbade wird die Farbe	Specielle Reactionen
gelb	bleibend	Chinidin	schwach strohgelb	nicht verändert	mit Chlorwasser-Ammon grüne Flocken.
		Narkotin	hellgelb	anfangs röthlich, später violett	mit salpetersäurehältiger Schwefelsäure tief rothe Färbung
		Colchicin	grüngelb	braun	mit salpetersäurehältiger Schwefelsäure violette Färbung
		Aconitin	braungelb	rothbraun	Phosphorsäure erzeugt beim Erwärmen rothe Färbung
		Emetin	schmutzig bläulich gelb	nicht verändert	mit heisser Salzsäure und einem Tropfen Bleichkalklösung orange Flocken
		Solanin	orange	rothbraun	die Lösung in Amyl- und Äthylalkohol gelatinirt in der Kälte
		Pikrotoxin	orange	himbeerroth	reducirt alkalische Kupferlösung

	Substanz	Farbe			
gelb, allmälig in Roth umschlagend	Sabadillin	die gelbe Farbe verwandelt sich rasch in blauroth	concentrirte heisse Salzsäure gibt bei beiden eine blaurothe Lösung	Chloroform löst	vollständig erst in der Wärme
	Veratrin	die gelbe Farbe geht zuerst in orange und dann allmälig in bläulich roth über			leicht schon in der Kälte

Concentrirte Schwefelsäure löst die Substanz:

rosa-roth	Brucin: spec. Reaction: Salpetersäure erzeugt eine zwiebelrothe Lösung, die durch Zinnchlorür violett wird			
anfangs roth, dann gelb	Thebaïn			
violett blau	Papaverin: ein grösserer Zusatz von Salpetersäure zur schwefelsauren Lösung erhöht anfangs den Farbenton, der dann bald in orange und schmutziggelb umschlägt			
braun	Digitalin	umbrafärbig	kommt die schwefelsaure Lösung mit Bromdampf zusammen, wird die Lösung	violett oder rothraun
	Delphinin	hellbraun		anfangs hellblutroth, später braun
	Narceïn	anfangs braun, sehr bald gelb		entfärbt.

Über die Eigenschaften der Schwingungen eines Systems von Punkten.

Von dem w. M. J. **Stefan.**

Die schwingende Bewegung einer gespannten Saite oder eines elastischen Stabes lässt sich, insofern ihre Gesetze durch lineare Differentialgleichungen bestimmt sind, bekanntlich darstellen als eine Summe von unendlich vielen einfachen Schwingungen. Für die transversale oder longitudinale Verschiebung σ eines Punktes erhält man Formeln von der Gestalt

$$\sigma = X(a\cos\mu t + b\sin\mu t) + X'(a'\cos\mu' t + b'\sin\mu' t) + \ldots \qquad (a)$$

μ, μ', μ'',... bedeuten die mit 2π multiplicirten Schwingungszahlen der einfachen Schwingungen und sind die Wurzeln einer transcendenten aus den Grenzbedingungen sich ergebenden Gleichung.

Der Coëfficient X ist eine durch die Differentialgleichung der Bewegung und durch die Bedingungen an den Grenzen vollständig bestimmte Function der Abscisse x des Punktes, dessen Verschiebung durch σ ausgedrückt ist. X ist auch abhängig von μ und gehen X', X'',... aus X hervor, wenn in dieses statt μ die anderen Wurzelwerthe μ', μ'',... eingeführt werden.

Die Constanten a, b, a', b',... können aus den für $t = 0$ gegebenen Verschiebungen und Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte des schwingenden Körpers bestimmt werden, und zwar in allen Fällen nach ein und derselben Methode.

Die Functionen X, X',... haben nämlich die Eigenschaft, dass das Product aus je zwei verschiedenen von ihnen über alle Punkte der Saite oder des Stabes summirt verschwindet, dass also, unter l die Länge der Saite oder des Stabes verstanden,

$$\int_0^l XX'dx = 0 \qquad (b)$$

ist, wodurch die Isolirung und Bestimmung jeder einzelnen der Constanten möglich wird.

In dem Falle der Schwingungen von Saiten sind X, X', X'',... die Sinus der Bögen $\frac{\pi x}{l}$, $\frac{2\pi x}{l}$, $\frac{3\pi x}{l}$,... und hat diese Eigenschaft derselben zuerst Lagrange bei seinen Untersuchungen über die Schwingungen einer linearen Punktreihe nachgewiesen und zur Bestimmung der Constanten benützt, später Fourier zur Entwicklung der Functionen in periodische Reihen in Anwendung gebracht.

In dem Falle der longitudinalen Schwingungen eines elastischen Stabes ist X ein Sinus oder Cosinus je nach den für die Enden des Stabes gegebenen Bedingungen.

Hingegen ist für den Fall der transversalen Schwingungen eines elastischen Stabes X ein viergliedriger, aus periodischen und exponentiellen Functionen zusammengesetzter Ausdruck, und derselben Art auch die Gleichung, deren Wurzeln μ, μ',... sind. Auch diese Functionen X, X',... besitzen die durch die Gleichung (b) ausgedrückte Eigenschaft, wie von Poisson bewiesen worden.

Für die transversalen Schwingungen einer gespannten kreisförmigen Membran findet man unter der Voraussetzung, dass die Verschiebung σ jedes Punktes nur von seiner Entfernung x vom Mittelpunkte abhängig ist, ebenfalls eine Formel von der Gestalt der (a). Es ist jedoch X keine elementare Transcendente mehr, sondern von der Art der Bessel'schen Functionen. Auch in diesem Falle ist die Bestimmung der Constanten nach derselben Methode, wie in den früheren Fällen, möglich, nur mit der Abänderung, dass für diese Functionen statt der Gleichung (b) die Gleichung

$$\int_0^l XX'xdx = 0 \qquad (c)$$

gilt, worin l nunmehr den Radius der Membran bedeutet. Es ist durch diese Gleichung daher auch die Möglichkeit der Entwick-

lung einer Function in eine nach solchen Transcendenten fortschreitende Reihe gegeben.

Die durch die Gleichung (*c*) ausgedrückte Eigenschaft haben, wie Kirchhoff[1] gezeigt hat, auch die Functionen, zu denen die Untersuchung der Transversalschwingungen einer kreisförmigen elastischen Platte führt.

In analoger Weise genügen die Functionen, durch welche das Problem der radialen Schwingungen einer Kugel gelöst wird, der Gleichung

$$\int_0^l XX'x^2dx = 0 \qquad (d)$$

worin l den Radius der Kugel bedeutet.

An diese speciellen Resultate knüpft sich ein sehr allgemeiner Satz an, welchen Clebsch[2] aus den für die unendlich kleinen Bewegungen fester elastischer Körper geltenden Differentialgleichungen abgeleitet hat.

Die nach den drei Axen eines orthogonalen Coordinatensystems geschätzten Componenten ξ, η, ζ der Verschiebung eines Punktes in einem elastischen Körper lassen sich darstellen durch

$$\begin{aligned} \xi &= X(a\cos\mu t + b\sin\mu t) + X'(a'\cos\mu' t + b'\sin\mu' t) + \ldots \\ \eta &= Y(a\cos\mu t + b\sin\mu t) + Y'(a'\cos\mu' t + b'\sin\mu' t) + \ldots \qquad (e) \\ \zeta &= Z(a\cos\mu t + b\sin\mu t) + Z'(a'\cos\mu' t + b'\sin\mu' t) + \ldots \end{aligned}$$

Darin sind μ, μ', μ'',... wieder die Wurzeln einer transcendenten Gleichung, welche aus den für die Oberfläche des schwingenden Körpers gegebenen Bedingungen folgt. X, Y, Z sind durch die Differentialgleichungen der Bewegung und durch die Grenzbedingungen bestimmte Functionen der Coordinaten und zugleich abhängig von μ, so dass wieder die Coëfficienten X', Y', Z', X'', Y'', Z'',... aus X, Y, Z entstehen, wenn in diesen μ durch μ', μ'',... ersetzt wird.

Diese Functionen haben nun die Eigenschaft, dass

$$\iiint (XX' + YY' + ZZ')\, dx\, dy\, dz = 0 \qquad (f)$$

---

[1] Crelle's Journal, XL.

[2] Theorie der Elasticität fester Körper, p. 62.

ist, wenn X, Y, Z und X', Y', Z' irgend zwei verschiedenen Wurzeln μ und μ' zugehören, und die Integration über den ganzen vom schwingenden Körper erfüllten Raum ausgedehnt wird.

Diesen Satz hat Clebsch abgeleitet unter der Voraussetzung, dass keine äusseren Kräfte auf die einzelnen Massentheilchen des schwingenden Körpers wirken, und dass auch die Drücke auf der Oberfläche Null sind. Letzteres ist nun, wenn einzelne Stellen der Oberfläche fest gemacht sind, wie die Enden der schwingenden Saiten oder Stäbe, nicht der Fall, es bleibt jedoch der ausgesprochene Satz auch in diesem Falle noch richtig, da die Oberflächenintegrale, auf deren Werth es ankommt, verschwinden, nicht nur, wenn die Spannungen, sondern auch wenn die Verschiebungen der Punkte in der Oberfläche Null sind.

In anderer Weise hat Petzval[1] die durch die Gleichungen (b, c, d) ausgedrückten Sätze verallgemeinert, indem er nachwies, dass jeder Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2u}{dt^2} = X_{2n}\frac{d^{2n}u}{dx^{2n}} + X_{2n-1}\frac{d^{2n-1}u}{dx^{2n-1}} + \ldots + X_0 u \qquad (g)$$

mit für $x=0$ und $x=l$ gegebenen linearen Grenzbedingungen, welcher die Auflösung

$$u = U(a\cos\mu t + b\sin\mu t) + U'(a'\cos\mu' t + b'\sin\mu' t) + \ldots$$

genügt, eine andere Differentialgleichung mit analogen Grenzbedingungen entspricht, nämlich

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(X_{2n}v) - \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}(X_{2n-1}v) + \ldots - \frac{d}{dx}(Xv) + X_0 v$$

deren Integral dargestellt werden kann durch

$$v = V(h\cos\mu t + k\sin\mu t) + V'(h'\cos\mu' t + k'\sin\mu' t) + \ldots$$

derart, dass die Werthe μ, μ', μ'', ... in v die Wurzeln derselben transcendenten Gleichung sind, wie die μ, μ', μ'', ... in u.

---

[1] Integration der linearen Differentialgleichungen, II, p. 650.

Die Functionen U, U',... und V, V',... haben dann die Eigenschaft, dass, wenn U irgend eine derselben aus der ersten Reihe und V' irgend eine, aber zu einer anderen Wurzel gehörige aus der zweiten Reihe bedeutet,

$$\int_0^l UV'\,dx = 0$$

ist. Dieser Satz liefert das Mittel zur Bestimmung der Constanten in dem allgemeinen Integrale u, verlangt aber zu diesem Behufe die Integration einer zweiten Gleichung. Während jedoch die Fälle, für welche die Gleichungen (b), (c), (d), (f) gelten, sich nur auf homogene Körper von gleichförmiger Dichte beziehen, ist der Petzval'sche Satz dieser Beschränkung nicht unterworfen, da die Coëfficienten X_{2n}, X_{2n-1},... welche die durch die Dichte dividirten Spannungen, Elasticitätscoëfficienten oder ähnliche Grössen bedeuten, beliebige Functionen von x sein können.

Man gelangt jedoch auf eine andere Form der Verallgemeinerung der durch die Formeln (b), (c), (d) ausgedrückten Sätze, wenn man einen einfachen Fall der Schwingungen eines in verschiedenen Theilen verschieden dichten Körpers behandelt, wie z. B. die longitudinalen Schwingungen eines Stabes, welcher aus mehreren verschiedenartigen Stücken zusammengesetzt ist. Sind der Stücke zwei, so erhält man [1] für die Verschiebung eines Punktes im ersten Stücke den Ausdruck

$$\xi_1 = X_1(a\cos\mu t + b\sin\mu t) + X_1'(a'\cos\mu' t + b'\sin\mu' t) + \ldots$$

und für die Verschiebung eines Punktes im zweiten Stücke

$$\xi_2 = X_2(a\cos\mu t + b\sin\mu t) + X_2'(a'\cos\mu' t + b'\sin\mu' t) + \ldots$$

X_2 und X_1 sind aus trigonometrischen zusammengesetzte Functionen, solcher Art ist auch die Bestimmungsgleichung für μ.

Bezeichnet man mit l_1 die Länge des ersten Stückes, mit $l - l_1$ die Länge des zweiten Stückes, bedeuten ferner ρ_1 und q_1 Dichte und Querschnitt für das erste, ρ_2 und q_2 dieselben Grös-

[1] Sitzungsberichte, LV.

sen für das zweite Stück, so lässt sich die zur Bestimmung der Constanten a, b,... dienende Eigenschaft der Functionen X_1 und X_2 ausdrücken durch die Gleichung

$$\rho_1 q_1 \int_0^{l_1} X_1 X_1' dx + \rho_2 q_2 \int_{l_1}^{l} X_2 X_2' dx = 0 \qquad (h)$$

Besteht der schwingende Stab aus zwei Stücken und ist ausserdem an der Stelle, an welcher diese zwei Stücke zusammenstossen, mit einer schweren Masse m belastet, so erhält man für die Verschiebungen in den zwei Stücken ähnliche Formeln, wie die vorhergehenden, nur sind die Functionen X_1 und X_2, und ebenso die Bestimmungsgleichung für μ anders zusammengesetzt. Man erhält aber weiter noch für die Bewegung der Masse m einen Ausdruck von der Form

$$\xi = M(a \cos \mu t + b \sin \mu t) + M'(a' \cos \mu' t + b' \sin \mu' t) + \ldots$$

worin M, M',... constante, durch die Bedingungsgleichungen, denen das schwingende System unterworfen ist, vollständig bestimmte Grössen darstellen.

Für diesen Fall ist die zur Bestimmung der Constanten dienende Relation folgende

$$\rho_1 q_1 \int_0^{l_1} X_1 X_1' dx + \rho_2 q_2 \int_{l_1}^{l} X_2 X_2' dx + mMM' = 0 \qquad (k)$$

Die beiden Gleichungen (h) und (k) weisen darauf hin, dass in dem Falle eines linearen Systems von veränderlicher Dichte ρ die Division der Bewegungsgleichung durch dieses ρ, nach welcher Division die Gleichung die Form (g) annimmt, das Problem nicht vereinfachen, sondern nur compliciren kann. In der That lässt sich leicht beweisen, dass bei entsprechenden Grenzbedingungen die particulären Integrale der Gleichung

$$\rho \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^n}{dx^n}\left(X_n \frac{d^n u}{dx^n}\right) + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(X_{n-1} \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right) + \ldots \qquad (l)$$

welche in dem allgemeinen Integrale

$$u = U(a \cos \mu t + b \sin \mu t) + U'(a' \cos \mu' t + b' \sin \mu' t) + \ldots \qquad (m)$$

vereinigt sind, die durch die Formel

$$\int_0^l \rho U U' dx = 0 \qquad (n)$$

ausgedrückte Eigenschaft besitzen, mag ρ constant oder irgendwie von x abhängig sein. Da die Gleichungen für die schwingende Bewegung eines Körpers, sobald diese durch eine einzige Grösse u als Function von t und einer anderen Variabelen x bestimmt ist, immer die Form der Gleichung (l) annehmen, so ist durch die Formel (n) für die Constantenbestimmung die allgemeine Grundlage gegeben.

Es ist demnach auch für die Gleichung (f) die naturgemässe Form die folgende

$$\iiint \rho (XX' + YY' + ZZ') dx\, dy\, dz = 0 \qquad (o)$$

aber nicht nur, wenn ρ constant ist, kann diese Formel (o) für (f) geschrieben werden, sondern, wenn die Dichte ρ als veränderlich betrachtet wird, so führen die Gleichungen der Elasticitätstheorie zu dieser Formel (o) und nicht zur Formel (f).

Die Gleichungen (n) und (o) liefern aber das folgende wichtige Theorem:

Die lebendige Kraft eines schwingenden elastischen Körpers ist für jeden Augenblick gleich der Summe der lebendigen Kräfte, die den einzelnen einfachen Schwingungen entsprechen.

Differenzirt man nämlich z. B. die Gleichungen (e) nach t, und bildet das über den ganzen Rauminhalt des Körpers ausgedehnte Integral

$$\frac{1}{2}\iiint \rho \left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] dx\, dy\, dz$$

so stellt dieses die gesammte lebendige Kraft des schwingenden Körpers dar. In dem Werthe dieses Integrals fallen nun in Folge der Gleichuug (o) alle doppelten Producte jener Glieder, welche versehiedenen von den Wurzeln μ, μ',... entsprechen, weg, nur die Quadrate aller dieser Glieder bleiben übrig, und diese stellen die lebendigen Kräfte der Einzelschwingungen dar.

Diesen Satz hat zuerst de Saint-Venant [1] ausgesprochen als einen, der sich in allen speciellen Fällen, auf die er ihn anzuwenden vermochte, bewahrheitet hat.

Lippich [2] lieferte einen Beweis dieses Satzes und gelangte zu dem Resultate, dass die Giltigkeit desselben gleichgiltig, ob man es mit einem homogenen elastischen Körper oder mit einer Vereinigung beliebig vieler von verschiedener Natur zu thun hat, nur von den Bedingungen an den Grenzen des Systems abhängt und dann statt hat, wenn die auf die Oberfläche etwa wirkenden Kräfte gewisse lineare Functionen der Verschiebungen ihrer Angriffspunkte sind, bei beliebigen anderen Grenzbedingungen.

Auch Lippich geht von den Gleichungen der Elasticitätstheorie aus und kommt zu diesem Resultate auf demselben Wege, auf welchem Clebsch zu dem durch die Formel (f) gegebenen Satze gelangt ist.

Damit ist aber dieser Satz von der lebendigen Kraft der schwingenden Bewegungen und die Anwendbarkeit der mit ihm in Zusammenhang stehenden Methode der Constantenbestimmung noch nicht in der ihnen zukommenden Allgemeinheit bewiesen. So sind die beiden oben angeführten speciellen Fälle der transversalen Schwingungen elastischer Stäbe und Platten in dem Beweise nicht mit inbegriffen, sie sind es jedoch in dem Beweise der Gleichung (n). Denn die Gleichungen für diese Schwingungen sind von der vierten Ordnung, jene der Elasticitätstheorie sind es nur von der zweiten, und die von Clebsch und Lippich geführten Beweise stützen sich auf diese specielle Form dieser Gleichungen. Es hat zwar aus diesen Clebsch auch Gleichungen für die Transversalschwingungen der elastischen Stäbe abgeleitet, doch sind gerade die von ihm aufgestellten Gleichungen so beschaffen, dass ihre particulären Integrale dem von Clebsch bewiesenen Satze (f) nicht genügen.

Ferner gilt das erwähnte Theorem nicht blos für die Schwingungen fester elastischer Körper, sondern auch noch für andere Schwingungsprobleme, bei denen es sich um die Integra-

---

[1] Comptes-rendus. LX.

[2] Sitzungsberichte. LIV, 63.

tion von linearen Differentialgleichungen handelt, und hat die Anwendbarkeit der damit zusammenhängenden Methode der Constantenbestimmung eine noch viel weitere Ausdehnung.

Es lässt sich aber dieser Satz von den lebendigen Kräften allgemein und in sehr einfacher Art beweisen, wenn man von den Gleichungen für die unendlich kleinen Schwingungen eines Systems von beliebig vielen Punkten ausgeht, welche nicht nur für den Fall der Schwingungen der einzelnen Theilchen fester elastischer Körper, sondern auch noch für alle anderen Fälle von unendlich kleinen Schwingungen gelten.

Was die Bedingungen anbelangt, unter welchen dieser Satz besteht, so ergibt sich, dass er immer Giltigkeit hat, sobald die die Schwingungen unterhaltenden Kräfte als lineare Functionen der in dem System eingeleiteten Verschiebungen dargestellt werden können und so beschaffen sind, dass sie und die von ihnen unterhaltenen Bewegungen dem allgemeinen Principe der lebendigen Kräfte genügen.

Es existirt dann für alle in dem System bei Unterhaltung der Schwingungen thätigen Kräfte eine Kraftfunction, und diese ist eine homogene Function zweiten Grades von den nach drei auf einander senkrechten Richtungen geschätzten Componenten aller in dem System eingeleiteten Verschiebungen.

Die Quelle des Satzes bildet eine Eigenschaft der homogenen Functionen zweiten Grades, welche sich in folgender Weise ausdrücken lässt. Ist U eine homogene Function zweiten Grades von den Variablen x_1, x_2, $x_3, \ldots$ und geht diese Function über in U', wenn diese Variablen ersetzt werden durch andere x'_1, x'_2, $x'_3, \ldots$ so ist

$$\frac{dU}{dx_1} x'_1 + \frac{dU}{dx_2} x'_2 + \ldots = \frac{dU'}{dx'_1} x_1 + \frac{dU'}{dx'_2} x_2 + \ldots \qquad (p)$$

wenn auf jeder Seite der Gleichung alle Differentialquotienten von U oder U' nach allen darin enthaltenen Variablen gesetzt werden.

Der Satz gilt nun zunächst, wenn die auf die einzelnen Punkte des Systems wirkenden Kräfte in der Wechselwirkung zwischen diesen Punkten allein ihren Ursprung haben, wie im Falle der Schwingungen eines freien elastischen Körpers. Die

Kraftfunction enthält dann nur Differenzen der Verschiebungscomponenten. Es bleibt jedoch der Satz auch dann giltig, wenn auf jeden oder einzelne der Punkte noch andere Kräfte wirken, welche lineare Functionen seiner oder ihrer Verschiebungscomponenten und durch eine von diesen allein abhängige Kraftfunction bestimmt sind. Darin ist auch der Fall mit enthalten, dass unter den im System der bewegten Punkte thätigen Kräften solche vorhanden sind, welche aus Wechselwirkungen zwischen diesen Punkten und anderen unbeweglichen entspringen, und brauchen diese fixen Punkte nicht an der Oberfläche des Systems sich zu befinden, sie können durch das ganze System beliebig zerstreut sein.

Lässt sich die Kraftfunction in Theile zerlegen derart, dass in jedem der Theile keine jener Variablen enthalten ist, welche in den anderen Theilen vorkommen, so besitzt jeder solche Theil für sich die durch die Gleichung (p) ausgedrückte Eigenschaft, und der Satz von der lebendigen Kraft der Schwingungen gilt dann für jene Schwingungen, welche von den einem solchen Theile entsprechenden Kräften unterhalten werden, für sich.

Dies ist z. B. der Fall bei den Schwingungen gespannter Saiten; die longitudinalen und die transversalen, letztere in zwei auf einander senkrechte Richtungen zerlegt, bilden drei von einander unabhängige Schwingungssysteme und der in Betracht stehende Satz gilt für jedes für sich.

Dieser Fall tritt z. B. auch ein, wenn ein System von Punkten durch fixe Punkte in einander nicht beeinflussende Theile getheilt ist, der Satz gilt dann für jede zwischen solchen Knoten liegende Abtheilung für sich.

Die Giltigkeit dieses Satzes ist nur durch eine bestimmte Form der Bewegungsgleichungen bedingt, und er besteht z. B. auch für den Fall, dass die einzelnen Punkte des Systems in einem widerstehenden Mittel schwingen, sobald der Widerstand mit der Geschwindigkeit und der Masse jedes Punktes in directem für alle Punkte gleichem Verhältnisse steht. Dieser formelle Ursprung des Satzes hat auch zur Folge, dass die mit ihm in Verbindung stehende Methode der Constantenbestimmung nicht nur bei Schwingungsproblemen, sondern auch bei anderen, wie z. B. denen der Theorie der Wärmeleitung, ihre Anwendung

findet. Sie führt immer zum Ziele, sobald es sich um ein System von linearen Differentialgleichungen handelt, von der Gestalt, dass die Variablen u_1, u_2, u_3, ... ausgedrückt sind durch

$$
\left.
\begin{aligned}
m_1\left(a\frac{du_1}{dt}+b\frac{d^2u_1}{dt^2}+\ldots\right)&=\frac{dU}{du_1}\\
m_2\left(a\frac{du_2}{dt}+b\frac{d^2u_2}{dt^2}+\ldots\right)&=\frac{dU}{du_2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\}\qquad (q)
$$

Darin bedeutet U eine homogene Function zweiten Grades der Variablen u_1, u_2, ... ; a, b ... bedeuten constante Coëfficienten, die Factoren m_1, m_2, ... können gleich oder von Gleichung zu Gleichung verschieden sein. Die Giltigkeit der Methode ist von der Anzahl der Gleichungen nicht abhängig, sie trifft auch dann noch zu, wenn die Anzahl der Gleichungen unendlich gross wird, die Variablen u_1, u_2 ... eine Reihe mit unendlich kleinen Differenzen bilden, in welchem Falle das System der obigen Gleichungen sich durch partielle Differentialgleichungen und gewöhnliche Differentialgleichungen für die Grenzwerthe der Variablen ersetzen lässt. Umgekehrt ist diese Methode der Constantenbestimmung anwendbar bei solchen partiellen Differentialgleichungen, welche sammt den Grenzbedingungen als Repräsentanten eines Gleichungssystems von der Form (q) betrachtet werden können, und ist durch sie zugleich die Entwicklung von Functionen in Reihen, welche nach particulären Integralen dieser Differentialgleichungen fortschreiten, ermöglicht.

Obwohl alle diese Folgerungen aus den Gleichungen für die unendlich kleinen Schwingungen eines Systems von Punkten in höchst einfacher Weise sich ergeben, und diese Gleichungen schon oft discutirt worden sind, vielleicht auch schon in der hier angedeuteten Richtung, was mir nicht bekannt ist, so will ich doch die zu den auseinandergesetzten Resultaten führenden einfachen Entwicklungen im Folgenden zusammenstellen.

Ein System von n Punkten sei im stabilen Gleichgewichte, also die Resultante aller auf jeden einzelnen Punkt wirkenden

Kräfte Null. Werden den einzelnen Punkten unendlich kleine, im übrigen aber beliebige Verschiebungen ertheilt, so ist die Resultante der auf irgend einen der Punkte wirkenden Kräfte bestimmt durch eine lineare Function der nach drei rechtwinkligen Axen geschätzten Componenten der Verschiebungen dieses Punktes und auch der Verschiebungen der anderen Punkte, entweder aller oder nur einiger derselben.

Gilt für diese Kräfte und die von ihnen erzeugte Bewegung das Princip der lebendigen Kraft, so gibt es eine Kraftfunction, welche nach den Componenten der Verschiebung eines beliebigen Punktes differenzirt, die Componenten der Resultirenden aller auf diesen Punkt wirkenden Kräfte liefert. Diese Kraftfunction ist eine homogene Function zweiten Grades der Componenten aller in dem System von n Punkten eingeleiteten Verschiebungen.

Werden diese Verschiebungscomponenten mit ξ_1, η_1, ζ_1 für den ersten Punkt, mit ξ_2, η_2, ζ_2 für den zweiten u. s. w. bezeichnet, so kann die Kraftfunction P dargestellt werden durch

$$\begin{aligned} P = & A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + \ldots \\ & + B_{11}\eta_1^2 + B_{22}\eta_2^2 + \ldots + 2B_{12}\eta_1\eta_2 + 2B_{13}\eta_1\eta_3 + \ldots \\ & + C_{11}\zeta_1^2 + C_{22}\zeta_2^2 + \ldots + 2C_{12}\zeta_1\zeta_2 + 2C_{13}\zeta_1\zeta_3 + \ldots \end{aligned} \quad (1)$$

worin die Coëfficienten A, B, C von den Verschiebungen unabhängige Grössen bezeichnen.

Sind m_1, m_2, m_3, . . die Massen der einzelnen Punkte, so sind

$$\begin{aligned} & m_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{dP}{d\xi_1}, \quad m_2 \frac{d^2\xi_2}{dt^2} = \frac{dP}{d\xi_2}, \ldots \\ & m_1 \frac{d^2\eta_1}{dt^2} = \frac{dP}{d\eta_1}, \quad m_2 \frac{d^2\eta_2}{dt^2} = \frac{dP}{d\eta_2}, \ldots \\ & m_1 \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \frac{dP}{d\zeta_1}, \quad m_2 \frac{d^2\zeta_2}{dt^2} = \frac{dP}{d\zeta_2}, \ldots \end{aligned} \quad (2)$$

die Bewegungsgleichungen des Systems.

Diesen Gleichungen genügen die speciellen Auflösungen

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_1 \cos \mu t\,, \quad \xi_2 = a_2 \cos \mu t\,, \ldots \\
\eta_1 &= b_1 \cos \mu t\,, \quad \eta_2 = b_2 \cos \mu t\,, \ldots \\
\zeta_1 &= c_1 \cos \mu t\,, \quad \zeta_2 = c_2 \cos \mu t\,, \ldots
\end{aligned} \tag{3}$$

unter der Bedingung, dass durch die Coëfficienten a, b, c und die Grösse μ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
-\mu^2 m_1 a_1 &= \frac{dP_0}{da_1}, \quad -\mu^2 m_2 a_2 = \frac{dP_0}{da_2}, \ldots \\
-\mu^2 m_1 b_1 &= \frac{dP_0}{db_1}, \quad -\mu^2 m_2 b_2 = \frac{dP_0}{db_2}, \ldots \\
-\mu^2 m_1 c_1 &= \frac{dP_0}{dc_1}, \quad -\mu^2 m_2 c_2 = \frac{dP_0}{dc_2}, \ldots
\end{aligned} \tag{4}$$

zu identischen werden. In diesen Gleichungen stellt P_0 den Ausdruck dar, in welchen P sich verwandelt, wenn darin die Variablen $\xi_1 \xi_2 \ldots \eta_1 \eta_2 \ldots \zeta_1 \zeta_2 \ldots$ ersetzt werden durch die Coëfficienten $a_1 a_2 \ldots b_1 b_2 \ldots c_1 c_2 \ldots$

Aus den Gleichungen (4) können die Verhältnisse von $3n-1$ der Coëfficienten a, b, c zu dem übrig bleibenden etwa a_1 bestimmt werden. Damit die $3n$ Gleichungen unter einander verträglich sind, muss die Gleichung, welche nach Elimination dieser $3n-1$ Verhältnisse übrig bleibt, eine identische, d. i. die Determinante der $3n$ linearen Gleichungen muss Null sein.

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von μ^2 und sie liefert für dieses $3n$ Werthe, welchen dann ebenso viele Systeme von particulären Auflösungen entsprechen. Das System (3) ist ein solches, wenn μ^2 eine Wurzel dieser Gleichung bezeichnet. Ist μ'^2 eine andere Wurzel, so sei das dieser Wurzel entsprechende Auflösungssystem

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_1' \cos \mu' t\,, \quad \xi_2 = a_2' \cos \mu' t\,, \ldots \\
\eta_1 &= b_1' \cos \mu' t\,, \quad \eta_2 = b_2' \cos \mu' t\,, \ldots \\
\zeta_1 &= c_1' \cos \mu' t\,, \quad \zeta_2 = c_2' \cos \mu' t\,, \ldots
\end{aligned} \tag{5}$$

und die Coëfficienten a', b', c' genügen den Gleichungen

$$-\mu'^2 m_1 a'_1 = \frac{dP'_0}{da'_1}, \quad -\mu'^2 m_2 a'_2 = \frac{dP'_0}{da'_2}, \ldots$$

$$-\mu'^2 m_1 b'_1 = \frac{dP'_0}{db'_1}, \quad -\mu'^2 m_2 b'_2 = \frac{dP'_0}{db'_2}, \ldots \qquad (6)$$

$$-\mu'^2 m_1 c'_1 = \frac{dP'_0}{dc'_1}, \quad -\mu'^2 m_2 c'_2 = \frac{dP'_0}{dc'_2}, \ldots$$

worin P'_0 den Ausdruck darstellt, in den sich P verwandelt, wenn darin die Variablen $\xi_1 \xi_2 \ldots \eta_1 \eta_2 \ldots \zeta_1 \zeta_2 \ldots$ ersetzt werden durch die Coëfficienten $a'_1 a'_2 \ldots b'_1 b'_2 \ldots c'_1 c'_2 \ldots$

Zwischen den Coëfficienten der beiden Auflösungssysteme (3) und (5) besteht eine Beziehung, welche man findet, wenn man die Gleichungen (4) der Reihe nach mit $a'_1 a'_2 \ldots b'_1 b'_2 \ldots c'_1 c'_2 \ldots$ multiplicirt und addirt, ebenso die Gleichungen (6) der Reihe nach mit $a_1 a_2 \ldots b_1 b_2 \ldots c_1 c_2 \ldots$ multiplicirt und addirt und dann die beiden Summen von einander subtrahirt. Das Resultat ist

$$(\mu'^2 - \mu^2)[m_1(a_1 a'_1 + b_1 b'_1 + c_1 c'_1) + m_2(a_2 a'_2 + b_2 b'_2 + c_2 c'_2) + \ldots]$$

$$= \frac{dP_0}{da_1} a'_1 + \frac{dP_0}{db_1} b'_1 + \frac{dP_0}{dc_1} c'_1 + \frac{dP_0}{da_2} a'_2 + \ldots$$

$$- \frac{dP'_0}{da'_1} a_1 - \frac{dP'_0}{db'_1} b_1 - \frac{dP'_0}{dc'_1} c_1 - \frac{dP'_0}{da'_2} a_2 - \ldots$$

Nach der durch die Formel (m) ausgedrückten Eigenschaft der homogenen Functionen zweiten Grades ist die zweite Seite dieser Gleichung Null, und da der Voraussetzung gemäss μ^2 und μ'^2 von einander verschieden sind, so muss

$$m_1(a_1 a'_1 + b_1 b'_1 + c_1 c'_1) + m_2(a_2 a'_2 + b_2 b'_2 + c_2 c'_2) + \ldots = 0 \qquad (7)$$

sein, und diese Relation gilt für je zwei beliebige Systeme der Coëfficienten a, b, c, welche zwei beliebigen Wurzeln der Gleichung für μ^2 entsprechen.

Aus dieser Gleichung (7) folgt bekanntlich, dass unter den Wurzeln μ^2, μ'^2, .. keine complexen sich befinden. Wären

solche vorhanden, so müsste die Gleichung (7) auch für je zwei solcher, also auch für die conjugirten Paare bestehen. Die den conjugirten Wurzeln entsprechenden Coëfficienten a, b, c sind aber dann ebenfalls zu einander conjugirt, und da das Product zweier solcher eine Summe von zwei Quadraten bildet, so verlangt dann die Gleichung (7) das Verschwinden einer Summe von Quadraten, welches Verlangen nur durch das Verschwinden jedes Gliedes befriedigt werden kann.

Aus den Gleichungen (4) lässt sich ferner auch beweisen, dass für den Fall der unendlich kleinen Schwingungen, welche die Punkte eines Systems um ihre Gleichgewichtslagen machen, die Wurzeln der Gleichung für μ^2 nur positiv, also alle Werthe von μ nur reell sein können.

Multiplicirt man nämlich die Gleichungen (4) der Reihe nach mit $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots c_1, c_2 \ldots$ und addirt sie sodann, so folgt

$$-\mu^2[m_1(a_1+b_1^2+c_1^2)+m_2(a_2^2+b_2^2+c_2^2)+\ldots]$$
$$=\frac{dP_0}{da_1}a_1+\frac{dP_0}{da_2}a_2+\frac{dP_0}{db_1}b_1+\ldots$$

Nach einer bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen zweiten Grades ist aber die zweite Seite dieser Gleichung $=2P_0$, also folgt

$$-\mu^2[m_1(a^2+b_1^2+c_1^2)+m_2(a_2^2+b_2^2+c_2^2)+\ldots]=2P_0 \qquad (8)$$

Die Function P bedeutet die Arbeit, welche die auf die einzelnen Punkte des Systems wirkenden Kräfte leisten, wenn die Punkte aus ihren Gleichgewichtslagen um $\xi_1\eta_1\zeta_1$, $\xi_2\eta_2\zeta_2\ldots$ verschoben werden. Diese Arbeit ist wesentlich negativ, es ist also auch in der Gleichung (8) P_0 eine negative Grösse, woraus weiter sich ergibt, dass μ^2 nur positiv sein kann.

An Stelle der Auflösungen (3) kann man auch das folgende System setzen:

$$\xi_1=A_1\sin\mu t\,,\quad \xi_2=A_2\sin\mu t\,,\ \ldots$$
$$\eta_1=B_1\sin\mu t\,,\quad \eta_2=B_2\sin\mu t\,,\ \ldots$$
$$\zeta_1=C_1\sin\mu t\,,\quad \zeta_2=C_2\sin\mu t\,,\ \ldots$$

und gilt für die Coëfficienten A, B, C alles in gleicher Weise wie für die Coëfficienten a, b, c, da sich erstere von diesen nur durch einen constanten Factor unterscheiden können. Denn das für diese Coëfficienten bestehende, den Gleichungen (4) analoge System führt zur selben Gleichung für μ^2, und liefert nach Einsetzung derselben Wurzel für die Verhältnisse der Coëfficienten A, B, C dieselben Werthe, wie für die Verhältnisse der a, b, c. Die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1(A_1A_1'+B_1B_1'+C_1C_1')+m_2(A_2A_2'+B_2B_2'+C_2C_2')+\ldots &= 0 \\ m_1(A_1a_1'+B_1b_1'+C_1c_1')+m_2(A_2a_2'+B_2b_2'+C_2c_2')+\ldots &= 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

sind also nur Wiederholungen der Gleichung (7).

Die allgemeinen Auflösungen der Gleichungen (2) sind die Summen aller particulären, können also in folgender Weise geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a_1\cos\mu t+A_1\sin\mu t+a_1'\cos\mu' t+A_1'\sin\mu' t+\ldots \\ \eta_1 &= b_1\cos\mu t+B_1\sin\mu t+b_1'\cos\mu' t+B_1'\sin\mu' t+\ldots \\ \zeta_1 &= c_1\cos\mu t+C_1\sin\mu t+c_1'\cos\mu' t+C_1'\sin\mu' t+\ldots \\ \xi_2 &= a_2\cos\mu t+A_2\sin\mu t+a_2'\cos\mu' t+A_2'\sin\mu' t+\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (10)$$

Differenzirt man diese Gleichungen nach t, quadrirt dann jede derselben, multiplicirt dann die drei Gleichungen für den ersten Punkt mit m_1, die drei für den zweiten mit m_2 u. s. w. und summirt, so hat man auf der ersten Seite

$$m_1\left[\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta_1}{dt}\right)^2\right]+m_2\left[\left(\frac{d\xi_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta_2}{dt}\right)^2\right]+\ldots$$

und auf der zweiten Seite bleiben nur die Quadrate der den einzelnen Wurzelwerthen von μ entsprechenden Glieder, welche die den elementaren Schwingungen entsprechenden Geschwindigkeiten darstellen; alle doppelten Producte der verschiedenen Wurzelwerthen μ, μ' . . . entsprechenden Glieder fallen in Folge der Gleichungen (7) und (9) hinweg.

Damit ist der Satz bewiesen, dass **die gesammte lebendige Kraft des Systems für jeden Augenblick gleich ist der Summe der lebendigen Kräfte, welche den einzelnen einfachen Schwingungen entsprechen.**

Was die Anwendung der Gleichung (7) zur Bestimmung der Coëfficienten a, b, c, A, B, C anbelangt, so ist schon bemerkt worden, dass durch die Gleichungen (4) die Verhältnisse zwischen diesen bestimmt sind. Man kann also

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 p, \quad a_2 = \alpha_2 p, \ldots \\ b_1 &= \beta_1 p, \quad b_2 = \beta_2 p, \ldots \\ c_1 &= \gamma_1 p, \quad c_2 = \gamma_2 p, \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

setzen, worin p eine willkürliche Constante bezeichnet, die Grössen α, β, γ aber alle vollständig bestimmt sind, sobald man einer von ihnen einen bestimmten übrigens beliebigen Werth gibt.

Denkt man sich statt der Wurzel μ^2 eine andere μ'^2 in die Gleichungen (4) gesetzt, so können die zugehörigen Coëfficienten

$$\begin{aligned} a'_1 &= \alpha'_1 p', \quad a'_2 = \alpha'_2 p', \ldots \\ b'_1 &= \beta'_1 p', \quad b'_2 = \beta'_2 p', \ldots \\ c'_1 &= \gamma'_1 p', \quad c'_2 = \gamma'_2 p', \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

gesetzt werden, worin p' wieder eine willkürliche Constante bezeichnet.

Führt man die Werthe (11) und (12) in die Gleichung (7) ein, so folgt

$$m_1(\alpha_1\alpha'_1+\beta_1\beta'_1+\gamma_1\gamma'_1)+m_2(\alpha_2\alpha'_2+\beta_2\beta'_2+\gamma_2\gamma'_2)+\ldots=0 \tag{13}$$

Analog den Gleichungen (11) und (12) hat man auch, wenn q und q' wieder arbiträre Constante bedeuten

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1 q, \quad A_2 = \alpha_2 q, \ldots A'_1 = \alpha'_1 q', \ldots \\ B_1 &= \beta_1 q, \quad B_2 = \beta_2 q, \ldots B'_1 = \beta'_1 q', \ldots \\ C_1 &= \gamma_1 q, \quad C_2 = \gamma_2 q, \ldots C' = \gamma'_1 q', \ldots \end{aligned}$$

Es können daher die allgemeinen Auflösungen (10) in folgende Form gebracht werden

$$
\left.
\begin{aligned}
\xi_1 &= \alpha_1(p\cos\mu t + q\sin\mu t) + \alpha'_1(p'\cos\mu' t + q'\sin\mu' t) + \ldots \\
\eta_1 &= \beta_1(p\cos\mu t + q\sin\mu t) + \beta'_1(p'\cos\mu' t + q'\sin\mu' t) + \ldots \\
\zeta_1 &= \gamma_1(p\cos\mu t + q\sin\mu t) + \gamma'_1(p'\cos\mu' t + q'\sin\mu' t) + \ldots \\
\xi_2 &= \alpha_2(p\cos\mu t + q\sin\mu t) + \alpha'_2(p'\cos\mu' t + q'\sin\mu' t) + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\} \quad (14)
$$

in welchen nur die Constanten $p,\ p',\ldots q,\ q',\ldots$ unbestimmt sind und aus den anfänglichen Verschiebungen und Geschwindigkeiten der Punkte gefunden werden können.

Sind z. B. für $t=0$ die Verschiebungen $\mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{z}_1,\ \mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{z}_2,\ldots$ gegeben, so folgt aus den Gleichungen (14)

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}_1 &= \alpha_1 p + \alpha'_1 p' + \ldots \\
\mathfrak{y}_1 &= \beta_1 p + \beta'_1 p' + \ldots \\
\mathfrak{z}_1 &= \gamma_1 p + \gamma'_1 p' + \ldots \\
\mathfrak{x}_2 &= \alpha_2 p + \alpha'_2 p' + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Um die Constante p zu finden, multiplicire man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ldots$ ausserdem die Gleichungen für den ersten Punkt noch mit m_1, die für den zweiten mit m_2 u. s. w., und addire nunmehr alle Gleichungen. Mit Rücksicht auf (13) erhält man

$$
\begin{aligned}
m_1(\alpha_1\mathfrak{x}_1 + \beta_1\mathfrak{y}_1 + \gamma_1\mathfrak{z}_1) &+ m_2(\alpha_2\mathfrak{x}_2 + \beta_2\mathfrak{y}_2 + \gamma_2\mathfrak{z}_2) + \ldots \\
&= p\,[m_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) + m_2(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) + \ldots]
\end{aligned}
$$

wodurch p bestimmt ist. In derselben Weise findet man $p',\ p''\ldots$ und aus den anfänglichen Geschwindigkeiten folgen in derselben Art die Constanten $q,\ q',\ q''\ldots$

Die Giltigkeit des Satzes von der lebendigen Kraft und der Methode der Constantenbestimmung ist bedingt durch die Gleichung (7) und diese durch die Form der Gleichungen (4). Es werden daher der Satz von der lebendigen Kraft und die

Methode der Constantenbestimmung auch dann noch gelten, wenn statt der Gleichungen (2) andere gegeben sind, wenn nur das Gleichungssystem, welches nach Substitution einer particulären Lösung aus den Differentialgleichungen sich ergibt, die Form der Gleichungen (4) besitzt.

Dies ist z. B. der Fall, wenn das System von Punkten in einem widerstehenden Mittel schwingt, sobald da der Widerstand, den jeder Punkt bei seiner Bewegung erfährt, mit der Geschwindigkeit und der Masse des Punktes in directem Verhältnisse steht und der Werth dieses Verhältnisses für alle Punkte derselbe ist. Bezeichnet man diesen Werth mit 2ν, so treten an Stelle der Gleichungen (2) die folgenden

$$\begin{aligned} m_1\left(\frac{d^2\xi_1}{dt^2}+2\nu\frac{d\xi_1}{dt}\right)&=\frac{dP}{d\xi_1},\\ m_2\left(\frac{d^2\xi_2}{dt^2}+2\nu\frac{d\xi_2}{dt}\right)&=\frac{dP}{d\xi_2},\\ &\dots\dots\dots\dots\\ m_1\left(\frac{d^2\eta_1}{dt^2}+2\nu\frac{d\eta_1}{dt}\right)&=\frac{dP}{d\eta_1},\\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \qquad (15)$$

Eine particuläre Lösung dieser Gleichungen bilden die Werthe

$$\begin{aligned} \xi_1&=a_1e^{-\nu t}\cos\mu t, & \xi_2&=a_2e^{-\nu t}\cos\mu t, \dots\\ \eta_1&=b_1e^{-\nu t}\cos\mu t, & \eta_2&=b_2e^{-\nu t}\cos\mu t, \dots\\ \zeta_1&=c_1e^{-\nu t}\cos\mu t, & \zeta_2&=c_2e^{-\nu t}\cos\mu t, \dots \end{aligned}$$

und die Gleichungen, welche man zur Bestimmung der Coëfficienten a, b, c erhält, unterscheiden sich von den Gleichungen (4) nur dadurch, dass sie $\mu^2+\nu^2$ an Stelle von μ^2 enthalten. Die Gleichung (7) lässt sich also für diesen Fall in derselben Art beweisen, wie für den früheren, und gelten also auch für diesen Fall alle aus dieser Gleichung gezogenen Consequenzen.

Die Gleichung (7) wird aber auch noch bestehen, wenn man statt der Gleichungen (15) solche statuirte, in denen keine zweiten Differentialquotienten der Verschiebungen nach t, son-

dern nur die ersten auftreten. Der Art sind die Gleichungen, zu denen die Theorie der Wärmeleitung führt; es ist also auch bei diesen dieselbe Methode der Constantenbestimmung anwendbar, und sie ist es auch noch für andere Gleichungen, welche andere Differentialquotienten nach t enthalten, aber denen unter (15) analog gebaut sind.

Bei den bisherigen Entwicklungen ist vorausgesetzt worden, dass die Gleichungen (4) ein derart zusammenhängendes System bilden, dass keine derselben oder keine Gruppe derselben nur solche Variable enthält, die in keiner anderen vorkommen. Tritt dieser Fall ein, so muss das Gleichungssystem (4) in die von einander unabhängigen Gruppen zertheilt werden. Es existirt dann für jede Gruppe eine gesonderte Bestimmungsgleichung für μ^2, aber es besteht dann auch für die Coëfficienten in jeder einzelnen dieser Gruppen die Gleichung (7), somit gilt auch der Satz von der lebendigen Kraft für jede Gruppe für sich und ebenso findet die Methode der Constantenbestimmung für jede einzelne Gruppe ihre separate Anwendung.

Dass dem so ist, folgt daraus, dass in einem solchen Falle auch die Kraftfunction P in Theile zerfällt, welche von einander unabhängig sind. Jeder Theil bildet wieder eine homogene Function zweiten Grades, welcher die durch die Gleichung (p) ausgedrückte Eigenschaft zukommt, so dass die Gleichung (7) für jede Gruppe von Coëfficienten einzeln gefolgert werden kann.

Am häufigsten tritt dieser Fall in der Weise ein, dass die Schwingungen in den drei auf einander senkrechten Richtungen von einander unabhängig vor sich gehen, die Kraftfunction also in drei Theile zerfällt, von denen einer nur von den Verschiebungen ξ, der andere von den Verschiebungen η, der dritte von den Verschiebungen ζ abhängig ist. Es zerfallen dann auch die Gleichungen (4) in drei solche Systeme, und an die Stelle der Gleichung (7) treten die drei folgenden

$$m_1 a_1 a_1' + m_2 a_2 a_2' + \ldots = 0$$

$$m_1 b_1 b_1' + m_2 b_2 b_2' + \ldots = 0$$

$$m_1 c_1 c_1' + m_2 c_2 c_2' + \ldots = 0$$

und gilt dies z. B. für die gleichzeitig stattfindenden longitudinalen und transversalen Schwingungen von Saiten und Stäben.

Zum Schlusse will ich noch das im Eingange von der Gleichung (l) behauptete nachweisen. Es genügt, einen speciellen Fall zu betrachten, da sich die Betrachtung des allgemeinen von der des speciellen nur durch die grössere Weitläufigkeit unterscheidet.

Es sei die Gleichung

$$\rho \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(L \frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(M \frac{du}{dx}\right) + Nu \tag{16}$$

gegeben, worin ρ, L, M, N Constante oder Functionen von x sein können. Sind

$$U \cos \mu t \quad \text{und} \quad U' \cos \mu' t$$

zwei particuläre Integrale dieser Gleichung, so genügen U und U' den beiden folgenden

$$-\mu^2 \rho U = \frac{d^2}{dx^2}\left(L \frac{d^2U}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(M \frac{dU}{dx}\right) + NU$$

$$-\mu'^2 \rho U' = \frac{d^2}{dx^2}\left(L \frac{d^2U'}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(M \frac{dU'}{dx}\right) + NU' \quad .$$

Multiplicirt man die erste dieser zwei Gleichungen mit $U'dx$, die zweite mit Udx, bildet von diesen Producten die Differenz und integrirt diese von 0 bis l, so folgt

$$\begin{aligned}(\mu'^2 - \mu^2) \int_0^l \rho U U' dx = & \int_0^l \left[U' \frac{d^2}{dx^2}\left(L \frac{d^2U}{dx^2}\right) - U \frac{d^2}{dx^2}\left(L \frac{d^2U'}{dx^2}\right)\right] dx \\ & + \int_0^l \left[U' \frac{d}{dx}\left(M \frac{dU}{dx}\right) - U \frac{d}{dx}\left(M \frac{dU'}{dx}\right)\right] dx \end{aligned} \tag{17}$$

Die beiden Integrale rechts vom Gleichheitszeichen lassen sich wirklich auswerthen. Nach zweimaliger partieller Integra-

tion des ersten und einmaliger des zweiten erhält man für dieselben den Ausdruck

$$\begin{aligned} & U'\frac{d}{dx}\left(L\frac{d^2U}{dx^2}\right)-\frac{dU'}{dx}L\frac{d^2U}{dx^2}+U'M\frac{dU}{dx} \\ & -U\frac{d}{dx}\left(L\frac{d^2U'}{dx^2}\right)+\frac{dU}{dx}L\frac{d^2U'}{dx^2}-UM\frac{dU'}{dx} \end{aligned} \qquad (18)$$

in welchem zuerst $x=l$, dann $x=0$ zu setzen und das zweite Substitutionsresultat von dem ersten zu subtrahiren ist. Sind die Bedingungen für die Grenzen $x=0$ und $x=l$ so beschaffen, dass der Ausdruck $(18)=0$ wird, so wird auch der erste Theil der Gleichung $(17)=0$ und somit

$$\int_0^l \rho UU'\,dx=0 \qquad (19)$$

wenn μ und μ' von einander verschieden sind.

Es gibt nun drei Paare von Grenzbedingungen, von welchen jedes die Eigenschaft hat, sowohl die erste wie die zweite Reihe des Ausdruckes für sich verschwinden zu machen. Sie sind

$$u=0,\quad \frac{du}{dx}=0 \qquad (20)$$

$$u=0,\quad \frac{d^2u}{dx^2}=0 \qquad (21)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0,\quad L\frac{d^3u}{dx^3}+M\frac{du}{dx}=0 \qquad (22)$$

Diese Grenzbedingungen stehen zugleich in einem organischen Zusammenhange mit der Differentialgleichung (16). Dieser Zusammenhang wird am einfachsten klar, wenn man von der Gleichung (16) auf das System gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches sie repräsentirt, oder auf die homogene Function zweiten Grades, aus welcher dieses System abgeleitet werden kann, zurückgeht.

Theilt man die Variable x in eine sehr grosse Anzahl n unendlich kleiner Theile α, so dass $x = n\alpha$, bezeichnet mit u_n den Werth von u für dieses bestimmte $x = n\alpha$, mit u_{n-1}, u_{n+1}, u_{n-2}, u_{n+2}, ... die Werthe von u für $x = (n-1)\alpha$, $(n+1)\alpha$, $(n-2)\alpha$, $(n+2)\alpha$,... führt ferner die Bezeichnungen L_n, L_{n-1}, L_{n+1}, ... M_n, M_{n-1}, M_{n+1}, ... N_n, N_{n-1}, N_{n+1}, ... mit den analogen Bedeutungen ein, so kann man diese homogene Function darstellen durch

$$\begin{array}{lll} & P = & \\ + \ldots\ldots\ldots & - \ldots\ldots\ldots & + \ldots \\ + \frac{L_{n+1}}{2\alpha^3}(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)^2 & - \frac{M_{n+1}}{2\alpha}(u_{n+1} - u_n)^2 & + \frac{N_n \alpha u_n^2}{2} \\ + \frac{L_n}{2\alpha^3}(u_{n+1} - 2u + u_{n+1})^2 & - \frac{M_n}{2\alpha}(u_n - u_{n-1})^2 & + \ldots \\ + \frac{L_{n-1}}{2\alpha^3}(u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2})^2 & - \ldots\ldots\ldots & + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots & - \ldots\ldots\ldots & + \ldots \end{array} \qquad (23)$$

Aus dieser folgt z. B. die Gleichung für das $n$te Element, wenn m_n die Masse dieses Elementes ist,

$$m_n \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{dP}{du_n} \qquad (24)$$

Dividirt man diese Gleichung durch α, so ist die Grenze, welcher diese Gleichung bei unendlich abnehmendem α sich nähert, die Gleichung (16), da $\frac{m_n}{\alpha}$ die in (16) mit ρ bezeichnete Masse eines Elementes, reducirt auf die Einheit der Länge, bedeutet.

Aus dem Baue der Function P geht hervor, dass in die Gleichung (24) für u_n die Werthe von u für die zwei vorhergehenden und auch für die zwei nachfolgenden Elemente eingehen. Bildet nun das $n$te die Grenze der Elementenreihe, so kann P die mit L_{n+1}, L_n, M_{n+1} multiplicirten Glieder nicht enthalten, das durch die Gleichung (24) charakterisirte Gleichungs-

system lässt sich also nur bis zum $(n-2)$ten Elemente in der Gleichung (16) entsprechenden Form aufstellen. Diese Gleichung (16) ist dann nur bis zum $(n-2)$ten Elemente giltig, und genügt diese Ausdehnung der Giltigkeit zur Bestimmung der verschiedenen u, wenn die Werthe u_n und u_{n-1} unmittelbar gegeben sind.

Sind aber u_n und u_{n-1} nicht gegeben, so kann die Gleichung (16) auch für die beiden letzten Elemente giltig gemacht werden, wenn man die aus der Function P sich ergebenden unvollständigen Gleichungen für u_n und u_{n-1} in der Art ergänzt, dass diese Gleichungen die der Gleichung (16) entsprechende Form annehmen, und diese Ergänzung ist immer gestattet, sobald die ergänzenden Glieder für sich $=0$ sind.

Es gibt nun drei Fälle. Der erste Fall ist jener, dass u_n und u_{n-1} unmittelbar gegeben sind, z. B. durch

$$u_n = 0, \quad u_{n-1} = 0$$

welche zwei Annahmen gleichbedeutend sind mit den Grenzbedingungen (20). Es können natürlich u_n und u_{n-1} auch durch andere Werthe, z. B. als Functionen von t gegeben sein, in welchem Falle aber der Ausdruck (18) für diese Grenze des Systems nicht mehr verschwindet.

Der zweite Fall ist der, dass

$$u_n = 0$$

hingegen u_{n-1} nicht gegeben ist. Der aus P abgeleiteten Gleichung für u_{n-1} mangelt zur Vollständigkeit das mit L_n multiplicirte Glied

$$\frac{L_n}{\alpha^3}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

und kann dieses zu den anderen hinzugefügt werden, sobald es $=0$ ist. Es kommt also zu $u_n = 0$ noch die Bedingung, dass

$$\frac{L_n}{\alpha^3}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = \frac{L_n}{\alpha}\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

hinzu und diese zwei sind gleichbedeutend mit den Grenzbedingungen (21).

Sind endlich u_n und u_{n-1} zugleich nicht gegeben, so muss die aus P folgende Gleichung für u_n ergänzt werden durch

$$\frac{L_{n+1}}{\alpha^3}(u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n)-\frac{2L_n}{\alpha^3}(u_{n+1}-2u_n+u_{n-1})$$
$$+\frac{M_{n+1}}{\alpha}(u_{n+1}-u_n)$$

und die Gleichung für u_{n-1} wie vorhin durch

$$\frac{L_n}{\alpha^3}(u_{n+1}-2u_n+u_{n-1})$$

und die Forderung, dass diese zwei Ergänzungen verschwinden, ist gleichbedeutend mit den Grenzbedingungen (22).

Die betrachteten drei Paare von Grenzbedingungen kann man auch in eines zusammenfassen. Bezeichnet man mit Q das Aggregat der Glieder, welche in P fehlen, sobald das $n$te Element das letzte ist, setzt also

$$Q=\frac{L_{n+1}}{2\alpha^3}(u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n)^2$$
$$+\frac{L_n}{2\alpha^3}(u_{n+1}-2u_n+u_{n-1})^2-\frac{M_{n+1}}{2\alpha}(u_{n+1}-u_n)^2 \qquad (25)$$

so folgen die Gleichungen (20), (21), (22) aus den zwei folgenden

$$\frac{dQ}{du_{n-1}}=0,\quad \frac{dQ}{du_n}=0 \qquad (26)$$

Diese zwei Gleichungen drücken zunächst die Grenzbedingungen (22) aus. Sie sind aber auch noch erfüllt, wenn in Q sowohl $u_n=0$ als auch $u_{n-1}=0$ gesetzt wird, es sind dies die Grenzbedingungen (20). Endlich sind sie auch erfüllt, wenn in Q nur $u_n=0$ gesetzt und dann noch $\frac{dQ}{du_{n-1}}=0$ angenommen wird, dies ist der Fall der Grenzbedingungen (21).

Ausser den Bedingungen (20), (21), (22) gibt es noch andere, für welche der Ausdruck (18) verschwindet. Statt der Gleichungen (21), (22) kann man auch die allgemeineren

$$u = 0, \quad L\frac{d^2u}{dx^2} = K\frac{du}{dx}$$

$$L\frac{d^2u}{dx^2} = K\frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx}\left(L\frac{d^2u}{dx^2}\right) + M\frac{du}{dx} = Hu \tag{27}$$

schreiben, worin H und K beliebige Werthe haben können, und gehen diese Gleichungen in die früheren über, wenn $H = K = 0$ gesetzt wird.

Diese neuen allgemeineren Bedingungen folgen in derselben Weise wie die früheren aus der Function P, wenn diese ausser den in (23) enthaltenen für alle Elemente durch dasselbe Gesetz gegebenen Gliedern noch specielle nur für das $n$te und $(n-1)$te giltige und zwar die beiden

$$-\frac{H}{2}u_n^2 + \frac{K}{2\alpha^2}(u_n - u_{n-1})^2 = R$$

enthält.

Die daraus resultirenden Bedingungen lassen sich wieder wie die früheren durch zwei Gleichungen darstellen, nämlich durch

$$\frac{d(Q+R)}{du_{n-1}} = 0, \quad \frac{d(Q+R)}{du_n} = 0$$

welche zunächst das zweite Paar der Gleichungen (27) darstellen, sie geben das erste Paar, wenn in $Q + R$ $u_n = 0$ gesetzt wird.

XX. SITZUNG VOM 18. JULI 1872.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Über Kieselsäurehydrate", vom Herrn Prof. Dr. J. Gottlieb in Graz.

„Untersuchungen aus Prof. Lieben's Laboratorium an der k. k. Universität zu Prag, und zwar:

1. „Berichtigung einiger falscher Angaben über Entstehung von Chloroform", vom Herrn Ag. Bělohoubek;
2. „Analyse eines als Hüttenproduct erhaltenen Magneteisensteins", vom Herrn Ottomar Völker;
3. „Analyse eines neuen Minerals, des Syngenits aus Kalusz", von demselben;
4. „Analyse des Epidots aus dem Untersulzbachthale in Salzburg", vom Herrn Franz Kottal.

Herr Hauptmann J. Gleissner zu M.-Weisskirchen berichtet mit Schreiben vom 21. Juni über einen an einem gemeinen Hasen *(Lepus timidus)* beobachteten Defect des Gehörorgans.

Herr Director Dr. J. Stefan legt eine Abhandlung des Herrn Dr. L. Boltzmann in Graz: „Über das Wirkungsgesetz der Molecularkräfte" vor.

Der klinische Vorstand, Herr Dr. L. v. Schrötter überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Beobachtungen über Bewegung der Trachea und der grossen Bronchien mittelst des Kehlkopfspiegels".

Der Generalsecretär A. v. Schrötter legt einen Nachtrag zu der in der Sitzung vom 16. Mai gemachten Mittheilung über ein zweckmässiges Verfahren zur Gewinnung des Tellurs aus der Tellurschliche von Nagyág vor.

In der Gesammtsitzung am 20. Juli wurden folgende eingesendete Abhandlungen vorgelegt:

„Studien zur Physiologie des Herzens und der Blutgefässe. II. Abhandlung: „Uber reflectorische Beziehungen des Magens zu den Innervationscentren für die Kreislauforgane“, von den Herren Dr. Sigm. Mayer und Dr. Alfr. Přibram, Privatdocenten in Prag.

„Beobachtungen und Reflexionen über den Bau und die Verrichtungen des sympathischen Nervensystems“, vom Herrn Dr. Sigm. Mayer.

„Über den Einfluss des Halsmarkes auf die Schlagzahl des Herzens“, vom Herrn Dr. Philipp Knoll, Privatdocenten in Prag.

„Über die Veränderungen des Herzschlages bei reflectorischer Erregung des vasomotorischen Nervensystems, sowie bei Steigerung des intracardialen Druckes überhaupt“, von demselben.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie, Südslavische, der Künste und Wissenschaften: Rad. Knjiga XX. U Zagrebu, 1872; 8⁰. — *Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium. Vol. III.* U Zagrebu, 1872; 8⁰.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrgang, Nr. 20. Wien, 1872; 8⁰.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome XLIV', Nr. 174. Genève, Lausanne & Paris, 1872; 8⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXV, Nr. 1. Paris, 1872; 4⁰.

Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. Neuere Zeit. XI. Bd. Geschichte der Technologie von Karl Karmarsch. München, 1872; 8⁰.

Gesellschaft, geographische, in Wien: Mittheilungen. Bd. XV (neuer Folge V). Nr. 6. Wien, 1872; 8⁰.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band V, 10. Heft. Leipzig, 1872; 8⁰.

Loisel, Achille, Procédé appliqué pour remédier au bégaiement et à tous vices de prononciation. Rouen, 1872; 8⁰.

Lotos. XXII. Jahrgang. Juni 1872. Prag; 8⁰.

Nature. Nr. 141, Vol. VI. London, 1872; 4°.

Peabody Institute: Fifth Annual Report. Juni 6. 1872. Baltimore; 8°.

„Revue politique et littéraire" et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger". IIe Année (2e Série), Nr. 2. Paris & Bruxelles 1872; 4°.

Société Impériale des Naturalistes de Moscou: Bulletin. Année 1872. Tome XLV, Nr. 1. Moscou; 8°.

— Botanique de France: Bulletin. Tome XVIIIe (1871). Comptes rendus 3; Revue bibliographique. D. Paris; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 28. Wien, 1872; 4°.

Untersuchungen aus Prof. Lieben's Laboratorium an der k. k. Universität zu Prag.

1. Berichtigung einiger falscher Angaben über Entstehung von Chloroform.

Von **Ag. Belohoubek.**

Bekanntlich hat Prof. Lieben vor einiger Zeit nachgewiesen [1], dass reiner Methylalkohol, reine Essigsäure etc. mit Jod und Kali behandelt kein Jodoform liefern, während Äthylalkohol, Aldehyd, Aceton etc. unter solchen Umständen Jodoform geben. Es lag nun der Gedanke nahe, dass dieselben Körper, welche die Jodoformreaction zeigen, bei Behandlung mit Chlorkalk Chloroform liefern würden, dagegen jene, welche sie nicht zeigen, auch zur parallelen Reaction nicht geeignet seien, dass man sich also der Jodoformreaction bedienen könne, um zu beurtheilen, ob irgend eine Substanz zur Bereitung von Chloroform verwendbar sei oder nicht.

Mit diesen Voraussetzungen im directen Widerspruch stand jedoch die in allen Handbüchern verbreitete und vielfach durch die Praxis bestätigte Angabe, dass Methylalkohol mit Chlorkalk behandelt Chloroform liefert, ja sogar als wohlfeiles Material zur Darstellung von Chloroform in grossem Massstabe gelegentlich angewandt worden ist. Prof. Lieben forderte mich daher auf zu untersuchen, ob die Substanzen, welche nicht die Jodoformreaction zeigen, trotzdem bei Behandlung mit Chlorkalk Chloroform geben können, und speciell, ob dies auch bei reinem, aus Methyloxalat bereitetem Methylalkohol der Fall sei.

---

[1] Annalen der Chemie und Pharmacie, 7. Suppl. S. 218 und 377.

Die Angabe, dass Chloroform durch Behandlung mit Chlorkalk aus Methylalkohol erhalten wird, rührt ursprünglich von Dumas und Peligot[1] her; allein in diesem Falle war trotz der Verlässlichkeit dieser ausgezeichneten Chemiker insofern ein Zweifel möglich, als man in jener Zeit noch gar nicht mit der Schwierigkeit bekannt war, sich reinen Methylalkohol zu verschaffen, noch mit den Methoden, dies zu erreichen oder die Reinheit des Productes zu prüfen. Ich fing also damit an, reinen Methylalkohol aus Methyloxalat darzustellen, und, nachdem ich mich überzeugt hatte, dass derselbe nur eine äusserst schwache Jodoformreaction (die einer Spur noch immer anhängender Verunreinigung zuzuschreiben ist) gab, die Einwirkung von Chlorkalk darauf zu untersuchen. Für diesen Zweck hatte ich und auch mein College Nevole im hiesigen Laboratorium schon vorher eine Anzahl Versuche über die Einwirkung von Chlorkalk auf Äthylalkohol angestellt, um die zweckmässigste Art, Chloroform im kleinen darzustellen und zugleich die Ausbeute, die sich dabei erzielen lässt, kennen zu lernen. Bei Anwendung von 430 Gr. Chlorkalk (23·4$^0/_0$), Zusatz von 100 Grm. Kalk und 1·5 Liter Wasser wurden im Durchschnitt aus 100 CC. Äthylalkohol von 88$^1/_2$$^0/_0$, die für jede einzelne Operation verwendet wurden, 31 Gr. Chloroform erhalten. Bei Arbeiten im grossen oder bei successiven Operationen, wo die noch Chloroform und Alkohol enthaltenden Destillate, die nach dem Chloroform übergehen, wieder neuerdings verarbeitet werden, lassen sich noch günstigere Resultate erzielen, doch kam dies für den vorliegenden Zweck nicht in Betracht.

Als 100 CC. eines durch Kochen mit Kalilauge, dann Behandeln mit Kalk gereinigten Holzgeistes in derselben Weise wie oben der Äthylalkohol mit Chlorkalk behandelt wurden, erhielt man 29 Grm. Chloroform. An der Thatsache, dass auf gewöhnliche Weise gereinigter Holzgeist Chloroform liefert, und zwar ungefähr ebenso wie Äthylalkohol, konnte also gar kein Zweifel sein.

Es wurden nun 100 CC. des reinen, aus dem Oxalat dargestellten, nur etwas wasserhaltigen Methylalkohols mit 430 Gr.

---

[1] Annalen der Pharmacie, Bd. 15, S. 9.

Chlorkalk, 100 Grm. Ätzkalk, 1500 CC. Wasser — ein zweites Mal 430 Grm. Chlorkalk, 215 Grm. Ätzkalk, 100 CC. Methylalkohol (wie oben) und 1500 CC. Wasser der Destillation unterworfen.

Das Product der ersten Destillation verhielt sich dem der zweiten bis auf den Geruch gleich, der im ersten Falle eine grössere Menge Chlor verrieth. Diesem Befunde conform verhielt sich auch der Destillationsrückstand. Die Ursache der Verschiedenheit ist einzig und allein der in der zweiten Operation vermehrten Kalkmenge zuzuschreiben. Beide Destillate wurden gemischt, mit Pottasche versetzt, und die sich oberhalb der Pottaschelösung abscheidende, specifisch leichtere Flüssigkeit abgehoben und destillirt.

Diese Flüssigkeit, wie auch das ursprüngliche Destillat, besass nicht im geringsten den Geruch oder Geschmack von Chloroform. Mit Kalk entwässert kochte die Flüssigkeit bei 65—65·5° C., schmeckte alkoholisch feurig, mischte sich ohne Trübung mit Wasser in jedem Verhältniss und bestand also ohne Zweifel aus unverändertem Methylalkohol. Beim Verbrennen einiger Tropfen dieser Flüssigkeit war eine grüne Randfärbung der Flamme nicht sichtbar, die Flüssigkeit verbrannte rasch und leicht ohne zu russen. Eine weitere qualitative Prüfung auf Chlor blieb ohne Erfolg. Es lag also kein Chloroform vor und somit ist erwiesen, dass reiner Methylalkohol, der die Jodoformreaction nicht zeigt, bei Behandlung mit Chlorkalk auch kein Chloroform gibt. Der gewöhnliche Methylalkohol liefert Chloroform nur in Folge von Verunreinigungen (Aceton, Äthylalkohol, etc.)

An die vorstehende Untersuchung schloss sich naturgemäss noch eine zweite, nämlich die Prüfung der Einwirkung von Chlorkalk auf Methyloxalat. Man musste zwar nach Vorstehendem für sehr wahrscheinlich halten, dass auch in diesem Falle kein Chloroform entstehen würde, aber eine experimentelle Prüfung erschien doch noch erforderlich, nachdem die bestimmte Angabe von Schlagdenhauffen[1] vorliegt, dass eine Anzahl von Methylätherarten, worunter auch Methyloxalat genannt ist, bei Behandlung mit Chlorkalk und Kalk in Gegenwart von Wasser

[1] Jahresbericht der Chemie f. 1859, S. 448.



Chloroform liefern. Es wurden zwei Operationen gemacht, indem einmal Methyloxalat 45 Grm., Chlorkalk 110 Grm., Wasser 320 CC. — ein anderes Mal Methyloxalat 44 Grm., Chlorkalk 110 Grm., Ätzkalk 30 Grm., Wasser 320 CC., für sich destillirt wurden. Bei der ersten Operation entwickelte sich eine beträchtliche Menge Chlor. Die beiden Destillate trübten sich beim Vermischen mit Wasser nicht und schieden keine specifisch schwerere Schicht ab. Beide Flüssigkeiten wurden nun vereinigt mit Pottasche versetzt, die alkoholische Schicht abgeschieden, getrocknet und destillirt. Der Siedepunkt der Flüssigkeit lag bei 65° C.

Die Flüssigkeit mischte sich wiederum mit Wasser in jedem Verhältniss, ein Chlorgehalt liess sich nicht nachweisen, und folglich bestand sie auch nicht aus Chloroform, sondern höchst wahrscheinlich aus Methylalkohol. Die Rückstände bei den ursprünglichen Destillationen enthielten viel oxalsauren Kalk.

Unter den Körpern, welche mit Chlorkalk nach den vorhandenen Angaben Chloroform liefern, erschien noch besonders auffallend die Essigsäure, deren Salze nach Bonnet[1] bei solcher Behandlung Chloroform liefern sollen.

Es ist klar, dass essigsaure Salze mit Chlorkalk zusammen bei Ausschluss von Wasser der trockenen Destillation unterworfen, Chloroform liefern müssen, weil nothwendiger Weise dabei Aceton entsteht, an dessen Umsetzung zu Chloroform durch Chlorkalk gar kein Zweifel bestehen kann. In der That hat ja Lieben gefunden, dass Aceton mit Jod und Kali sehr reichlich Jodoform gibt. Es war daher für den hier verfolgten Zweck nur von Interesse zu erforschen, ob essigsaure Salze mit Chlorkalk bei Gegenwart von Wasser der Destillation unterworfen, Chloroform geben, denn dies würde im Widerspruche mit der Beobachtung stehen, dass die Acetate mit Jod und Kali kein Jodoform geben. Ich stellte nun zwei Versuche mit essigsaurem Natron an, welches bei der Prüfung die Jodoformreaction nicht gab. Beim ersten Versuche mischte ich 130 Grm. essigsaures Natron, 435 Grm. Chlorkalk und 1500 CC. Wasser, — beim zweiten Versuch 65 Grm. essigsaures Natron, 220 Grm. Chlorkalk,

---

[1] J. pr. Chem. 10, 207.

50 Grm. Ätzkalk und 1200 CC. Wasser, und erhitzte wie immer anfangs im Wasser- schliesslich im Sandbade.

Die Destillation war wegen steten Schäumens eine recht beschwerliche. Immerhin erhielt ich mehrere Gramme einer Flüssigkeit, die sich mit Wasser ohne Trübung mischte und nicht brennbar war, daher offenbar kein Chloroform enthielt.

Nach diesen Beobachtungen über Einwirkung von Chlorkalk auf Methylalkohol, Methyloxalat und Essigsäure darf man es als sehr wahrscheinlich betrachten, dass diejenigen Körper, welche die Jodoformreaction nicht geben, auch nicht im Stande sind, Chloroform bei der Behandlung mit Chlorkalk zu liefern.

Ich schliesse diese kleine Arbeit, indem ich Herrn Professor Lieben für seinen freundlichen Rath und für seine Unterstützung bei Ausführung der vorliegenden Untersuchungen meinen Dank ausspreche.

---

2. Analyse eines als Hüttenproduct erhaltenen Magneteisensteines.

Von **Ottomar Völker.**

Herr Professor Lieben überliess mir ein aus der Hütte zu Prevali in Kärnthen stammendes Mineral (dem Anscheine nach Magneteisenstein) zur Untersuchung, welches ihm Herr Obergrath v. Zepharovich übergeben hatte. Dasselbe war in einer Kluft des aus Quarz und Thon hergestellten Bodensteines des Coakhochofens von Prevali gefunden worden und hatte sich ohne Zweifel dort gebildet. Es bestand aus stahlgrauen, innig mit einander verwachsenen schönen Krystallen, welche, da stets nur einzelne Flächen der Beobachtung zugänglich waren, einer sicheren krystallographischen Deutung grosse Schwierigkeiten boten.

Es zeigte sich stark magnetisch. Sein spec. Gewicht $= 5 \cdot 63$. Die qualitative Untersuchung des Minerals, das gepulvert sammtschwarz erschien, ergab neben Eisenoxydul und Eisenoxyd Spuren von Mangan; auch blieben leichte grauweisse Flocken (wohl Kieselsäure oder Silicat) beim Auflösen in Säure zurück, doch nur in so äusserst geringer Menge, dass sie nicht näher untersucht werden konnten.

Quantitativ bestimmte man die Bestandtheile folgendermassen. Das Pulver wurde durch längere Zeit behufs der Entfernung von hygroskopischem Wasser bis zur constanten Wägung im Exsiccator über Schwefelsäure aufbewahrt. Dann übertrug man 0·1166 Gr. der Substanz in einen getrockneten Kolben, der sowohl vor als während der Operation zur Entfernung und Abhaltung atmosphärischer Luft mit Kohlendioxyd gefüllt erhalten wurde.

Hier wurde das Mineral unter gelindem Erwärmen in Chlorwasserstoffsäure gelöst, die Lösung nach dem Erkalten in ein

Becherglas gebracht, worin sich durch Schwefelsäure schwach angesäuertes destillirtes Wasser befand und mittelst Chamäleonlösung titrirt. In den angewandten 0·1166 Gr. des Magneteisensteines wurde 0·072398 Fe, entsprechend 0·093083 FeO gefunden, woraus man 62·09 % Eisen oder 79·83 % Eisenoxydul berechnet.

In derselben Flüssigkeit ermittelte man ferner noch die Gesammtmenge des im Minerale enthaltenen Eisens in der Art, dass nach vollständiger Entfärbung derselben das Eisen in Form basisch essigsauren Salzes ausgefällt wurde. Man fand 0·127 Gr. Eisenoxyd entsprechend 0·0889 Fe oder 76·243 % Eisen.

Um nun die Menge des in dem Magneteisen enthaltenen Eisensesquioxydes auf eine directere Weise als blos durch die Differenz der eben mitgetheilten Daten zu ermitteln, und zugleich um eine Controlle zu erlangen, wurde eine andere Partie des Minerales in einem verschlossenen Fläschchen mit Chlorwasserstoffsäure und Jodkalium im Wasserbade erwärmt. Dabei erfolgt bekanntlich die Reaction nach folgender Gleichung:

$$Fe_2O_3 + 6HCl + 6KJ = 2FeJ_2 + 3H_2O + 6KCl + 2J,$$

während das vorhandene Eisenoxydul keinen störenden Einfluss ausübt. Darnach entsprechen je 2J einem Fe_2O_3; man braucht daher nur die Menge des ausgeschiedenen Jodes zu ermitteln, um den Gehalt an Eisensesquioxyd kennen zu lernen. Es wurde Bunsen's treffliche Methode der Jodbestimmung angewendet, indem zu der erhaltenen Lösung von ausgeschiedenem Jod im Jodkalium so viele Flaschen einer verdünnten wässerigen Lösung von Schwefeldioxyd gefügt wurden, bis vollständige Entfärbung eintrat. Die Beziehung jedoch eines Fläschchens der Schwefeldioxydlösung zu einer Jodlösung von bekanntem Gehalte war bereits vor dem Versuche festgestellt worden.

Um den Überschuss zugesetzten Schwefeldioxyds zu erfahren, versetzte man obige entfärbte Flüssigkeit mit verdünntem Stärkekleister und titrirte mit der Jodlösung von bekanntem Gehalte zurück.

0·3367 Gr. des Magneteisensteins schieden bei dem obigen Verfahren 0·1074785 Gr. Jod aus, entsprechend 0·0677029 Eisensesquioxyd oder 20·107 %, das gleichkommt 14·074 % Eisen.

Zusammengestellte Resultate:

Gefundene Gesammtmenge des Eisens . . . . . 76·243%.

Berechnete Menge des Eisens:

aus Eisenoxydul	62·091%	
aus Eisenoxyd	14·074%	76·165%
	Differenz . .	0·078%.

Der Magneteisenstein besitzt daher die Zusammensetzung:

79·831%	FeO	oder	76·2% Fe
20·107	Fe_2O_3		23·8% O
99·938			100·0

Das Vorkommen von krystallisirtem Magneteisenstein als Eisenhüttenproduct ist bereits bekannt und mehrfach erwähnt worden. Es scheint jedoch, dass seine Zusammensetzung, in den Fällen, wo sie überhaupt ermittelt wurde, mit derjenigen des natürlichen Minerals, d. h. mit der Formel Fe_3O_4 übereinstimmte. Das vorliegende, von H. Völker analysirte künstliche Mineral weicht dagegen von den beiden als selbstständig existirend angenommenen Eisenoxyduloxyden, nämlich von dem gewöhnlichen Magneteisen Fe_3O_4 = FeO, Fe_2O_3 und von dem Hammerschlag $Fe_8O_9 = (FeO)_6 Fe_2O_3$ (von einigen Chemikern wird die Formel $Fe_6O_7 = (FeO)_4 Fe_2O_3$ angenommen) in seiner Zusammensetzung beträchtlich ab. Auch ist das spec. Gewicht höher, was sich durch den grösseren Eisengehalt erklärt.

Der gefundenen Zusammensetzung entspricht die Formel $Fe_{11}O_{12} = (FeO)_9 Fe_2O_3$, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

	Berechnet	Gefunden
9FeO	80·2	79·83
Fe_2O_3	19·8	20·11
	100·0	99·94

Die Constitution dieses Körpers lässt sich, wie mir scheint, durch das folgende Schema verdeutlichen

```
          / O — Fe — O >
         /  O — Fe — O >  Fe
  VI    /   O — Fe — O >
 (Fe2)  —   O — Fe — O >  Fe
        \   O — Fe — O >
         \  O — Fe — O >  Fe.
```

Diese Formel erscheint freilich etwas complicirt; aber man kann anderseits das untersuchte wohlkrystallisirte Mineral unmöglich für ein

blosses Gemenge halten und man wird sich überhaupt allmälig an den Gedanken gewöhnen müssen, dass die unorganischen Verbindungen wie die organischen gelegentlich complicirte Formeln haben. Ein sehr evidentes Beispiel dafür liefern die Silicate.

Die Constitution des gewöhnlichen Magneteisens und des Hammerschlages, wofern letzterer überhaupt eine bestimmte Verbindung und nicht ein Gemenge ist, lässt sich ähnlich wie oben in folgender Weise deuten:

Magneteisen

$$\overset{VI}{(Fe_2)} \begin{array}{l} = O \\ = O \\ - O \\ - O \end{array} \!\!\begin{array}{l} \\ \\ \big> Fe \end{array}$$

Hammerschlag

$$\overset{VI}{(Fe_2)} \begin{array}{l} - O - Fe \\ - O - Fe \\ - O - Fe \\ - O - Fe \\ - O - Fe \\ - O - Fe \end{array} \begin{array}{l} \big> O \\ \big> O \\ \big> O \end{array}$$

Ad. Lieben.

3. Analyse eines neuen Minerales des Syngenites aus Kalusz.

Von **Ottomar Völker.**

Auf Sylvin-Drusen von Kalusz (Galizien) hat Herr Obergrath v. Zepharovich schöne Krystalle eines Minerals gefunden, das man für Polyhalit halten konnte, das aber, wie die folgende Analyse zeigte, eine andere Zusammensetzung besitzt und daher als ein neues Mineral zu betrachten ist.

Zepharovich hat ihm den Namen Syngenit beigelegt und im Junihefte der Zeitschrift „Lotos" 1872, pag. 137 eine Notiz darüber veröffentlicht, worin namentlich die physikalischen und krystallographischen Eigenschaften des neuen Minerales beschrieben werden.

Ich beschränke mich daher hier nur auf Mittheilung der Analyse, die ich auf Veranlassung Prof. Lieben's in dessen Laboratorium ausführte. Die qualitative Untersuchung des in farblosen Krystallen vorliegenden Minerales liess Kalk, Magnesia, Kali, Schwefelsäure und Wasser als seine Bestandtheile erkennen.

Bei der Durchführung der quantitativen Analyse des bei 100° bis zur constanten Wägung getrockneten weissen Pulvers des Minerales verfuhr man in der Art, dass dasselbe in verdünnter Chlorwasserstoffsäure vollständig gelöst, aus der Lösung der Kalk als oxalsaurer Kalk gefällt und abfiltrirt wurde. Den Niederschlag löste man abermals in Salzsäure und fällte auf gleiche Weise den Kalk, worauf das Oxalat gut gewaschen, getrocknet, schliesslich in Carbonat übergeführt und gewogen wurde.

0·743 Gr. der Substanz gaben 0·2252 $CaCO_3$, entsprechend 0·126112 Gr., d. i. 16·97 $^0/_0$ CaO. Die Filtrate wurden zur Bestimmung der Schwefelsäure nach dem Ansäuern heiss, mit Baryumchlorid gefällt; das entstandene Baryumsulfat abfiltrirt,

gewaschen, geglüht und gewogen. Erhalten 1·0612 Gr. $BaSO_4$ entsprechend 0·36436 Gr. SO_3 oder 49·04 % SO_3.

Nach Entfernung des überschüssigen Barytsalzes mittelst Schwefelsäure wurde das Filtrat im Wasserbade eingeengt und darin mittelst phosphorsauren Ammons die Magnesia gefällt; der Niederschlag von phosphorsaurer Ammonmagnesia durch Filtration abgeschieden, geglüht, als pyrophosphorsaure Magnesia gewogen, ergab 0·0095 Gr. $Mg_2P_2O_7$ entsprechend 0·00342 MgO oder 0·46 % MgO.

Das letzterhaltene Filtrat musste zur Vertreibung der Ammonsalze eingedampft, der Rückstand geglüht werden, worauf letzterer mit Wasser aufgenommen, mit Chlorwasserstoffsäure und Platinchlorid versetzt, abermals eingedampft und in Wasser gelöst wurde.

Man setzte alsdann Platinchlorid und Alkohol zu, filtrirte den ausgeschiedenen Niederschlag von Kaliumplatinchlorid ab, wusch aus und wog nach dem Trocknen. Man fand 1·0716 Gr. $2KCl+PtCl_4$ entsprechend 0·2066 K_2O oder 27·80 % K_2O.

Da jedoch bei nochmaligem Eindampfen der Waschwässer und des Filtrates eine weitere Ausscheidung von Kaliumplatinchlorid erfolgte, wurde dies auf ein kleines Filter gebracht, im Porzellantiegel geglüht und aus dem Rückstande 0·0062 Gr. $2KCl+Pt$ berechnet: 0·23 % K_2O.

0·432 Gr. des bei 100° getrockneten Minerals verloren beim Glühen im Platintiegel 0·0251 Gr. entsprechend 5·81 % Wasser.

Aus diesen Daten ergibt sich die Zusammensetzung des Minerales:

CaO	=	16·97
MgO	=	0·46
K_2O	=	28·03
SO_3	=	49·04
H_2O	=	5·81
		100·31.

Die erhaltenen Resultate entsprechen, wenn man von dem kleinen Magnesiagehalte absieht, der Formel:

$$CaSO_4+K_2SO_4+H_2O,$$

welche verlangt in 100 Theilen:

CaO....	17·06
K_2O....	28·70
SO_3....	48·75
H_2O....	5·48
	99·99.

Man sieht daraus, dass das neue Mineral zwar vom Polyhalit verschieden ist, aber doch demselben nahesteht. Man braucht sich blos in der Formel des Polyhalit $2CaSO_4+MgSO_4+K_2SO_4+2H_2O$ die $MgSO_4$ durch K_2SO_4 ersetzt zu denken und dann durch 2 zu theilen, um zu der Formel des Syngenit zu gelangen.

Ein Doppelsulfat von der gefundenen Zusammensetzung ist übrigens bereits von Phillips[1] beschrieben und von Miller sowie von Lang krystallographisch und optisch untersucht worden. Dasselbe war gelegentlich der Fabrikation von Weinsäure aus Weinstein als Nebenproduct erhalten worden. Als Mineral wurde es aber, so viel bekannt, jetzt zum erstenmale gefunden. Ich beabsichtige übrigens die künstliche Darstellung desselben zu versuchen.

---

[1] Jahresber. d. Chemie f. 1850, S. 298.

4. Analyse des Epidots aus dem Untersulzbachthale in Salzburg.

Von **Franz Kottal.**

(Fortsetzung zu den Untersuchungen aus Prof. Lieben's Laboratorium.)

Die prachtvollen Epidotcrystalle, welche auf der Knappenwand im obersten Theile des Untersulzbachthales im Pinzgau (Salzburg) erst vor kurzer Zeit gefunden wurden, haben die Aufmerksamkeit der Mineralogen in hohem Grade auf sich gezogen; auch sind bereits zwei Analysen derselben von Drasche und von Rammelsberg ausgeführt worden.

Da indessen diese Analysen nur wenig unter einander stimmen, schien eine dritte Analyse immer noch von Interesse. Die schönen durchsichtigen Crystalle, welche das Material zur vorliegenden, in Professor Lieben's Laboratorium ausgeführten Untersuchung abgaben, verdanke ich der Güte des Herrn Obergrathes v. Zepharovich.

Ihr specifisches Gewicht betrug 3·51.

Die Analyse wurde nach bekannten Methoden ausgeführt und die meisten Bestimmungen zwei- bis dreimal wiederholt.

Hier sei nur erwähnt, dass die übrigens sehr geringe Menge von Eisenoxydul im Mineral in der Weise bestimmt wurde, dass der fein gepulverte Epidot in einer vorher mit Kohlensäure gefüllten, zugeschmolzenen Glasröhre mit concentrirter Salzsäure durch mehrere Stunden auf 200° erhitzt wurde; das gelöste Ferrosalz wurde dann mit den nöthigen Vorsichten mittelst titrirter Chamäleonlösung bestimmt.

Die Wasserbestimmung wurde durch Glühen der vorher bei 100° getrockneten Substanz im Kohlensäurestrom ausgeführt.

Qualitativ liessen sich Spuren von Mangan erkennen.

Die folgende Zusammenstellung zeigt die erhaltenen Resultate:

	I.	II.[1]	III.[1]	Im Mittel
SiO_2	36·96	37·22	36·80	37·00
Al_2O_3	—	—	22·10	22·10
Fe_2O_3 ...	13·80	14·00	14·33	13·80
FeO	0·33	(als Fe_2O_3)	(als Fe_2O_3)	0·33
CaO	25·28	25·38	24·80	25·15
MgO	0·03	—	—	0·03
H_2O	0·26	—	—	0·26
				98·67

Zur Vergleichung führe ich noch die oben citirten Analysen desselben Minerals an:

	Drasche[2]	Rammelsberg[3]	
SiO^2	38·37	39·59	39·64
Al_2O_3	22·09	20·77	
Fe_2O_3	13·77	14·99	
FeO	0·88	—	
CaO	17·94	24·53	
MgO	4·08	Spur	
H_2O	2·11	0·29	
	99·24	100·17	

Man sieht daraus, dass die Zusammensetzung der Epidotcrystalle von dem angegebenen Fundort nicht immer genau dieselbe ist, dass sie aber doch nur innerhalb enger Grenzen schwankt.

---

[1] In Anal. II. u. III wurde ohne Rücksicht auf Oxydul alles Eisen als Sesquioxyd bestimmt.

[2] Jahrb. für Miner. u. s. w. 1872.

[3] Zeitschr. d. deutsch. geolog. Ges. 1872.

Über Kieselsäurehydrate.

Von dem w. M. Dr. J. Gottlieb.

Als ich im Jahre 1863 die Klausenquelle nächst Gleichenberg analysirte (diese Berichte B. 49) und fand, dass die Kieselsäure den vorwiegenden Bestandtheil dieses, an fixen Stoffen so sehr armen Mineralwassers bildet, wurde mir die Frage nahegelegt, welche Zusammensetzung das Hydrat der Kieselsäure haben mag, welches beim Eindampfen des Wassers und Trocknen des Rückstandes bei 180—200° C. zurückbleibt. Ich habe diesfalls Versuche angestellt, die ich bald auf die Zusammensetzung der Kieselsäurehydrate überhaupt auszudehnen mich veranlasst fand, umsomehr als ich aus den, bis dahin vorliegenden Untersuchungen ersehen konnte, dass die Frage geradezu noch unerledigt ist.

Indem ich mir vorbehalte auf die von Andern ausgeführten diesfälligen Untersuchungen zurückzukommen, hebe ich zunächst hervor, dass ich die grossen Schwierigkeiten, welche die Bestimmung des Wassergehaltes von Kieselsäurehydrat begleiten und zum Theil schon von anderen hervorgehoben wurden, sehr bald zu würdigen in die Lage kam und mich vor Allem bemühte, Mittel aufzusuchen, um selbe möglichst zu beseitigen.

Dass die Art der Darstellung des Hydrates auf seine Beschaffenheit und Zusammensetzung von wesentlichstem Einflusse ist, konnte mir bei meinen diesfälligen Versuchen nicht entgehen und lag es überhaupt sehr nahe, anzunehmen, es sei sehr schwer, vielleicht selbst gar nicht möglich, Kieselsäure, welche aus Silicaten mittelst Säuren abgeschieden wurde, von den letzten Spuren der ursprünglich damit verbunden gewesenen Basen zu befreien. Ich habe mich daher nach zahlreichen, vorläufigen Versuchen

darauf beschränkt, die Zusammensetzung der aus Fluorsilicium durch Wasser abgeschiedenen Säure zu untersuchen, wie dies fast alle Chemiker gethan, welche sich bis dahin mit diesem Gegenstande eingehender beschäftigt hatten.

Von diesen wird mit Recht als ein wesentliches Hinderniss der Erlangung von zuverlässigen Daten die eminent hygroskopische und so ausserordentlich lockere Beschaffenheit der Säure bezeichnet. Ich fand, dass diese beiden störenden Eigenschaften in der That fast unüberwindliche Schwierigkeiten bei den betreffenden Gewichtsbestimmungen darbieten. So ist es geradezu unmöglich, die pulverförmige Säure aus dem Gefässe, in welchem sie getrocknet wurde, ohne Verlust durch Verstäuben in den Platintiegel zu übertragen, wo sie geglüht werden soll. Das Verschliessen des Gefässes, in welchem die Säure gewogen werden soll, muss ferner mit der grössten Schnelligkeit stattfinden, wenn man während desselben die Aufnahme einer merklichen Menge Wasser vermeiden will. Die Neigung der Kieselsäure, Wasser anzuziehen, ist so gross, dass selbst nur lufttrockenes, fein vertheiltes Hydrat beim Befeuchten mit Wasser Wärme entwickelt, ohne dass hier wohl im Entferntesten an die Bildung eines wasserreicheren Hydrates gedacht werden kann.

Ich bemühte mich, die erwähnten Schwierigkeiten möglichst dadurch zu beseitigen, dass ich die mit der grössten Sorgfalt bereitete und sehr vollständig gewaschene Säure in noch feuchtem Zustande zu kleinen, runden und ziemlich flachen Kuchen formte, indem ich sie in den Cylinder einer, den gewöhnlichen Stahlmörsern nachgeahmten, aus Buchsholz gedrehten Vorrichtung füllte und dann mittelst anfangs leichten, später stärkeren Hammerschlägen zu einer ziemlich fest zusammenhängenden Masse presste, welche in mässiger Wärme etwas besser getrocknet, durch Abblasen von allen locker anhaftenden Theilchen befreit, sofort ohne Verlust aus einem Gefässe in das andere rasch überleert werden konnte.

Das Glühen des Hydrates geschah ohne vorhergegangenes Befeuchten immer in geräumigen Platintiegeln und wurden diese anfangs sehr vorsichtig, später stärker und schliesslich anhaltend über dem Gasgebläse erhitzt.



Das Trocknen im Exsiccator über Schwefelsäure fand auf sehr gut passenden Uhrschälchen statt und wurde sehr sorgfältig auf einen vollen Verschluss Bedacht genommen. Ich habe das Verweilen der Säure in den Exsiccatoren auf weit grössere Zeiträume ausgedehnt als, bei gleichem Anlasse, bis dahin von anderen Chemikern angewendet wurden und inzwischen keine Wägungen vorgenommen, so dass die ganze Zeit über der Exsiccator nicht geöffnet wurde.

Bei diesen Versuchen gaben, nach dem Trocknen durch:

I. 117 Tage 0·879 Grm. Säure 0·0568 Grm. Wasser entsprechend 6·45%

II. 118 Tage 0·985 Grm. Säure 0·0603 Grm. Wasser entsprechend 6·12%

III. 120 Tage 0·7606 Grm. Säure 0·0471 Grm. Wasser entsprechend 6·19%

IV. 122 Tage 0·988 Grm. Säure 0·0598 Grm. Wasser entsprechend 6·06%

V. 140 Tage 0·7858 Grm. Säure 0·0481 Grm. Wasser entsprechend 6·12%

VI. 172 Tage 0·805 Grm. Säure 0·0478 Grm. Wasser entsprechend 5·94%

Im Mittel enthält also diese Säure 6·13 Procente Wasser.

Bei meinen diesfälligen Vorversuchen erkannte ich bald, dass die gewöhnlichen Vorrichtungen, welche zum Trocknen bei 100° C. dienen, im vorliegenden Falle unzureichend sind, um die Säure vor Gewichtszunahme in Folge neuerlicher Aufnahme von Wasser bei Veränderungen des Feuchtigkeitszustandes der Luft zu bewahren. Ich habe desshalb einen Apparat herstellen lassen, welcher es gestattet, die Substanzen in einem Strome von mittelst Schwefelsäure möglichst getrockneter Luft beliebig lange und mit den nöthigen Unterbrechungen zu erwärmen, ohne dass von Aussen feuchte Luft in denselben einzudringen vermag.

Dieser Apparat besteht aus einem aus starkem Kupferblech mittelst Hartloth hergestelltem viereckigem Kasten von 0.34 Met. Länge, 0·20 Met. Breite und 0·19 Met. Höhe. Dieser ist mit einem starken, ebenen Rande versehen, auf welchem mittelst eines Messingrahmens und 26 starken Schrauben eine 0·012 Met. dicke Messingplatte befestigt ist, worin zu beiden Seiten zwei weite Tu-

buli eingefügt sind. Sie dienen, um den Kasten beliebig füllen und entleeren zu können, wenn er als Wasserbad oder mit anderen Flüssigkeiten beschickt, verwendet werden soll und zur allfälligen Aufnahme eines Thermometers. So eingerichtet kann der Kasten als Wasser- und Luftbad u. s. w. benützt werden. In der erwähnten Messingplatte ist ferner ein zweiter kleinerer, massiver Messingkasten eingesenkt und mittelst Hartloth befestigt, dessen innere Länge 0·24, die Breite 0·15 und Tiefe 0·15 Met. beträgt und dessen breiter 0·015 Met. starker Rand sehr sorgfältig abgeschliffen und mit einem sehr genau passenden Deckel versehen ist. In letzterem befinden sich zwei conisch geschliffene Tubuli, von welchen der erste eine rechtwinkelig gebogene, starke Messingröhre aufnimmt, welche nur wenig unter den Deckel reicht und deren äussere Schenkel mit einer conischen Erweiterung versehen ist, so dass leicht ein durchbohrter Pfropf darin die zum Einführen der Luft dienende Glasröhre aufnehmen kann. Die zweite gleichfalls rechtwinkelig gebogene Messingröhre reicht bis nahe zum Boden des inneren Raumes, ist noch mit einem besonderen Hahne und gleichfalls mit einer conischen Erweiterung u. s. w. versehen. Sie dient zum Ableiten der durch den Apparat gesaugten Luft. Der mit diesen Leitungsröhren versehene Deckel lässt sich mittelst zwischengelegter Bleifolie und zehn sorgfältig gearbeiteten Klemmschrauben, welche übrigens ihren Druck nicht unmittelbar, sondern mittelst eines eingeschalteten Stahlrahmens auf die Fläche des Deckels ausüben, völlig luftdicht befestigen. Beim Gebrauche dieses Apparates werden die Substanzen in dem beschriebenen Trockenraume der entsprechenden Temperatur und zugleich einem langsamen stetigen Strome trockener Luft ausgesetzt. Zu diesem Behufe wirkt an dem mit einem Hahne versehenen Rohre ein Saugapparat, während das zweite Einsatzrohr die, zuvor durch eine hohe Schicht von mit Schwefelsäure getränkten Bimssteinstückchen getrocknete Luft eintreten lässt. Soll die Thätigkeit des Apparates unterbrochen werden, so schliesst man den Hahn, welcher die Communication mit dem Saugapparate vermittelt, wornach während des Abkühlens nur ganz trockene Luft eintreten kann.

Bei Benützung des Apparates zum Trocknen der Kieselsäure wurde sorgfältig darauf geachtet, die Bewegung der Luft sehr mässig zu erhalten, um stets möglichst entwässerte Luft in den Apparat zu schaffen, da bei der so ausserordentlich hygroskopischen Eigenschaft der Säure die Gefahr sehr nahe liegt, den Erfolg eines mehrtägigen Trocknens durch Eintreten von etwas feuchter Luft binnen einer halben Stunde wieder einzubüssen. Die Kieselsäure befand sich in Glaskölbchen, deren gut eingeriebene Stöpsel beigelegt waren, um sie beim Öffnen sehr rasch einsetzen zu können. Die geschlossenen Kölbchen brachte ich rasch unter einen Exsiccator über Schwefelsäure, um sie, sobald sie abgekühlt waren, sofort zu wägen. Dies geschah in Zwischenräumen von 3—4 Tagen, bis endlich keine Gewichtsabnahme beobachtet werden konnte, was durchschnittlich nach vier Wochen eintrat.

Dabei wurden folgende Resultate erhalten:

1·4955	Gr.	Säure	gaben	0·0685	Gr.	Wasser	entsprechend	4·58%
1·4305	„	„	„	0·0631	„	„	„	4·41 „
0·9922	„	„	„	0·044	„	„	„	4·43 „
1·7958	„	„	„	0·0822	„	„	„	4·57 „
1·1180	„	„	„	0·0699	„	„	„	4·30 „

Im Mittel wurden somit 4·47 Pct. Wasser gefunden.

Von diesen Zahlen weichen kaum jene ab, welche ich mit Kieselsäure erhielt, die bei 130—140° C. getrocknet worden war. Ich bediente mich dadei eines gewöhnlichen Luftbades nach Fresenius und eines Gasregulators, welcher im Kleinen nach dem Systeme der in den Gasfabriken verwendeten eingerichtet ist. Diese Beobachtungen stellte ich nur als Vorversuche an, bevor ich das Trocknen bei 100° in dem oben beschriebenen Wasserbade vornahm und sie erhielten erst durch Vergleichung mit den obigen Resultaten einiges Interesse.

Die Säure wurde auch hier kuchenförmig angewendet, aber zwischen Uhrgläsern gewogen.

1·5622	Gr.	Säure	geben	0·0742	Gr.	Wasser	entsprechend	4·75%
1·599	„	„	„	0·0740	„	„	„	4·63 „
1·9218	„	„	„	0·0848	„	„	„	4·42 „
2·2527	„	„	„	0·094	„	„	„	4·18 „

Es wurden demnach im Mittel 4·49 Pct. Wasser erhalten, während die bei 100° C. getrocknete Säure 4·47 Pct. Wasser enthielt. Dagegen war aber schon eine merkliche Verminderung des Wassergehaltes bei Kieselsäure wahrzunehmen, welche, unter übrigens gleichen Umständen, zwischen 180 und 200° C. getrocknet worden war.

Von dieser gaben:

1·8345 Gr.	Säure	0·0795 Gr.	Wasser.	entsprechend	4·34%	
1·7893 „	„	0·0740 „	„	„	4·14 „	
1·8707 „	„	0·0770 „	„	„	4·12 „	
2.0582 „	„	0·0887 „	„	„	4·31 „	
2·1080 „	„	0·0860 „	„	„	4·08 „	
2·0467 „	„	0·0819 „	„	„	4·00 „	
1·8846 „	„	0·0773 „	„	„	4·10 „	

im Mittel also 4·19 Procente.

Es sei mir gestattet, nach Anführung der obigen Daten, die Resultate in Kürze anzuführen, welche andere Chemiker bei analogen Untersuchungen über Kieselsäurehydrate erhielten, wobei vorwiegend jener Versuche gedacht werden soll, welche mit gleichem Material, wie die oben mitgetheilten erhalten wurden.

Die älteste Arbeit über diesen Gegenstand wurde von Doveri (Annales de Chimie et physique troisième série, T. XXI.) veröffentlicht. Die Beurtheilung, welche sie allseitig erfuhr, überhebt mich der Mühe, auf die von diesem Chemiker gefundenen Zahlen näher einzugehen.

Fuchs veröffentlichte 1852 in Liebig's Annalen Bd. 82 eine Abhandlung, welche an jene Doveri's anknüpft und sich mit, über Schwefelsäure im Exsiccator und bei 100° getrockneter aus Fluorsilicium gewonnener Säure beschäftigt. Über das Verfahren beim Trocknen äussert sich Fuchs nicht näher und dürften daher dabei keine besonderen Vorsichten und Apparate verwendet worden sein. Er brachte jedoch zuerst den Kunstgriff in Anwendung, die gewogene Säure vor dem Glühen zu befeuchten und dann bei 100° C. zu trocknen, um das Verstäuben derselben beim nachherigen Erhitzen möglichst zu verhindern.

In dem durch 30 Tage über Schwefelsäure getrockneten Hydrate fand er im Mittel von drei nahe übereinstimmenden Ver-

suchen 9·3 Procente Wasser. In der bei 100° C. durch 18 Tage getrockneten Säure fand Fuchs im Mittel von sechs sehr nahe übereinstimmenden Versuchen 6·75 Pct. Wasser.

Merz wurde durch die so wenig übereinstimmenden Resultate der von Doveri und Fuchs ausgeführten Untersuchungen veranlasst, neue Wasserbestimmungen des Kieselsäurehydrates auszuführen, wobei er sich, gleich Fuchs, ausschliesslich der aus Fluorsilicium erhaltenen Säure bediente. (Journal für practische Chemie Bd. 99.) In der wochenlang über Schwefelsäure gestandenen Kieselsäure fand er 8·08 bis 8.66 Pct. Wasser. In der bei 100° C. getrockneten Säure fand Merz 6·17 und 6·31 Pct. Wasser, welche Zahlen sich den unter gleichen Umständen von Fuchs erhaltenen nähern. Merz hat zudem auch den Wassergehalt von Kieselsäure, die zwischen 60 und 100° C. getrocknet worden war, untersucht. Er fand bei 60° C. 8·68 und 9·24 Pct. bei 80° C. 7.4 und 7·52 Pct., bei 90° C. endlich 6·84 und 6·96 Pct. Wasser. Merz hat zudem auch den Wassergehalt der bei 250 bis 270° C. getrockneten Säure bestimmt und im Mittel von drei Versuchen 3·44 Pct. Wasser gefunden.

Von besonderen Vorsichten, welche etwa angewendet wurden, um die Säure während des Trocknens bei und über 100° C. vor dem Zutritte feuchter Luft zu schützen, thut Merz keine Erwähnung [1].

Diesen Daten schliessen sich einige Versuche von Lippert an, welche Fresenius in der 5. Auflage seiner Anleitung zur quantitativen chemischen Analyse (1. Abdruck, S. 945) mittheilte. Lippert benützte bei seinen Versuchen Säurehydrat, welches mittelst Salzsäure aus verdünnter Wasserglaslösung abgeschie-

---

[1] Merz hebt übrigens den merkwürdigen Umstand hervor, dass er Kieselsäurehydrat kurz nach seiner Bereitung viel leichter und vollständiger, als jenes, welches vor längerer Zeit dargestellt worden war, zu trocknen vermochte. Er fand in solcher bei 70° C. getrockneter Säure 5·75 und 6·12 Pct., bei 90° C. getrocknet 4·6 Pct. und bei 100° C. getrocknet etwa 4·22 und 4·31 Pct. Wasser. Mir ist ein solcher Unterschied zwischen frisch bereiteter und länger aufbewahrter Säure nie aufgefallen, womit jedoch kein Zweifel an der Richtigkeit obiger Angaben ausgesprochen sein soll.



den und durch Decantiren so lange gewaschen worden war, bis das Wasser keine Spur Salzsäure mehr enthielt. Ein Theil dieser, vorläufig lufttrocken gemachten Säure wurde durch acht Wochen im Exsiccator über Schwefelsäure, unter zeitweiligem Zerreiben der krümmeligen Substanz, ein anderer Theil aber ebensolange im luftverdünnten Raume über Schwefelsäure getrocknet. Der Umstand, dass Lippert während des Trocknens die Säure mehrmals mit der Luft in Berührung brachte, dann vor dem Trocknen bei 100° C. überfüllte, erklärt es, wenn er in beiden Fällen mehr Wasser fand als ich, abgesehen von der Methode des Trocknens bei 100° C., welche gewiss in der gewöhnlichen Weise vorgenommen wurde.

Nach seinen Bestimmungen enthielt die über Schwefelsäure im Exsiccator getrocknete Kieselsäure im Mittel von zwei Versuchen 9·11 Pct. Wasser. Die im Vacuo getrocknete Säure gab im Mittel von zwei Versuchen 9·9 Pct. Wasser, war also unvollständiger getrocknet als die andere. Dass aber in beiden Fällen das Trocknen ein unvollständiges gewesen, geht, abgesehen von den oben mitgetheilten Zahlen, die ich erhielt, auch aus zwei Beobachtungen hervor, welche ich mit kuchenförmiger Kieselsäure machte, die seit dem 2. December 1864 bis zum 17. Juni 1867 unter einer Exsiccatorglocke über Schwefelsäure verweilt hatte, ohne dass während dieser langen Zeit die Glocke auch nur für einen Augenblick gehoben worden war. Der Verschluss des Apparates war inzwischen unvollständig geworden und die Communication mit der äusseren Luft, allerdings nur sehr beschränkt, hergestellt. In dieser Säure fand ich bei zwei Versuchen 9·09 und 9·00 Pct. Wasser, welche Zahlen sich den von Lippert gefundenen nähern. Lippert bestimmte ferner das Wasser in der im Exsiccator getrockneten Säure zu 4·97 Pct. und in der im Vacuo getrockneten zu 5·52 und 5·47 Pct., nachdem diese hierauf weiter bei 100° C. getrocknet worden waren. Auch hier ist die relativ ungenügende Entwässerung der im Vacuo behandelten Säure ersichtlich.

Zur Vervollständigung dieser Mittheilungen mag zunächst noch erwähnt werden, dass Ebelmen bereits im Jahre 1846 (Annales de Chimie et Physique. Troisième Série. T. XVI.) Kieselsäurehydrat, welches aus der Zersetzung von kieselsaurem Äthyl

an feuchter Luft hervorgegangen war, untersuchte und darin 19·8 Pct. Wasser fand. Wie lange und unter welchen Umständen es getrocknet wurde, ist nicht angegeben.

Später hat Frémy (Annales de Chimie et Physique. Troisième Série, T. 38) durch Zerlegung von Schwefelsilicium mit Wasser eine Lösung von Kieselsäurehydrat erhalten, welche beim Verdunsten im Vacuo eine poröse harte Masse zurückliess, worin er 16·7 Pct. Wasser fand. Er theilt ferner mit, dass dieses Hydrat (unter ihm unbekannt gebliebenen Umständen!) Wasser verlor und dann nur 9·4 Pct. Wasser enthielt.

Die grösste Menge Wasser fand Graham (Annalen der Chemie und Pharmacie. Bd. 121) in der Kieselsäure, welche aus der durch Dialyse gewonnenen, wässerigen Lösung mittelst Eindampfen im Vacuo abgeschieden und nur durch zwei Tage über Schwefelsäure getrocknet worden war, wornach sie 21·9 Pct. Wasser enthielt. Dieses Product kann wohl der lufttrockenen Säure angereiht werden.

Über diese liegen nur sehr wenige Daten vor. Langlois fand in aus Chlorsilicium mittelst Wasser abgeschiedener Kieselsäure, die er durch einige Tage in trockener Luft verweilen liess, 11·5 bis 12 Pct. Wasser. (Annales de Chimie et Physique, Troisième série. T. 52). Merz (l. c.) liess die Säure sechs Wochen lang bei einer Temperatur von 20—25° C. an der Luft verweilen, wornach sie 13·15 bis 13·52 Pct. Wasser enthielt. Schon aus diesen wenigen Beobachtungen lässt sich wohl mit Sicherheit schliessen, dass die, gewöhnlich als Normalkieselsäure angenommene Verbindung von der Formel H_4SiO_4 ebensowenig wie die sogenannte Metakieselsäure H_2SiO_3 existirt, denn die erstere verlangt 37·5, die zweite aber 23·07 Pct. Wasser, während selbst lufttrockene Säure nicht einmal den letzteren Wassergehalt erreicht und bei der enorm hygroskopischen Beschaffenheit der Kieselsäure wohl nicht angenommen werden kann, dass sie an der Luft bei gewöhnlicher Temperatur oder in sehr mässiger Wärme von etwa 28° C. mehr als einen kleinen Theil des anhängenden Wassers verliert, somit eine Zersetzung des Hydrates kaum denkbar ist.

Betrachtet man ferner die im Obigen angeführten und vergleichbaren Resultate, welche ich, Fuchs, Merz und Lippert

erhielten, so geht daraus unwiderleglich hervor, dass sowohl die Einwirkungsdauer der entwässernden Einflüsse, wie die ungestörte Geltung derselben den Erfolg sehr wesentlich zu modificiren im Stande sind.

Fuchs fand in der über Schwefelsäure durch 30 Tage getrockneten Säure 9·3 Pct., Lippert 9·11 bis 9·9 Pct., Merz, der, wie er sagt, wochenlang unter gleichen Verhältnissen trocknete, 8·08—8·66 Pct. und ich, bei einer Durchschnittsdauer des Trocknens von 131½ Tagen, während welcher Zeit die Exsiccatoren kein einziges Mal geöffnet wurden, 6·13 Pct. Wasser.

Fuchs trocknete bei 100° C. durch 18 Tage und fand 6·75 Pct., Merz, welcher über die Dauer des Trocknens keine Angabe macht, fand 6·24, Lippert 4·97 und 5·49, ich endlich bei Anwendung des oben beschriebenen Apparates, worin das Trocknen durch 4—5 Wochen stattfand, 4·47 Pct. Wasser. Ich kann mich der Überzeugung nicht verschliessen, dass, wenn sowohl über Schwefelsäure, wie bei 100° C. das Trocknen noch namhaft länger fortgesetzt worden wäre, dadurch noch eine weitere, wenn auch nicht bedeutende Verminderung des Wassergehaltes hätte erzielt werden können, falls nicht etwa die schon wiederholt betonte, ausserordentliche Fähigkeit der feinvertheilten Kieselsäure Wasser zurückzuhalten, diesem fortschreitenden Entwässern eine Grenze setzt.

Dieser Grenze glaube ich indessen mich mehr genähert zu haben als meine Vorgänger. Der Versuch jedoch, aus den von mir unter möglichst normalen Verhältnissen gewonnenen Zahlen wahrscheinliche Formeln für Kieselsäurehydrate abzuleiten, führt zu keinem günstigen Resultate. Die über Schwefelsäure getrocknete Verbindung bedingt die Formel $H_4Si_9\Theta_{20}$, welche 6·24 Pct. Wasser verlangt, während 6·13 gefunden wurden. Die bei 100° getrocknete Säure führt zur Formel $H_4Si_{18}\Theta_{28}$ mit 4·41 Pct. Wasser. Gefunden wurde bei dieser sowie solcher Säure, welche ich bei 130—140° trocknete (s. o.) 4·47 und 4·49 Pct. Ich will es unterlassen für die bei 180—200° getrocknete Säure, welche 4·19 Pct. Wasser enthielt und die von Merz bei 250—270° getrockneten mit 3·44 Pct. Wasser Formeln aufzustellen. Das ganze Verhalten der sogenannten Kieselsäurehydrate deutet entschieden darauf, dass sie im gewöhnlichen Sinne nicht aufgefasst werden

von ihrer relativen Geschwindigkeit unabhängig sei, muss also jedenfalls aufgegeben werden. Man motivirte diese Ansicht bisher hauptsächlich durch die geringe Zusammendrückbarkeit der festen und tropfbaren Körper. Aus dem Umstande, dass in festen und tropfbaren Körpern, selbst durch bedeutende Druckkräfte die Distanz der Centra zweier Nachbarmolecüle nur wenig verändert wird, glaubte man schliessen zu können, dass auch in Gasen die kleinste Distanz, in die die Centra zweier stossender Molecüle gelangen, nahe unveränderlich sei. Allein wenn wir auch durch die Druckkräfte, die wir in unseren Piezometern zu erzeugen vermögen, die Centra der Molecüle tropfbarer Flüssigkeiten einander nicht bedeutend näher bringen können, so gilt dies keineswegs von allen Druckkräften überhaupt. Der Druck, welcher in den grössten Meerestiefen herrscht, verdichtet das Wasser bereits um mehr als $^1/_{20}$ seines ursprünglichen Volumens, und noch unvergleichlich grösser ist wahrscheinlich der Druck, welcher im Erdmittelpunkte herrscht. Solange man also keine numerische Rechnung angestellt hat, lässt sich nicht angeben, ob sich in Gasen zwei zusammenstossende Molecüle so weit nähern, als sie sich in tropfbaren Flüssigkeiten unter dem Drucke einiger Atmosphären oder einiger Hunderttausend Atmosphären nähern. Nur im ersten Falle wäre der Schluss auf die Unveränderlichkeit der Distanz der Centra zweier zusammenstossender Molecüle erlaubt, während im letzteren Falle schon a priori auf eine Abhängigkeit derselben von der Temperatur zu schliessen ist. Die Rechnung wird uns in der That zeigen, dass das letztere der Fall ist, ja dass die Veränderlichkeit der kleinsten Distanz zweier stossender Molecüle, wie sie sich aus der Compressibilität der Flüssigkeiten ergibt, wenigstens der Grössenordnung nach vollkommen mit der von der Gastheorie geforderten übereinstimmt. Eine exacte numerische Ubereinstimmung kann selbstverständlich wegen verschiedener, der Wirklichkeit nur angenähert entprechender Hypothesen, zu denen wir im folgenden in Ermanglung der genauen Kenntniss der wirklichen Verhältnisse werden unsere Zuflucht nehmen müssen, gar nicht erwartet werden. Da die Compressibilität des tropfbaren Sauerstoffes oder Stickstoffes nicht bekannt ist, so wollen wir das Wasser unserer Berechnung zu Grunde legen. Als Einheiten wollen wir ein für allemal den

Meter, die Secunde und das Gewicht eines Kilogramms wählen. Sei im flüssigen Wasser beim Drucke einer Atmosphäre und dem Maximum seiner Dichte die Distanz der Centra zweier Nachbarmolecüle gleich ρ Met. Ich will nun zunächst aus der Compressibilität des Wassers die Arbeit bestimmen, welche erforderlich ist, um die Distanz zweier Nachbarmolecüle um das $x$fache ihres ursprünglichen Werthes zu vermindern, also von ρ auf $(1-x)\rho$ zu reduciren. Der Druck einer Atmosphäre comprimirt nach Grassi's Versuchen das Wasser durchschnittlich um 0·000048 seines Volumens, nähert also die Centra je zweier Nachbarmolecüle um 0·000016 ihrer ursprünglichen Distanz.

Um die Kraft zu berechnen, oder doch beiläufig zu schätzen, mit welcher dabei je zwei Molecüle einander genähert werden, nehmen wir an, dass die Centra der Molecüle die Ecken von lauter Würfeln bilden, deren Seiten gleich ρ sind.

Es berechtigt uns natürlich nichts zur Annahme, dass die Wassermolecüle wirklich gerade in dieser Weise angeordnet seien, aber es ist dies die einfachste geometrische Anordnung, und wenn auch die wirkliche Anordnung von derselben wahrscheinlich bedeutend abweicht, so wird uns dieselbe sicher doch wenigstens zu keinen Fehlern in der Grössenordnung der zu berechnenden Werthe führen. Eine Atmosphäre übt auf den Quadratmeter einen Druck von 10334 Kilogr. aus. Bei der von uns angenommenen Anordnung der Molecüle entfallen auf den Quadratmeter $\frac{1}{\rho^2}$ Molecüle, und da sich der Gesammtdruck auf alle diese Molecüle vertheilt, so entfällt auf jedes Molecül die Kraft $10334\,\rho^2$ in unseren Einheiten gemessen. Dies ist also die Kraft, mit welcher beim Drucke einer Atmosphäre je zwei Nachbarmolecüle einander genähert werden, wenn wir die jedenfalls bedeutend kleinere Kraft, welche von den entfernteren Molecülen ausgeht, vernachlässigen. Dabei vermindert sich ihre Distanz um 0·000016 ihres ursprünglichen Werthes, also um $0{\cdot}000016\rho$. Nehmen wir an, dass die Kraft, welche zwischen zwei Molecülen der Flüssigkeit wirksam ist, ihrer Annäherung direct proportional ist (ein Gesetz, welches für geringe Compressionen feststeht und das wir, da es sich ja hier blos um die Grössenordnung handelt, ohne Bedenken auch auf grössere Compressionen übertragen

können), so ist die Kraft, welche zwischen zwei Nachbarmolecülen geweckt wird, wenn man ihre Distanz um $x\rho$ vermindert, gleich:

$$\frac{10334\rho^2 x}{0{\cdot}000016}.$$

Die Arbeit, die zu dieser Distanzverminderung erforderlich ist, findet man, indem man mit der halben Distanzverminderung $\frac{x\rho}{2}$ multiplicirt; dieselbe ist also:

$$a = \frac{10334\rho^3 x^2}{0{\cdot}000032} \qquad (1)$$

Wir wollen noch die Masse m eines Wassermolecüls berechnen. Die Masse eines Cubikmeters Wasser beim Maximum der Dichte ist in unseren Einheiten gemessen $\frac{1000}{9{\cdot}81}$. Bei der von uns vorausgesetzten Anordnung der Molecüle befinden sich in einem Cubikmeter $\frac{1}{\rho^3}$ Molecüle. Jedes derselben hat also die Masse:

$$m = \frac{1000\rho^3}{9{\cdot}81}.$$

Unterziehen wir nun den Wasserdampf der Betrachtung. v^2 sei das mittlere Geschwindigkeitsquadrat eines Molecüls desselben. Wir fragen uns nun, wie weit sich die Centra zweier Molecüle, welche beide mit der Geschwindigkeit v einander central gerade entgegenfliegen, annähern werden. Die gesammte lebendige Kraft beider Molecüle vor dem Stosse ist:

$$2.\ \frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

Für Wasserstoffgas von der Temperatur $t°$ C. ist:

$$v^2 = 1844^2(1+\alpha t),$$

wobei:

$$\alpha = \frac{1}{273}.$$

Ein Wasserdampfmolecül ist neunmal so schwer, als ein Wasserstoffmolecül. Für den Wasserdampf ist also:

$$v^2 = \frac{1844^2}{9}(1+\alpha t).$$

Die gesammte lebendige Kraft unserer beiden Wasserdampfmolecüle ist also:

$$mv^2 = \frac{1000\rho^3}{9\cdot81} \cdot \frac{1844^2}{9}(1+\alpha t).$$

Im Moment der grössten Annäherung haben beide Molecüle die Geschwindigkeit Null; es ist also ihre gesammte lebendige Kraft in Arbeit verwandelt worden. Nehmen wir an, die Centra der beiden Molecüle hätten sich dabei bis zur Distanz $(1-x)\rho$ genähert, so haben wir die hiezu erforderliche Arbeit bereits früher aus der Compressibilität des tropfbaren Wassers berechnet und durch Gleichung 1) ausgedrückt gefunden. Nehmen wir an, die Molecüle hätten ihre Beschaffenheit durch den Übergang in den gasförmigen Zustand nicht geändert, so wird diese Formel auch auf die Annäherung beim Zusammenstosse der beiden Gasmolecüle anwendbar sein und wir erhalten, indem wir die verlorne lebendige Kraft der aufgewendeten Arbeit gleichsetzen:

$$\frac{1000\rho^3}{9\cdot81} \cdot \frac{1844^2}{9}(1+\alpha t) = \frac{10334\rho^3 x^2}{0\cdot000032}$$

woraus sich

$$x = \frac{\sqrt{1+\alpha t}}{2\cdot9}$$

ergibt. Für $t = 0$ wird

$$x = \frac{1}{2\cdot9};$$

bei einer Temperatur von 0° C. nähern sich daher die Centra zweier Wasserdampfmolecüle, wenn sie mit ihrer mittleren lebendigen Kraft gerade central auf einander zufliegen, bis zu einer Distanz, welche ungefähr gleich $^2/_3$ von der Distanz ist, welche zwei Nachbarmolecüle im tropfbaren Wasser unter dem Drucke einer Atmosphäre beim Maximum der Dichte haben, ein Werth, welcher auch dadurch bestätigt wird, dass ja bei 0° C. das

Wasser zu schmelzen anfängt, sich also die Molecüle bereits durcheinander hindurchzudrängen vermögen. Um eine solche Annäherung der Molecüle des tropfbaren Wassers hervorzubringen, müsste auf demselben ein Druck von 20·000 Atmosphären lasten. Wir sehen daher, dass die Kräfte, mit denen zwei zusammenstossende Gasmolecüle gegeneinander getrieben werden, ganz bedeutend sind und dass daher, abgesehen von den Experimenten über Reibung, Diffusion und Wärmeleitung, zu erwarten ist, dass der Durchmesser eines Molecüls nicht unerheblich mit der Temperatur veränderlich erscheint. Bezeichnen wir die Distanz, bis zu welcher sich die Centra zweier Molecüle bei 0° C. nähern, mit r_0, so ist also

$$r_0 = (1-x)\rho = \frac{1\cdot 9}{2\cdot 9}\rho$$

Um die Abhängigkeit der kleinsten Distanz zweier Molecüle von der Temperatur zu erkennen, nehmen wir an, die Temperatur t sei nicht viel von 0° C. verschieden. Dann ist angenähert

$$x = \frac{1}{2\cdot 9}\left(1 + \frac{\alpha t}{2}\right).$$

Bezeichnen wir die Distanz, bis zu welcher sich jetzt die Centra zweier Gasmolecüle nähern, wenn sich dieselben mit ihrer mittleren lebendigen Kraft central gegeneinander bewegen, mit r, so ist also wieder:

$$r = (1-x)\rho = \left(1 - \frac{1}{2\cdot 9} - \frac{\alpha t}{5\cdot 8}\right)\rho = r_0\left(1 - \frac{\alpha t}{3\cdot 8}\right).$$

Nach dem von Stefan gefundenen Gesetze wird den Erfahrungen über Reibung, Diffusion und Wärmeleitung genügt, wenn man annimmt, dass sich die beiden Distanzen r und r_0, bis zu welchen sich die Centra zweier Gasmolecüle bei den Temperaturen von t° und 0° C. annähern, verkehrt wie die vierten Wurzeln aus den absoluten Temperaturen verhalten, wonach man für kleine t zwischen r_0 und r die Relation

$$r = r_0\left(1 - \frac{\alpha t}{4}\right)$$

erhält. Diese Relation befindet sich in der schönsten Übereinstimmung mit der von uns aus der Compressibilität des Wassers abgeleiteten Gleichung

$$r = r_0\left(1 - \frac{\alpha t}{3 \cdot 8}\right).$$

Bedenkt man, dass wir bei Ableitung der letzten Gleichung so manche nur angenähert richtige Hypothese gemacht haben und ausserdem den Wasserdampf der Rechnung zu Grunde legten, für welchen das Stefan'sche Gesetz noch nicht experimentell geprüft wurde, so muss man gestehen, dass eine bessere Übereinstimmung sicher nicht zu erwarten war. Wenn also auch bei der Unsicherheit der von mir gemachten Voraussetzungen auf diese numerische Übereinstimmung vorläufig kaum ein allzugrosser Werth zu legen sein dürfte, so steht doch so viel fest, dass die geringe Compressibilität der tropfbaren Flüssigkeiten mit der Veränderlichkeit des Moleculardurchmessers keineswegs in Widerspruch steht, sondern dass sich vielmehr diese Veränderlichkeit aus der Compressibilität der tropfbaren Flüssigkeiten von derselben Ordnung, wie aus der Theorie der inneren Reibung der Gase ergibt.

Ich bemerke schliesslich noch, dass sich aus der Compressibilität des Wassers die Proportionalität des Moleculardurchmessers mit der reciproken vierten Wurzel der absoluten Temperatur blos in der Nähe der Temperatur von 0° C. ergibt, was aber durchaus keinen Widerspruch involvirt, da ja die Giltigkeit des letzteren Gesetzes auch nur in der Nähe von 0° C. bewiesen ist. Für grössere Temperaturen würde man aus der Compression des Wassers, falls dieselbe da noch immer dem Drucke proportional wäre, eine raschere Abnahme, für kleinere aber eine geringere Zunahme des Moleculardurchmessers erhalten.

Zur Theorie der Bessel'schen Functionen zweiter Art.

Von **Leopold Gegenbauer** in Krems.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1872.)

Differentiirt man die von C. Neumann aufgestellte Gleichung:

$$1.)\quad 2\left[O^{(n)}_{(x)}\right]' = O^{(n-1)}_{(x)} - O^{(n+1)}_{(x)}$$

wiederholt nach x, so erhält man die Relationen:

$$2.)\quad 2^2\left[O^{(n)}_{(x)}\right]'' = O^{(n-2)}_{(x)} - 2O^{(n)}_{(x)} + O^{(n+2)}_{(x)}$$

$$3.)\quad 2^3\left[O^{(n)}_{(x)}\right]''' = O^{(n-3)}_{(x)} - 3O^{(n-1)}_{(x)} + 3O^{(n+1)}_{(x)} - O^{(n+3)}_{(x)}$$

$$4.)\quad 2^4\left[O^{(n)}_{(x)}\right]'''' = O^{(n-4)}_{(x)} - 4O^{(n-2)}_{(x)} + 6O^{(n)}_{(x)} - 4O^{(n+2)}_{(x)} + O^{(n+4)}_{(x)}$$

. . . .

$$5.)\quad 2^p\left[O^{(n)}_{(x)}\right]^{(p)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=p}(-1)^\mu \binom{p}{\mu} O^{(n-p+2\mu)}_{(x)}$$

Die Gleichung 5.), welche uns lehrt, dass die Differentialquotienten einer jeden Bessel'schen Function zweiter Art nach Bessel'schen Functionen zweiter Art entwickelt werden können, werden wir nun zur Entwicklung von $O^{(n)}_{(x+\xi)}$ benützen.

Nach dem Taylor'schen Satze ist:

$$6.)\quad O^{(n)}_{(x+\xi)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\xi^p}{p!}\left[O^{(n)}_{(x)}\right]^{(p)}$$

oder wegen Formel 5.)

$$7.)\quad O^{(n)}_{(x+\xi)} = \sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{\mu=0}^{\mu=p}(-1)^\mu\binom{p}{\mu}\frac{\xi^p}{2^p p!} O^{(n-p+2\mu)}_{(x)}$$

Da μ nie grösser als p werden kann, können wir diese Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$8.)\quad O^{(n)}_{(x+\xi)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{\mu=0}^{\mu=p} (-1)^\mu \frac{\xi^p}{2^p \mu!(p-\mu)!} O^{(n-p+2\mu)}_{(x)}$$

In der Gleichung 8.) kann man offenbar x und ξ mit einander vertauschen; man hat daher auch:

$$9.)\quad O^{(n)}_{(x+\xi)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{\mu=0}^{\mu=p} (-1)^\mu \frac{x^p}{2^p \mu!(p-\mu)!} O^{(n-p+2\mu)}_{(\xi)}$$

Die auf der rechten Seite der Gleichung 8.) befindliche Doppelsumme lässt sich in drei Summen auflösen, von denen die erste alle Glieder enthält, in denen $n-p+2\mu=0$ ist, die zweite jene Glieder, in denen dieser Ausdruck positiv ist, und die dritte jene Glieder, in denen er negativ ist.

Ist $\rho+1$ der absolute Werth von $n-p+2\mu$ in den zwei letzten Summen, so findet man nach einer leichten Transformation:

$$10.)\quad O^{(n)}_{(x+\xi)} = O^{(0)}_{(x)} \frac{\xi^n}{2^n \Gamma(n+1)} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (-1)^\mu \frac{\xi^{2\mu}}{2^{\mu|2}(2n+2)^{\mu|2}}$$

$$+ \sum_{\rho=0}^{\rho=\infty} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (-1)^\mu \frac{\xi^{n-\rho-1+2\mu}}{2^{n-\rho-1}\Gamma(n-\rho) . 2^{\mu|2}(2n-2\rho)^{\mu|2}} O^{(\rho+1)}_{(x)}$$

$$+ \sum_{\rho=0}^{\rho=\infty} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (-1)^\mu \frac{\xi^{n+\rho+1+2\mu}}{2^{n+\rho+1}\Gamma(n+\rho+2) . 2^{\mu|2}(2n+2\rho+4)^{\mu|2}} O^{-(\rho+1)}_{(x)}$$

Lommel hat aber gezeigt, dass:

$$11.)\quad J^{(\nu)}_{(z)} = \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} (-1)^\sigma \frac{z^{2\sigma}}{2^{\sigma|2}(2\nu+2)^{\sigma|2}}$$

ist; es lässt sich daher die Gleichung 10.) auch in folgender Gestalt darstellen:

$$12.)\quad O^{(n)}_{(x+\xi)} = J^{(n)}_{(\xi)} . O^{(0)}_{(x)} + \sum_{\rho=0}^{\rho=\infty} J^{(n-\rho-1)}_{(\xi)} . O^{(\rho+1)}_{(x)}$$

$$+\sum_{\rho=0}^{\rho=\infty} J_{(\xi)}^{(n+\rho+1)} \, . \, O_{(x)}^{-(\rho+1)}$$

Vertauscht man in dieser Gleichung x und ξ mit einander, so hat man auch:

$$13.)\quad O_{(x+\xi)}^{(n)} = J_{(x)}^{(n)} O_{(\xi)}^{(0)} + \sum_{\rho=0}^{\rho=\infty} J_{(x)}^{(n-\rho-1)} O_{(\xi)}^{(\rho+1)} + \sum_{\rho=0}^{\rho=\infty} J_{(x)}^{(n+\rho+1)} O_{(\xi)}^{-(\rho+1)}$$

Da $O_{(x)}^{(n)}$ für ein gerades n durch die Reihe:

$$14.)\quad O_{(x)}^{(n)} = \frac{1}{x}\left[1 + \frac{n^2}{x^2} + \frac{n^2(n^2-2^2)}{x^4} + \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{x^6} + \dots\right]$$

für ein ungerades n aber durch die Reihe:

$$15.)\quad O_{(x)}^{(n)} = \frac{n}{x^2}\left[1 + \frac{n^2-1^2}{x^2} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{x^4} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{x^6} + \dots\right]$$

definirt wird, so sieht man, dass:

$$16.)\quad O_{(x)}^{(-n)} = (-1)^n O_{(x)}^{(n)}$$

ist; man kann daher die Gleichungen 12.) und 13.) auch in folgender Form schreiben:

$$17.)\quad O_{(x+\xi)}^{(n)} = J_{(\xi)}^{(n)} O_{(x)}^{(0)} + \sum_{\rho=0}^{\rho=\infty}\left[J_{(\xi)}^{(n-\rho-1)} + (-1)^{\rho+1} J_{(\xi)}^{(n+\rho+1)}\right] O_{(x)}^{(\rho+1)}$$

$$18.)\quad O_{(x+\xi)}^{(n)} = J_{(x)}^{(n)} O_{(\xi)}^{(0)} + \sum_{\rho=0}^{\rho=\infty}\left[J_{(x)}^{(n-\rho-1)} + (-1)^{\rho+1} J_{(x)}^{(n+\rho+1)}\right] O_{(\xi)}^{(\rho+1)}$$

Setzt man $\xi=(m-1)x$, so verwandeln sich die Gleichungen (17. und 18.) in:

19.) $$O^{(n)}_{(mx)} = J^{(n)}_{([m-1]x)} O^{(0)}_{(x)} + \sum_{\rho=0}^{\rho=\infty} \left[J^{(n-\rho-1)}_{([m-1]x)} + (-1)^{\rho+1} J^{(n+\rho+1)}_{([m-1]x)} \right] O^{(\rho+1)}_{(x)}$$

20.) $$O^{(n)}_{(mx)} = J^{(n)}_{(x)} O^{(0)}_{([m-1]x)} + \sum_{\rho=0}^{\rho=\infty} \left[J^{(n-\rho-1)}_{(x)} + (-1)^{\rho+1} J^{(n+\rho+1)}_{(x)} \right] O^{(\rho+1)}_{([m-1]x)}$$

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXVI. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

8.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

XXI. SITZUNG VOM 10. OCTOBER 1872.

Der Präsident begrüsst die anwesenden Mitglieder bei Wiederbeginn der akademischen Sitzungen.

Derselbe gedenkt ferner des während der Ferien erfolgten Ablebens der wirklichen Mitglieder, des Herrn Dr. Joseph Ritter von Bergmann, gestorben am 29. Juli in Graz, und des Herrn Hofrathes Dr. George Phillips, gestorben am 6. September zu Aigen bei Salzburg.

Sämmtliche Anwesende geben ihr Beileid durch Erheben von den Sitzen kund.

Herr Freiherr Conrad v. Eybesfeld zeigt, mit Note vom 6. August, seinen Amtsantritt als k. k. Statthalter in Niederösterreich an.

Das k. k. Ministerium des Innern übermittelt, mit Note vom 23. August, die graphischen Nachweisungen über die Eisbildung an der Donau und March in Niederösterreich und an der Donau in Oberösterreich während des Winters 1871/2.

Der Secretär bringt folgende Dankschreiben zur Kenntniss der Classe:

1. Vom Herrn Dr. L. J. Fitzinger in Pest für die ihm zur ichthyologischen Durchforschung der Tátra bewilligte Subvention von 300 fl.
2. Vom Herrn Custos Dr. A. Schrauf für die ihm zur Fortsetzung der Arbeiten behufs der Herausgabe des 5. & 6. Heftes seines „Atlas der Krystallformen des Mineralreiches" bewilligte Subvention von 300 fl.
3. Vom Herrn Lecomte für die der *Société Entomologique de Belgique* und der *Société Malacologique de Belgique* zu Brüssel bewilligten Sitzungsberichte der Classe.
4. Von der k. k. Gymnasialdirection in Trebitsch für die dieser Lehranstalt bewilligten Separatabdrücke aus den Schriften der Classe.

Herr Prof. Dr. Herm. Fritz in Zürich übersendet das nun vollendete Manuscript seines „Verzeichnisses der beobachteten Polarlichter."

Herr Prof. Dr. Rich. Heschl in Graz hinterlegt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung seiner Priorität der Beobachtung und Nachweisung einer sehr wichtigen Krankheits-Ursache.

Herr Prof. Dr. H. Hlasiwetz überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. Friedr. Hinterberger: „Über das Excretin."

Herr Dr. Kratschmer übergibt eine Abhandlung „Über Zucker- und Harnstoffausscheidung beim *Diabetes mellitus* unter dem Einflusse von Morphium, kohlensaurem und schwefelsaurem Natron."

Herr Prof. Dr. L. Boltzmann aus Graz legt eine Abhandlung vor, betitelt: „Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolecülen."

Derselbe überreicht ferner eine vorläufige Mittheilung: „Experimentaluntersuchung über das Verhalten nicht leitender Körper unter dem Einflusse elektrischer Kräfte."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia, Real, de Ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Tomo V—VIII. (1868—1871); Tomo IX, Junio & Julio 1872. Habana; 8°. — Flora Cubana. Sign. 21—28. 8°. — Aniversario undecimo de la Real Acad. de Ciencias med. fis. y nat. de la Habana. Resumen de sus tareas, discursos y programa de premios. Habana, 1872; 8°. — Tablas obituarias de 1871. Habana, 1872; 8°.

Annalen der Chemie, von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R. Band LXXXVII, Heft 2 & 3. Leipzig & Heidelberg, 1872; 8°.

Annales des mines. VII° Serie. Tome I, 2° Livraison de 1872. Paris; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrgang, Nr. 21—28. Wien, 1872; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1897—1905. (Bd. 80. 1—9.) Altona, 1872; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXV, Nrs. 2—13. Paris, 1872; 4°.

Dozy, F., et J. H. Molkenboer, *Bryologia Javanica seu descriptio Muscorum frondosorum Archipelagi Indici iconibus illustrata. (Post mortem auctorum edentibus R. B. Van den Bosch et C. M. Van der Sande Lacoste.) Fasc. I—LXIV. Lugduni Batavorum, 1854—1870*; 4°.

Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. Neuere Zeit. XII. Band. Geschichte der Zoologie bis auf Joh. Müller u. Charl. Darwin, von J. Victor Carus. München, 1872; 8°.

Gesellschaft der Wissenschaften, k., zu Göttingen: Abhandlungen. XVI. Band. (1871). Göttingen, 1872; 4°. — Gelehrte Anzeigen, 1871, Bd. I & II. 8°. — Nachrichten aus d. J. 1871. Göttingen; 8°.

— geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XV. (Neuer Folge V.) Nr. 7—9. Wien, 1872; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VII. Band, Nr. 14—17. Wien, 1872; 4°.

— Astronomische, in Leipzig: Vierteljahrsschrift. VII. Jahrgang, 3. Heft. Leipzig, 1872; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrg. Nr. 29—40. Wien, 1872; 4°.

Instituut, k., voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch Indië: Bijdragen. III. Volgreeks VI. Deel, 3. Stuk. 's Gravenhage, 1872; 8°.

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie & verwandte Fächer, von Vorwerk. Band XXXVII, Heft 5 & 6; Band XXXVIII, Heft 1. Speyer, 1872; 8°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe, N. F. Band VI, 1. & 2. Heft. Leipzig, 1872; 8°.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 15—20. Graz, 1872; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 16 bis 19. Wien; 8°.

Löwen, Universität, akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1869—1871; 4°, 8° & 12°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 18. Band, 1872. Heft VII & VIII, nebst Ergänzungsheft Nr. 33. Gotha; 4°.

Moniteur Scientifique par Quesneville. 3e Serie, Tome II, 367e—370e Livraisons. Paris, 1872; 4°.

Nature. Nrs. 142—153, Vol. VI. London, 1872; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1872. XXII. Band, Nr. 2. Wien; 4°. — Verhandlungen. Jahrgang 1872, Nr. 10—12. Wien; 4°.

„Revue politique et littéraire", et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger". IIe Année, 2e Série, Nrs. 3—14. Paris et Bruxelles, 1872; 4°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 29—40. Wien, 1872; 4°.

Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig u. Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Band, 24 Heft. Leipzig, 1872; 8°.

— des oesterr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIV. Jahrgang, 10.—12. Heft. Wien, 1872; 4°.

Zur Kenntniss des Nicotins.

Von Dr. H. Weidel.

(Mit 2 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Juni 1872.)

Diamine scheinen als Naturproducte sehr selten zu sein, wenigstens kennt man bis jetzt nur zwei derselben, das Nicotin und das Sparteïn.

Wenn unsere Kenntnisse über diese Basen noch ziemlich lückenhaft sind, so rührt das wohl vornehmlich daher, dass sie theure Präparate sind, von denen man nicht oft grössere Mengen zur Verfügung hat.

Umsomehr bin ich daher Herrn Ministerialsecretär Kosch zu Dank verpflichtet, welcher die Güte hatte, mir mehrere Unzen Nicotin für eine nähere Untersuchung zu überlassen.

Eine andere Quantität, die zu benützen mir Herr Professor Hlasiwetz freundlichst erlaubte, war vor längerer Zeit schon der Sammlung des hiesigen Laboratoriums von Herrn Hofrath v. Schrötter einverleibt worden.

In der Literatur über das Nicotin finden sich bis auf die neuere Zeit nur Verbindungen desselben angeführt, welche seine Formel $C_{10} H_{14} N_2$ als die eines tertiären Diamins beweisen:

Salze, Doppelsalze, Paarungen mit den Haloidverbindungen der Alcohol- und Säureradicale, und ein Bromsubstitutionsproduct mit Br_2 statt H_2, welches die Verbindungsfähigkeit des ursprünglichen Nicotins noch ganz zu besitzen scheint [1].

Nur die letzte Untersuchung, die darüber vorliegt, lieferte auch ein charakteristisches Zersetzungsproduct.

---

[1] Eine sehr vollständige Zusammenstellung der Nicotinverbindungen geben A. und Th. Husemann in ihrem vortrefflichen Werke „über die Pflanzenstoffe in chemischer, physiologischer, pharmacologischer und toxicologischer Hinsicht“.

Huber[1] oxydirte das Nicotin mit Chromsäure und erhielt eine Säure, die er in einer späteren Mittheilung[2] als Pyridincarbonsäure bezeichnete. Aus dieser konnte er eine flüchtige Base von der Formel $C_5 H_5 N$ (Pyridin) gewinnen.

Huber's Mittheilungen sind indess nur sehr kurze Notizen, denen keine Zahlen beigegeben sind; auch ist nicht angeführt, wie man nach der Oxydation zu verfahren habe um die Pyridincarbonsäure abzuscheiden.

Ich musste indess auf Huber's Versuche zurückkommen und sie wiederholen, nachdem ich selbst durch Oxydation des Nicotins mit Salpetersäure eine stickstoffhaltige Säure erhalten hatte, die etwas ungewöhnliche Verbindungsverhältnisse zeigt.

Auf die ausführliche Untersuchung dieser Säure habe ich auch den grössten Theil meines Materiales verwendet[3], nachdem mir andere Zersetzungsversuche keine brauchbaren Resultate ergeben hatten: so die Einwirkung des Monochloressigäthers bei erhöhtem Druck und Temperatur, (mit Methylamin liefert dieser Äther bekanntlich Sarkosin. Vollhard), dann die Einwirkung von Phosphorchlorür und Acetylchlorid, (eine Wiederholung der Hoffmann'schen Reaction); die Übertragung des von Werthheim beim Coniin angewandten Verfahrens, mit salpetriger Säure Azoconhydrin und daraus mit wasserfreier Phosphorsäure Conylen zu erhalten, auf das Nicotin; endlich die Umsetzung von salpetrigsaurem Baryt mit schwefelsaurem Nicotin zu einem salpetrigsauren Nicotin, welches in der Hitze in Stickstoff und eine alcoholähnliche Verbindung hätte zerfallen sollen.

Die ersten drei Reactionen führten nur zu harzigen Massen, aus denen reine Verbindungen nicht darzustellen waren; bei

---

[1] Annal. d. Chem. u. Pharm. Bd. CXLI. pag. 277.

[2] Berichte d. chem. Gesellsch. z. Berlin. Bd. III. pag. 849.

[3] Es hatte mir nach der Destillation im Wasserstoffstrom dasselbe bei der Analyse ergeben:

0·2855 Grm. Substanz gaben 0·7751 Grm. Kohlensäure und 0·2295 Grm. Wasser; daraus

Gefunden	$C_{10}H_{14}N_2$
C — 74·04	C — 74·07
H — 8·95	H — 8·64

letzterer aber wurde der grösste Theil des Nicotins unverändert wieder erhalten.

Nicotinsäure.

Die Einwirkung der Salpetersäure auf das Nicotin ist bisher sehr unvollkommen studiert[1]; gleichwol ist es nicht schwer zu finden, dass das Endproduct dieser Oxydation eine Säure ist, die fast ohne die Bildung von secundären Producten, und in nahezu der, aus der Formel dieser Säure berechneten Menge erhalten wird.

Ich nenne die Verbindung eine Säure, weil sie sauer reagirt und stark sauer schmeckt, allein sie hat nach Art der Amidosäuren auch das Vermögen, sich starken Säuren gegenüber basisch zu verhalten, und in der That gewinnt man sie zunächst in der Form einer Verbindung mit Salpetersäure.

Nach der folgenden Vorschrift wird man sie stets leicht darstellen können:

Man tröpfelt in 25 Theile gut abgekühlter, rauchender Salpetersäure, die sich in einem geräumigen Kolben befindet, unter fortwährendem Schwenken 1 Theil Nicotin ein, mit der Vorsicht, die Reaction nicht allzu heftig werden zu lassen, und nöthigenfalls den Kolben neuerdings durch Eiswasser abzukühlen. (Bei Anwendung dieser verhältnissmässig grossen Menge Salpetersäure ist verhindert, dass sich als nächstes Product eine harzige Masse bildet, welche sich nur sehr unvollständig weiter oxydiren lässt.)

Man lässt, nachdem alles Nicotin eingetragen ist, ganz allmälig den Kolben eine Temperatur von 20—25° annehmen, worauf sich eine heftige, ziemlich stürmisch verlaufende Reaction einstellt, die von einer massenhaften Entwicklung rother Dämpfe begleitet ist. Wenn sie fast zu Ende ist, wird die Flüssigkeit so lange gekocht, bis sie ihre gelbrothe Farbe verloren und eine weingelbe angenommen hat; man bringt nun alles in eine Schale und dampft auf dem Wasserbade bis zur Consistenz eines dünnen Syrups ein.

---

[1] Vergleiche hierüber Gmelin VII. pag. 214.



In der Regel beginnt schon nach einigen Stunden eine rasch fortschreitende Krystallisation körniger Krystalle, die zuletzt die Flüssigkeit breiig erfüllen.

Man saugt mittelst einer Bunsen'schen Pumpe die Mutterlauge ab, die nach einer erneuerten Behandlung mit rauchender Salpetersäure noch weitere Mengen liefert [1].

Die rohe, fast farblose Krystallmasse besteht nur aus der salpetersauren Verbindung des Oxydationsproductes und wird durch zweimaliges Umkrystallisiren aus siedendem Wasser leicht ganz rein erhalten.

Die reine Verbindung bildet kleine Krystalle, deren Salpetersäuregehalt leicht durch die gewöhnlichen Reactionen zu constatiren ist. Die Analysen derselben sind weiter unten angeführt.

Um daraus die organische Säure abzuscheiden, benützt man ihre Fähigkeit, mit Silber eine unlösliche Verbindung einzugehen. Man sättigt die noch warme Lösung der Salpetersäureverbindung mit Ammoniak ab, wobei die Flüssigkeit, wenn die Substanz nicht ganz rein war, schwach gelb wird und einen moschusähnlichen Geruch annimmt.

Hierauf versetzt man dieselbe mit einer concentrirten Lösung von salpetersaurem Silberoxyd, bis in einer filtrirten Probe kein Niederschlag mehr entsteht, bringt die breiig gewordene Masse auf ein Leinwandfilter, wäscht etwas nach, und presst zuerst mit der Hand, zuletzt in einer Schraubenpresse trocken.

Dann zerreibt man den Presskuchen mit Wasser in einer Reibschale zu einem gleichmässigen Schlamm, verdünnt etwas, erhitzt und zersetzt mit Schwefelwasserstoff. Die vom Schwefelsilber abfiltrirte, wasserklare Flüssigkeit braucht nicht weit eingedampft zu werden um bald zu krystallisiren. Es schiessen meist concentrisch gruppirte Krystallbüschel an, die man nöthigenfalls mit Thierkohle völlig entfärben kann.

Die Nicotinsäure krystallisirt gut und so vollständig, dass die Mutterlaugen nur wenig mehr enthalten. Sie hat folgende

---

[1] Die schon von Henry gemachte Beobachtung, dass bei der Oxydation des Nicotins mit Salpetersäure keine Oxalsäure entsteht, ist vollkommen richtig.

Eigenschaften: Ihr Geschmack ist stark und rein sauer; kaltes Wasser löst wenig, siedendes völlig, Alcohol beim Kochen leicht, Äther fast gar nicht. Beim Erhitzen schmilzt sie und ist vollständig sublimirbar. Sie zersetzt mit Leichtigkeit die kohlensauren Salze, und in ihrer wässerigen Lösung entstehen mit Metallsolutionen Niederschläge nur dann, wenn sie zuvor durch ein Alkali abgesättigt wurde; nur eine Silbersolution gibt auch ohne Absättigung eine weisse Fällung. Beim Erhitzen mit Kalk entwickelt sich sofort der penetrante Geruch des Dippel'schen Theeröles.

Die Nicotinsäure besitzt kein Krystallwasser.

Ihre Analysen führen zu der Formel $C_{10}H_8N_2O_3$.

I. 0·2991 Grm. Substanz gaben 0·6497 Kohlensäure und 0·1116 Wasser.

II. 0·2747 Grm. Substanz gaben 0·5944 Kohlensäure und 0·1072 Wasser.

III. 0·2649 Grm. Substanz gaben 0·5735 Kohlensäure und 0·0948 Wasser.

IV. 0·2592 Grm. Substanz gaben 0·5586 Kohlensäure und 0·0935 Wasser.

V. 0·2938 Gr. Substanz gaben 36·0CC Stickstoff bei 16.6° C. und 739·9 Mm.

VI. 0·2817 Gr. Substanz gaben 34·1 CC. Stickstoff bei 17·2°C. und 748·2 Mm.

VII. 0·2976 Gr. Substanz gaben 37·4 CC. Stickstoff bei 22·9°C. und 746·1 Mm.

VIII. 0·2685 Gr. Substanz gaben 33·6 CC. Stickstoff bei 22·5°C. und 748·1 Mm.

In 100 Theilen:

	I.	II.	III.	IV.	V.
C —	59·24	59·02	59·06	58·78	—
H —	4·15	4·35	3·98	4·01	—
N —	—	—	—	—	13·86

	VI.	VII.	VIII.
C —	—	—	—
H —	—	—	—
N —	13·83	13·91	13·91

Die Formel $C_{10}H_8N_2O_3$ verlangt in 100 Theilen:

Berechnet	Gefunden im Mittel
C — 58·82	C — 59·02
H — 3·92	H — 4·12
N — 13·72	N — 13·87

Salpetersäureverbindung. Sie entsteht direct durch Auflösen der Nicotinsäure in warmer Salpetersäure von gewöhnlicher Concentration. Beim Auskühlen der Lösung schiesst die Verbindung in farblosen Krystallblättern oder kurzen Prismen an, die man auf einer feinen Thonplatte von der sauren Lauge befreit.

Ihre Zusammensetzung ist die gleiche, wie die jener Verbindung, die aus der Oxydation des Nicotins hervorgeht.

Bei den nachstehenden Analysen sind die mit IV und VIII bezeichneten die, des durch Auflösen der Nicotinsäure in Salpetersäure erhaltenen Salzes.

I. 0·345 Grm. Substanz gaben 0·5132 Kohlensäure und 0·1063 Wasser.

II. 0·2797 Grm. Substanz gaben 0·4100 Kohlensäure und 0·0846 Wasser.

III. 0·3135 Grm. Substanz gaben 0·4635 Kohlensäure und 0·0913 Wasser.

IV. 0·2954 Grm. Substanz gaben 0·4364 Kohlensäure und 0·0873 Wasser.

V. 0·2724 Gr. Substanz gaben 39.0 CC. Stickstoff bei 17·0° C. und 748·7 Mm.

VI. 0·2350 Gr. Substanz gaben 33.7 CC. Stickstoff bei 16·3° C. und 749.3 Mm.

VII. 0·3015 Gr. Substanz gaben 44·1 CC. Stickstoff bei 16·8° C. und 746·5 Mm.

VIII. 0·2833 Gr. Substanz gaben 41·2 CC. Stickstoff bei 18·4° C. und 748.5 Mm.

In 100 Theilen:

	I.	II.	III.	IV.	V.
C —	40·54	39·98	40·32	40·29	—
H —	3·42	3·35	3·24	3·28	—
N —	—	—	—	—	15·99

	VI.	VII.	VIII.
C —	—	—	—
H —	—	—	—
N —	16·45	16·67	16·49

Die Krystallwasserbestimmungen ergaben:

I. 0·3800 Grm. Substanz verloren bei 110°, 0·0350 Wasser.

II. 0·3135 Grm. Substanz verloren bei 110°, 0·0773 Wass er

	I.	II.
H_2O —	9·21	9·5

Salzsäureverbindung. Warme concentrirte Salzsäure löst Nicotinsäure, und liefert ziemlich leicht diese Verbindung die je nach der Concentration entweder als sandiges Krystallmehl, oder in der Form ziemlich regelmässig ausgedildeter, prismatischer Krystalle erhalten wird.

Die Analyse ergab:

I. 0.4131 Grm. Substanz gaben 0·3710 Kohlensäure und 0·1342 Wasser.

II. 0·2896 Gr. Substanz gaben 27·4 CC. Stickstoff bei 15·6° C. und 749·5 Mm.

III. 0·3541 Grm. Substanz gaben 0·3485 Chlorsilber.

In 100 Theilen:

C —	46·50
H —	3·61
N —	10·91
Cl —	20·15

Verbindung mit Bromwasserstoff. Sie entsteht wie die Vorige und theilt auch die äusseren Eigenschaften derselben.

Die Analyse ergab:

I. 0·3144 Grm. Substanz gaben 0·3181 Kohlensäure und 0·0919 Wasser.

II. 0·3363 Gr. Substanz gaben 25·1CC Stickstoff bei 16° C. und 748·7 Mm.

III. 0·4962 Grm. Substanz gaben 0·4339 Bromsilber.

In 100 Theilen:

C —	37·14
H —	3·25
N —	8·57
Br —	37·21

Verbindung mit Schwefelsäure. Sie wird aus einer Lösung von Nicotinsäure in Schwefelsäure, die mit ihrem gleichen Volum Wasser verdünnt ist, durch Weingeist farblos krystallinisch gefällt. Sie ist ausserordentlich löslich in Wasser und lässt sich darum ohne Weingeistzusatz kaum umkrystallisiren.

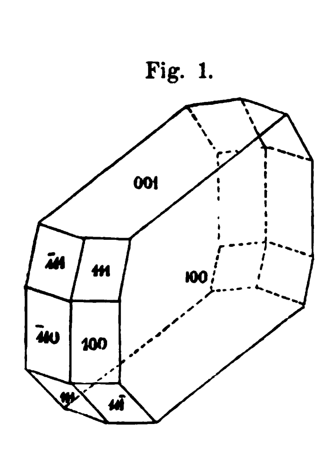
Salzsaures Platindoppelsalz. Diese prachtvoll krystallisirende Doppelverbindung entsteht, wenn man einer Lösung von Nicotinsäure in Salzsäure eine concentrirte Lösung von Platinchlorid zumischt. Nach einiger Zeit beginnt die Bildung ausserordentlich schön ausgebildeter, grosser, orangerother Krystalle, welche Herr Prof. Ditscheiner zu messen die Güte hatte.

Krystallsystem: schiefprismatisch.

$a:b:c = 1{\cdot}6233:1:1{\cdot}8251, \quad ac = 73^\circ\ 55'$

Beobachtete Flächen: 111, $\bar{1}11$, 100, 001, 110.

Fig. 1.



	Beobachtet	Berechnet
001 : 100 =	106° 5′*	—
100 : 110 =	57 20*	—
111 : 001 =	71 20*	—
111 : 100 =	—	67° 7′
$\bar{1}11$: 100 =	113 0	112 53
$\bar{1}11$: 001 =	58 0	57 35
$\bar{1}11$: $\bar{1}00$ =	—	55 0
$\bar{1}11$: $\bar{1}1\bar{1}$ =	57 40	57 53
100 : $\bar{1}1\bar{1}$ =	—	115 0
111 : $\bar{1}10$ =	—	27 10
$\bar{1}11$: $1\bar{1}0$ =	—	23 37
$\bar{1}11$: $\bar{1}1\bar{1}$ =	—	93 16
111 : $1\bar{1}1$ =	—	107 32
$\bar{1}00$: 001 =	73 40	73 55
001 : $\bar{1}10$ =	81 30	81 24
110 : $\bar{1}10$ =	65 20	65 21
110 : $1\bar{1}0$ =	—	114 40

Die Analyse ergab:

I. 0·3892 Grm. Substanz gaben 0·3346 Kohlensäure und 0·0723 Wasser.

II. 0·3434 Grm. Substanz gaben 0·2895 Kohlensäure und 0·0709 Wasser.

III. 0·4188 Gr. Substanz gaben 20·7 CC. Stickstoff bei 22·3° C. und 746·2 Mm.

IV. 0·5752 Grm. Substanz gaben 0·7359 Chlorsilber.

V. 0·5052 Grm. Substanz gaben 0·6428 Chlorsilber.

VI. 1·0474 Grm. Substanz gaben 0·3073 Platin.

VII. 0·8525 Grm. Substanz gaben 0·2493 Platin.

In 100 Theilen:

	I.	II.	III.	IV.	V.
C —	23·45	22·99	—	—	—
H —	2·12	2·00	—	—	—
N —	—	—	5·49	—	—
Pt —	—	—	—	—	—
Cl —	—	—	—	31·65	31·48

	VI.	VII.
C —	—	—
H —	—	—
N —	—	—
Pt —	29·34	29·25
Cl —	—	—

Die Krystallwasserbestimmungen ergaben:

I. 0·8432 Grm. Substanz verloren bei 110°, 0·0546 Wasser.

II. 1·4432 Grm. Substanz verloren bei 110°, 0·0937 Wasser.

In 100 Theilen:

	I.	II.
H_2O —	6·47	6·49

Erste Silberverbindung. Ist der undeutlich krystallinische weisse Niederschlag, den Silbernitrat in der sauren Lösung der Nicotinsäure hervorbringt. Er ist lichtbeständig, kann aber nicht ohne Verlust lange gewaschen werden.

Die Analyse der bei 110° getrockneten Substanz ergab:

0·3118 Grm. Substanz gaben 0·2456 Kohlensäure und 0·0435 Wasser.

0·5006 Grm. Substanz gaben 0·2397 Silber.

0·3051 Grm. Substanz gaben 22·3 CC. Stickstoff bei 22·3° und 741.5 Mm.

In 100 Theilen:

C —	21·48
H —	1·55
N —	8·32
Ag —	47·88

Zweite Silberverbindung. Sie entsteht, wenn man eine mit Ammoniak abgesättigte Nicotinsäurelösung mit Silbernitrat versetzt und stellt einen voluminösen, aufgequollenen, in Wasser sehr schwer löslichen, ziemlich lichtbeständigen Niederschlag dar.

Die bei 110° getrocknete Substanz ergab folgende Zusammensetzung:

0·4235 Grm. Substanz gaben 0·2874 Grm. Kohlensäure und 0·0423 Grm. Wasser.

0·4235 Grm. Substanz gaben 0·2766 Grm. Silber.

0·3875 Grm. Substanz gaben 0·2520 Grm. Silber.

In 100 Theilen:

C —	18'52	—
H —	1·11	—
Ag —	65·31	65·64

Kalkverbindung. Nächst dem Platindoppelsalz ist diese Kalkverbindung die schönste, welche die Nicotinsäure liefert. Sie kann dargestellt werden, entweder durch directes, genaues Absättigen einer Nicotinsäurelösung mit Kalkmilch, oder durch Vermischen einer durch Ammoniak abgesättigten Nicotinsäurelösung mit einer concentrirten Chlorcalciumlösung.

Wenn die Flüssigkeiten concentrirt waren, so bilden sich dann, und zwar ziemlich bald, kleine, aber sehr rein ausgebildete, farblose, schiefe Prismen. War dagegen die Lösung angemessen

verdünnt, so entstehen grosse Krystalle von ausserordentlicher Schönheit, welche den Längendurchmesser von einem halben Zoll erreichen können.

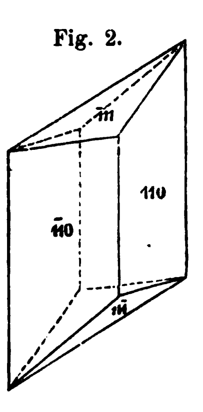
Einmal gebildet, sind sie im Wasser sehr schwer löslich. Auch die folgenden Angaben über ihre Messung verdanke ich Herrn Professor Ditscheiner.

Krystallsystem: schiefprismatisch.

Beobachtete Flächen $\bar{1}11$. 110.

		Beobachtet	Gefunden
$110:\bar{1}10$	=	72° 50′	—
$110.1\bar{1}0$	=	107 25	107° 10′
$110.\bar{1}11$	=	82 55	—
$\bar{1}10.\bar{1}11$	=	50 10	—
$\bar{1}11.\bar{1}1\bar{1}$	=	59 40	59° 10′

Fig. 2.



Die ziemlich stark glänzenden Flächen sind stark gestreift und trübten sich während der Winkelmessung ziemlich beträchtlich, so dass die gegebenen Winkelwerthe in ihren einzelnen Ablesungen um $^1/_2$ bis 1 Grad differirten.

Die Analyse der bei 120° getrockneten Substanz ergab:

I. 0·3235 Grm. Substanz gaben 0·6036 Grm. Kohlensäure und 0·0903 Grm. Wasser.

II. 0·3546 Grm. Substanz gaben 0·6617 Grm. Kohlensäure und 0·0910 Grm. Wasser.

III. 0·2886 Grm. Substanz gaben 0·5419 Grm. Kohlensäure und 0·0774 Grm. Wasser.

IV. 0·6568 Grm. Substanz gaben 0·1298 Grm. Kalk.

V. 0·4673 Grm. Substanz gaben 0·0898 Grm. Kalk.

VI. 0·7618 Grm. Substanz gaben 0·3593 Grm. schwefelsauren Kalk.

VII. 0·3124 Gr. Substanz gaben 32·8 CC. Stickstoff bei 16·5° C. und 750·5 Mm.

Zu den angeführten Analysen dienten Substanzen von drei verschiedenen Bereitungen.

In 100 Theilen:

	I.	II.	III.	IV.
C —	50·86	50·89	51·21	—
H —	3·10	2·85	2·98	—
N —	—	—	—	—
Ca —	—	—	—	14·11

	V.	VI.	VII.
C —	—	—	—
H —	—	—	—
N —	—	—	12·07
Ca —	13·72	13·87	—

Die Krystallwasserbestimmungen ergaben:

I. 1·4210 Grm. Substanz gaben bei 115° getrocknet 0·3027 Wasser.

II. 0·6445 Grm. Substanz gaben bei 115° getrocknet 0·1461 Wasser.

In 100 Theilen:

	I.	II.
H_2O —	22·01	22·66

Die Verbindungen der Nicotinsäure mit Baryum, Kalium, Natrium krystallisiren viel weniger gut und ich habe sie zur Analyse nicht weiter benutzt.

Ich habe es bis hierher verspart, aus den gefundenen Procenten der analysirten Salze Formeln zu entwickeln, und ich muss zu den nachstehenden im Voraus bemerken, dass ich mich zu ihrer Annahme erst entschlossen habe, als ich nach langer Rechnung fand, dass alle andern mit den Zahlen für die freie Säure durchaus nicht in Einklang zu bringen sind.

Die Verbindungen der Nicotinsäure sind, wenn man die Formel $C_{10}H_8N_2O_3$ zu Grunde legt, insofern ganz ungewöhnlich, als sie meistens das Verhältniss von zwei Molecülen Nicotinsäure zu drei Molecülen der damit vereinigten Säuren, Basen oder Salze aufweisen.

Ich darf auch nicht unerwähnt lassen, dass die Formel $C_6H_5NO_2$ nur im Stickstoffgehalt wesentliche Differenzen gegen die der Nicotinsäure aufweist. ($C_6H_5NO_2$ ist nämlich die Pyridincarbonsäure von Huber.) Aber diese lässt keine einfache Bil-

dungsgleichung aus dem Nicotin zu, während der Vorgang bei der Bildung einer Säure von der Formel $C_{10}H_8N_2O_3$ sehr einfach sich ausdrücken lässt durch:

$$C_{10}H_{14}N_2 + {}_6O = C_{10}H_8N_2O_3 + 3H_2O.$$

Damit stimmt auch die, wie schon gesagt, reichliche Ausbeute an dieser Verbindung überein, sowie ich deren Formel auch durch die weiter unten beschriebenen Zersetzungen stützen zu können glaube.

In ähnlicher Weise verhalten sich ferner nach Schützenberger (Annal. d. Chem. u. Pharm. 108 pag. 347) einige N_2 enthaltende Alkaloide bei der Oxydation mit salpetriger Säure. Sie liefern sauerstoffreichere, wenngleich noch basische Verbindungen, deren Kohlenstoffgehalt derselbe geblieben ist. (Oxy- und Bioxystrychnin und Oxycinchonin.)

Endlich sind auch viele der Verbindungen des Nicotins selbst so abweichend von der gewohnten Art zusammengesetzt, dass sich diese Abnormität auf die daraus entstehende Nicotinsäure nur zu übertragen scheint [1].

Die folgende Zusammenstellung der gefundenen mit den nach den Formeln $C_6H_5NO_2$ und $C_{10}H_8N_2O_3$ berechneten Zahlen möge darüber urtheilen lassen, ob ich die Formel $C_{10}H_8N_2O_3$ wählen durfte.

---

[1] Man kennt beispielsweise folgende Verbindungen des Nicotins:

$${}_2(C_{10}H_{14}N_2) + AgNO_3$$
$$C_{10}H_{14}N_2 + {}_2HCl + {}_2ptCl_2$$
$$C_{10}H_{14}N_2 + {}_4HCl + ptCl_2$$
$$C_{10}H_{14}N_2 + {}_4HCl + {}_2ptCl_2$$
$$C_{10}H_{14}N_2 + {}_2HgCl_2$$
$$C_{10}H_{14}N_2 + HgCy_2 + {}_2HgCl_2$$
$$C_{10}H_{14}N_2 + {}_2HCl + {}_5cdCl$$
$$C_{10}H_{14}N_2 + {}_2HJ + HgJ_2$$
$$C_{10}H_{12}Br_2N_2 + HBr + Br_2$$
$$C_{10}H_{14}N_2 + HCl + {}_4HgCl_2.$$

Nicotinsäure ($C_{10}H_8N_2O_3$).

$C_6H_5NO_2$	Gefunden im Mittel	$C_{10}H_8N_2O_3$
C — 58·53	59·02	58·82
H — 4·06	4·12	3·92
N — 11·38	13·87	13·72.

Salpetersäureverbindung $2(C_{10}H_8N_2O_3)+3NHO_3$.

$C_6H_5NO_2+NRO_3$	Gefunden im Mittel	$2(C_{10}H_8N_2O_3)+3NHO_3$
C — 38·71	40·28	40·20
H — 3·22	3·32	3·18
N — 15·05	16·40	16·41.

Die lufttrockene Substanz wäre $2(C_{10}H_8N_2O_3)+3NHO_3+3\frac{1}{2}H_2O$.

	Gefunden	Berechnet
H_2O —	9·35	9·40.

Salzsäureverbindung $2(C_{10}H_8N_2O_3)+3HCl$.

$C_6H_5NO_2+HCl$	Gefunden	$2(C_{10}H_8N_2O_3)+3HCl$
C — 42·48	46·50	46·37
H — 3·54	3·61	3·66
N — 8·26	10·91	10·82
Cl — 20·96	20·15	20·57.

Bromwasserstoffsaure Verbindung $2(C_{10}H_8N_2O_3)+3HBr$.

$C_6H_5NO_2+HBr$	Gefunden	$2(C_{10}H_8N_2O_3+3HBr$
C — 35·29	37·14	36·86
H — 2·94	3·25	2·91
N — 6·86	8·57	8·60
Br — 39·21	37·21	36·86.

Salzsaures Platindoppelsalz $2(C_{10}H_8N_2O_3)+3HCl+3ptCl_2$.

$C_6H_5NO_2+HCl+ptCl_2$	Gefunden	$2(C_{10}H_8N_2O_3)+3HCl+3ptCl$.
C — 21·87	23·22	23·37
H — 1·82	2·06	1·85
N — 4·25	5·49	5·45
Pt — 29·98	29.29	28·84
Cl — 32·35	31·56	31·12.

Das lufttrockene Salz hätte die Zusammensetzung

$$2(C_{10}H_8N_2O_3)+3HCl+3ptCl_2+4H_2O.$$

	Berechnet	Gefunden
H_2O —	6·55	6·48.

Erste Silberverbindung $2(C_{10}H_7AgN_2O_3)+3AgNO_3$

$C_6H_4NO_2Ag$		Gefunden	$2(C_{10}H_7AgN_2O_3)+3AgNO_3$
C —	31·30	21·48	21·20
H —	1·74	1·55	1·23
Ag —	46·95	47·88	47·70
N —	6·08	8·32	8·65.

Zweite Silberverbindung $2(C_{10}H_7AgN_2O_3)+3Ag_2O.$

	Gefunden	Berechnet
C —	18·52	18·21
H —	1·11	1·06
Ag —	65·47	65·55.

Kalkverbindung $2(C_{10}H_7caN_2O_3)+3(C_{10}H_6CaN_2O_3).$

$C_6H_4caNO_2$		Gefunden	Berechnet
C —	50·70	50·98	51·19
H —	2·81	2·94	2·73
N —	9·85	12·07	11·94
Ca —	14·09	13·90	13·77.

Das lufttrockene Salz wäre:

$$2(C_{10}H_7caN_2O_3)+3(C_{10}H_6CaN_2O_3)+19H_2O$$

	Gefunden	Berechnet
H_2O —	22·33	22·59.

Die Nicotinsäure erleidet eine für ihre Constitution bezeichnende Zersetzung, wenn man ihr Kalksalz mit etwas zugemischtem Ätzkalk trocken destillirt. — Die Operation macht man zweckmässig mit nicht zu grossen Mengen auf einmal.

Man erhält ein bräunliches, trübes, öliges Destillat vom Geruche der Dippel'schen Basen. Dasselbe wurde so gereinigt, dass man es zuerst mit Wasserdämpfen umdestillirte, aus dem trüben, mit Öltropfen erfüllten Destillat durch starke Ätzlauge die Base wieder abschied, die durch eine Bürette getrennte, nunmehr schon sehr wenig gefärbte Flüssigkeit mit Ätzkali trocknete und aus einem Retörtchen mit dem Thermometer umdestillirte.

Bis auf einen ganz kleinen Theil ging die neue Base zwischen 115—122° über, war vollständig ungefärbt, in Wasser ganz löslich, und ergab bei der Analyse die Procentgehalte des Pyridins.

Auch die übrigen vergleichenden Reactionen bestätigten die Identität mit dieser Verbindung[1].

Die Analyse ergab:

0·2345 Grm. Substanz gaben 0·6519 Kohlensäure und 0·1372 Wasser.

0·2173 Grm. Substanz gaben 34·7 CC. Stickstoff bei 21·0° C. 747·6 Mm.

In 100 Theilen:

Gefunden	C_5H_5N(Pyridin)
C — 75·82	C — 75·94
H — 6·50	H — 6·32
N — 17·88	N — 17·72.

Schliesst man Nicotinsäure mit Wasser und einem Überschuss von Brom (etwa ein Theil Nicotinsäure zu fünf Theilen Brom) in eine Röhre ein und erhitzt durch einige Stunden auf 120°, so findet man das Brom zum allergrössten Theil verschwunden, statt desselben am Boden der Röhre ein schweres Öl und darüberstehend eine gelbliche Flüssigkeit. Beim Öffnen der Röhre entweicht mit Heftigkeit ein Gas und der Röhren-

---

[1] Anderson (Annal. d. Chem. u. Pharm. 75 pag. 82) hatte vermuthet, dass diese Base Äthylamin sei.

inhalt zeigt nun den bekannten süsslichen Geruch des Bromoforms.

In der That ist es leicht, die ölige Flüssigkeit als Bromoform nach allen ihren Eigenschaften zu erkennen. Die davon getrennte wässerige Lösung gibt beim Eindampfen einen Salzrückstand, der nach dem Umkrystalliren aus Wasser, worin er sehr löslich ist, in vollständig farblosen Krystallhäuten wiedererhalten wurde.

Mit Kalk erhitzt, zeigte diese so erhaltene Substanz sofort den Geruch des Pyridins; und die Analyse dieser Verbindung erwies sie als bromwasserstoffsaures Pyridin.

Die bei 100° getrocknete Substanz ergab:

0·5271 Grm. Substanz gaben 0·6177 Bromsilber.

0·3364 Grm. Substanz gaben 0·4678 Kohlensäure und 0·1184 Wasser.

0·4484 Grm. Substanz gaben 35·3 CC. Stickstoff bei 18·5° und 746 Mm.

In 100 Theilen:

Gefunden	C_5H_5N+HBr
C — 37·75	C — 37·50
H — 3·91	H — 3·75
N — 8·90	N — 8·75
Br — 49·87	Br — 50·00

Die Zersetzung der Nicotinsäure durch Brom bei Gegenwart von Wasser lässt demnach die Gleichung zu:

$$C_{10}H_8N_2O_3+H_2O+11Br = C_5H_5N, HBr+3CHBr_3+2CO_2+N+HBr.$$

Die Nicotinsäure wird durch Wasserstoff, der sich aus Natriumamalgam entwickelt, unter Entwicklung eines ammoniakalischen Geruches zersetzt. Das dabei entstehende Product konnte ich inzwischen nicht rein erhalten.

Mit Jodwasserstoffsäure von 1·57 spec. Gewicht mehrere Stunden lang gekocht, blieb die Nicotinsäure als solche unverändert.

Die braune, jodhaltige Flüssigkeit gab beim Abdampfen zuerst dunkle metallgrüne Krystalle eines (vielleicht als Super-

jodid der Nicotinsäure anzusprechenden) Körpers, der sich beim Liegen an der Luft unter Entweichen von Jod in die farblose, jodwasserstoffsaure Verbindung der Nicotinsäure verwandelte. Entzieht man im vorhinein der stark jodhaltigen Flüssigkeit mit Äther das Jod, so erhält man sogleich die letztere Verbindung.

Ein Versuch durch die Einwirkung von Acetylchlorid auf Nicotinsäure die Anzahl der ersetzbaren OH-Molecüle zu bestimmen, hatte kein Resultat. Das Acetylchlorid wirkt auf Nicotinsäure gar nicht ein.

Durfte ich nun nach diesen meinen Erfahrungen die Nicotinsäure als nach der angegebenen Formel zusammengesetzt betrachten, so war das Nicotin im Stande, bei der Oxydation mit verschiedenen Oxydationsmitteln zwei bestimmte Säuren zu liefern:

die Pyridincarbonsäure $C_6H_5NO_2$ und die
Nicotinsäure $C_{10}H_8N_2O_3$.

Ein Vergleich der beiden Säuren, die bei der Zersetzung beide Pyridin liefern, schien mir daher sehr nöthig zu sein, und ich musste mich entschliessen, auch durch die Oxydation des Nicotins mit Chromsäure die Huber'sche Pyridincarbonsäure zu gewinnen.

Ich habe zu diesem Ende 20 Grm. Nicotin mit 100 Grm. saurem chromsaurem Kali, 200 Grm. Schwefelsäure und 400 CC. Wasser, in einer Retorte mit Rückflusskühler so lange gekocht, bis der Geruch des Nicotins auf Zusatz von Kalilauge zu der schliesslich grün gewordenen Flüssigkeit, beim Erwärmen nicht mehr auftrat.

Hierauf wurde, da es sich zeigte, dass die Flüssigkeit noch etwas freie Chromsäure enthielt, Schwefelwasserstoff eingeleitet, um diese zu Chromoxyd zu reduciren.

Das Chromoxyd fällte ich mit Vermeidung eines Überschusses durch Natronlauge, filtrirte und dampfte die Flüssigkeit auf dem Wasserbade bis zur feuchten Salzmasse ein, die ich in einem Verdrängungsapparat mit Alkohol erschöpfte.

Ich erhielt dadurch, wie ich mich bald überzeugte, die ganze organische Substanz in der alkoholischen Lösung.

Hierauf wurde der Alkohol verjagt und nun gesucht, die wahrscheinlich vorhandene Säure in eine unlösliche Verbindung überzuführen, aus der sie wieder abzuscheiden war. Ein Paar Vorversuche zeigten mir, dass sich für diesen Zweck eine Kupferverbindung darbietet, die als lichtblauer Niederschlag sofort beim Vermischen meines, vom Alkohol befreiten Rückstandes mit Kupfervitriollösung entstand. (Eine mit Ätzkali vorsichtig abgesättigte Nicotinsäurelösung gibt auch mit Kupfervitriollösung einen bläulichen krystallinischen Niederschlag einer Kupferverbindung.

Der gut ausgewaschene Niederschlag wurde dann in warmem Wasser vertheilt und mit Schwefelwasserstoff zerlegt.

Das Filtrat vom Schwefelkupfer gab nun beim Eindampfen eine Krystallisation, die schon durch ihr Äusseres lebhaft an rohe Nicotinsäure erinnerte.

Mit Thierkohle gereinigt, war die Substanz der Nicotinsäure zum Verwechseln ähnlich, zeigte alle ihre Reactionen, gab mit Leichtigkeit die zwei characteristischen, schön krystallisirten Verbindungen mit Kalk und Platinchlorid, und endlich zeigten einige quantitative Bestimmungen, dass das Product der Oxydation des Nicotins mit Chromsäure identisch mit dem aus der Salpetersäurebehandlung hervorgehenden, d. h. mit Nicotinsäure sei.

Die Verbrennung der reinen bei 105° getrockneten Säure gab:

0·3115 Grm. Substanz gaben 0·6733 Kohlensäure und 0·1133 Wasser.

0.3019 Grm. Substanz gaben 36·6 CC. Stickstoff bei 21·0° und 754 Mm.

In 100 Theilen:

Gefunden.	$C_{10}H_8N_2O_3$
C — 58·95	C — 58·82
H — 4·04	H — 3·92
N — 13·68	N — 13·72

Das bei 110° getrocknete Kalksalz ergab bei der Analyse:

0·3234 Grm. Substanz gaben 0·5959 Kohlensäure und 0·0888 Wasser.

0·5864 Grm. Substanz gaben 0·2973 schwefelsauren Kalk.

II. 0·4683 Grm. Substanz gaben 0·2364 schwefelsauren Kalk.

In 100 Theilen:

Gefunden		Kalksalz d. Nicotinsäure
	II.	
C — 50·25		C — 50·57
H — 3·05		H — 2·63
Ca — 14·91	14.85	Ca — 14·74

Wenn Huber für seine Säure die Formel $C_6H_5NO_2$ aufstellen konnte, so scheint er dazu durch die Zersetzung seines Productes in Pyridin geleitet worden zu sein. Diese Zersetzung wäre allerdings sehr glatt:

$$C_6H_5NO_2 = C_5H_5N + CO_2.$$

Dieser einfachen Zersetzung widerspricht indess die verhältnissmässig geringe Ausbeute an Pyridin.

Ich habe, um mir dieselbe zu erklären, auch das Gas aufgefangen, welches sich während der Zersetzung der Nicotinsäure zu Pyridin constant mit entwickelt, und fand, dass es fast reiner Stickstoff ist, während der rückständige, von ausgeschiedener Kohle grauweiss gewordene Kalk zum grossen Theil kohlensauer geworden war.

Es scheint daher, dass das Molecül der Nicotinsäure eine viel tiefer eingreifende Zersetzung erfährt und nur die Hälfte seines Kohlenstoffgehaltes als Pyridin austritt.

Es ist ferner hervorzuheben, dass die Formel $C_6H_5NO_2$ von der, die ich auf Nicotinsäure berechnen muss: $C_{10}H_8N_2O_3$ nur in den Procenten des Stickstoffes erheblich differirt, während Kohlenstoff und Wasserstoff nur wenig verschiedene Beträge geben.

$C_{10}H_8N_2O_3$	$C_6H_5NO_2$
C — 58·82	C — 58·53
H — 3·92	H — 4·06
N — 13·72	N — 11·38

Endlich fallen die Stickstoffbestimmungen der Nicotinsäure nach der Will-Fresenius'schen Methode nicht so genau aus als nach der Dumas'schen, und es wäre möglich, dass sich Huber dieser ersteren bedient hat.

Die eigenthümlichen Verbindungsverhältnisse der Nicotinsäure, die es trotz der Leichtigkeit, mit der sie salzartige Verbindungen bildet, schwer machen, sich auch nur über ihre Basicität ein sicheres Urtheil zu bilden, lassen einen Versuch, sie in einer Structurformel zu gliedern, noch etwas willkürlich erscheinen.

Einen zuverlässigen Anhaltspunkt müsste eine Synthese des Nicotins geben, für die man wahrscheinlich in der Bildung des Aldehydins aus Crotonaldehyd [1] ein Vorbild hat:

$$\underbrace{2(C_4H_6O)}_{\text{Crotonaldehyd}}+NH_3 = \underbrace{C_8H_{11}N}_{\text{Aldehydin}}+2H_2O$$

Die Aufgabe, in ähnlicher Weise Nicotin zu erzeugen, dürfte sich lösen lassen, wenn man sich den Aldehyd der Brenzweinsäure verschaffen kann. Dann könnte man haben:

$$\underbrace{2(C_5H_8O_2)}_{\text{Aldehyd der Brenzweinsäure}}+2NH_3 = \underbrace{C_{10}H_{14}N_2}_{\text{Nicotin}}+4H_2O.$$

In dieser Richtung gedenke ich meine Versuche fortzusetzen.

Wien, Laboratorium des Prof. Hlasiwetz.

---

[1] A. Baeyer. Berichte der chem. Gesellsch. Bd. II. p. 399.

Über das Excretin.

Von Dr. **Friedrich Hinterberger.**

Das Excretin wurde von Marcet[1] in den Excrementen des Menschen entdeckt und für einen schwefelhaltigen Körper von der Formel $C_{78}H_{156}SO_2$ erklärt.

Bei einer Untersuchung meiner frischen Excremente, welche ich seit 3 Jahren fortsetzte, erhielt ich von 100 Pfund der frischen Excremente 8 Gramm reines Excretin. Das Excretin der verschiedenen Darstellungsweisen enthielt manchmal 2·8 und auch mehr Procente Schwefel und häufig 0·6 bis 7 Pct. Stickstoff. Dieses Verhalten, sowie der Umstand, dass meine Analysen mit der Analyse des Marcet nicht stimmten, brachten mich zu der Vermuthung, dass man es hier mit einem unreinen Körper zu thun habe.

Es ist mir in der That gelungen, das Excretin frei von Schwefel und Stickstoff zu erhalten und mit Hilfe einer Bromverbindung die empirische Formel des Excretins festzustellen. Die Darstellung bestand in Folgendem: 214 Grm. der frischen Excremente[2] wurden täglich mit 350 CC. Weingeist von 90 Vol. Pct. ausgekocht. Hiezu diente eine Flasche von Weissblech von 16 Ctm. Höhe und 11 Ctm. Durchmesser, welche mit einem Rückflusskühler verbunden war. Die erhaltene weingeistige Lösung wurde auf ein faltiges Filter gegossen, und der Rückstand in der Flasche nochmals mit 175 CC. Weingeist von 90 Vol. Proc. ausgezogen. Die weingeistige Lösung ist dunkelbraun, und setzt nach 8tägigem Stehen einen Niederschlag ab, welcher im trockenen Zustande beinahe schwarz ist. Dieser Niederschlag besteht

[1] Chem. Centr. 1860, 586. Gmelin VII Bd. 2193.

[2] 214 Grm. ist das Mittel von 130 gewogenen Stühlen.

aus Excretin und dem Magnesiumsalze einer Gallensäure oder einer neuen Säure. Dieses Magnesiumsalz ist sehr schwer im Weingeiste löslich, lässt sich durch Krystallisation von dem leicht löslichen Excretin trennen, und lieferte bis jetzt die Formel

$$C_{56}H_{113}MgNO_{11}.$$

Wenn es sich darum handelt, reines Excretin darzustellen, bekümmert man sich nicht um den Niederschlag, welcher sich freiwillig aus der weingeistigen Lösung der Excremente absetzt Man sammelt vielmehr diesen Niederschlag auf einem Filter, versetzt das Filtrat mit 20 CC. Kalkmilch, welche etwa 1·5 Grm. Kalk enthält, und verdünnt die erhaltene Flüssigkeit mit 500 CC. Wasser. Es entsteht ein lichtbrauner Niederschlag, welcher neben anderen Substanzen das Excretin enthält. Dieser Niederschlag wird nach 24 Stunden auf einem Filter gesammelt, mit Wasser ausgewaschen und an der Luft getrocknet.

Von 38 Pfd. der frischen Excremente erhält man 142 Grm. des Kalkniederschlages, welcher das Excretin enthält.

35 Grm. des lufttrockenen Kalkniederschlages kocht man in einer Blechflasche unter Anwendung des Rückflusskühlers mit einer Mischung von 75 CC. Weingeist von 90 Vol. Pct. und 75 CC. Äther, filtrirt, und kocht den ungelösten Rückstand abermals mit 75 CC Weingeist und 75 CC Äther aus.

Lässt man das gelbe Filtrat 8 Tage bei einer Temperatur unter 0° ruhig stehen, so scheidet sich alles Excretin in Form von gelben nadelförmigen Krystallen ab, welche zu halbkugelartigen Gruppen vereinigt sind.

Dieses rohe Excretin sammelt man auf einem Filter, wäscht es nicht mit Weingeist aus, und trocknet es, ohne zu pressen, an der Luft.

Hat man etwa 5 Grm. des rohen Excretins, so reinigt man dasselbe durch Umkrystallisiren. Hiezu benützt man Weingeist von 95 Vol. Pct. und Blutkohle, wiederholt dasselbe 4—5mal und sorgt dafür, dass die Krystallisation immer bei einer Temperatur unter 0° vor sich geht.

Erhitzt man das so erhaltene Excretin mit Kalium in einer kleinen Eprouvette, und behandelt den Rückstand nach dem Verbrennen des Kaliums mit wenig Wasser, so erhält man eine

Lösung, welche eine verdünnte Lösung von Nitroprussidnatrium nicht violett färbt, mithin frei von Schwefel ist.

Unreines schwefelhaltiges Excretin lässt sich auch durch Destillation mit der 10fachen Menge Kalk schwefelfrei darstellen, scheint aber hiebei die Eigenschaft, zu krystallisiren, einzubüssen, ohne seine Zusammensetzung zu ändern.

Behufs der Elementaranalyse wurde das Excretin über Schwefelsäure getrocknet und im Platinschiffchen unter schliesslicher Anwendung von Sauerstoffgas verbrannt.

I. 0·3024 Grm. Substanz gaben 0·9035 Grm. Kohlensäure und 0·3374 Grm. Wasser.

II. 0·3534 Grm. Substanz gaben 1·057 Grm. Kohlensäure und 0·401 Grm. Wasser.

III. 0·3209 Grm. Substanz gaben 0·9692 Grm. Kohlensäure und 0·361 Grm. Wasser.

Aus diesen Daten berechnet sich als einfachste Formel $C_{20}H_{36}O$, nach welcher sich Rechnung und Versuch in folgender Weise vergleichen:

	Berechnet	Gefunden			Im Mittel
		I	II	III	
C_{20}	— 82·19	81·48	81·57	82·37	81·81
H_{36}	— 12·33	12·39	12·60	12·49	12·50
O	— 5·48	—	—	—	—

Das Cholestearin $C_{26}H_{44}O$ kommt dem Excretin in der procentischen Zusammensetzung nahe. Das Cholestearin löst sich aber schwerer im Eisessig, als das Excretin. Die Lösung des Cholestearins im Eisessig zeigt unter dem Mikroskope schöne seidenglänzende sechsseitige Prismen [1], während die Lösung des Excretins im Eisessig kugelige Massen bildet. Das Cholestearin gibt mit Brom ein Substitutionsproduct mit 7 Atomen Brom und ein Additionsproduct mit 2 Atomen Brom [2], während das Excretin sich in folgender Weise verhält:

Behandelt man das Excretin mit Brom, so entsteht unter Erwärmung und Entwicklung von Bromwasserstoff eine schwarz-

[1] Annal. d. Chem. u. Pharm. Bd. 127 S. 107.

[2] Annal. d. Chem. u. Pharm. Bd. 146 S. 175.



braune Flüssigkeit, welche beim Übergiessen mit Äther zu einer braunen harzartigen Masse zusammenballt. Kocht man diese Masse nach dem Verjagen des freien Broms mit einer Mischung von Alkohol und Äther, so löst sie sich. Die Lösung scheidet beim freiwilligen Verdunsten harte spröde, zu Kugel vereinigte Krystalle ab, welche durch Umkrystallisiren farblos werden. Das erhaltene Bromproduct ist unlöslich im Wasser, schwer löslich im Weingeiste, leicht löslich im alkoholhaltigen Äther und schmilzt beim Erhitzen im Wasserbade.

Die bei 100° getrocknete Substanz wurde mit chromsaurem Blei verbrannt, und zur Ermittlung des Bromgehaltes mit Kalk geglüht.

I. 0·4746 Grm. Substanz gaben 0·9388 Grm. Kohlensäure und 0·3271 Grm. Wasser.

II. 0·3574 Grm. Substanz gaben 0·298 Grm. Bromsilber.

Diese Analysen führen zur Formel $C_{20}H_{34}Br_2O$, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

	Berechnet	Gefunden I	Gefunden II
C_{20}	— 53·33	53·94	—
H_{34}	— 7·55	7·65	—
Br_2	— 35·55	—	35·47
O	— 3·57	—	—

Während es mithin leicht ist, aus dem Excretin ein krystallisirtes Bibromexcretin darzustellen, gelang es nicht, das Chlorexcretin zu bereiten. Versetzt man nämlich die weingeistige Lösung des Excretins mit Wasser, fügt zur erhaltenen Emulsion Chlorwasser und schüttelt, so erhält man beim Verdunsten eine farblose syrupartige Masse.

Es ging mir leider das Materiale aus, um weitere Versuche anzustellen, um über die Structur des Excretins ins Reine zu kommen. Ich kann daher unterdessen nur die empirische Formel des reinen Excretins $C_{20}H_{36}O$ und die Formel des daraus dargestellten Bibromexcretins $C_{20}H_{34}Br_2O$ als Endresultate dieser Arbeit anführen.

Resultate einer Experimentaluntersuchung über das Verhalten nicht leitender Körper unter dem Einflusse elektrischer Kräfte.

Von **Ludwig Boltzmann.**

Vorläufige Mittheilung.

Wird der Raum zwischen zwei Condensatorplatten statt mit Luft mit einer andern isolirenden Substanz ausgefüllt, ohne dass sich die Distanz der Platten ändert, so wird die Capacität des Condensators nach der Theorie der Dielektricität $D = 1 + 4\pi\varepsilon$ mal so gross. D bezeichnen wir als die Dielektricitätsconstante des Isolators. ε ist die von Helmholtz (Borchardt's Journal Bd. 72 Seite 115) eingeführte Grösse. Für Luft setzen wir $D = 1$. Aus dieser Theorie folgt aber noch eine andere merkwürdige Consequenz, die bisher nicht bemerkt worden zu sein scheint, nämlich dass elektrische Kräfte auf einen Nichtleiter, ohne dass sich derselbe elektrisirt, blos vermöge seiner dielektrischen Polarisation, ganz erhebliche Anziehungen ausüben müssen; und zwar finde ich aus der Helmholtz'schen Theorie, dass eine nicht leitende Kugel im homogenen elektrischen Felde $\frac{D-1}{D+2}$ mal so stark angezogen werden muss, als eine gleich grosse leitende Kugel unter Einfluss derselben Kräfte, wenn letztere isolirt und ursprünglich unelektrisch ist, so dass sie nur durch Induction elektrisch wird. Ich machte nun zwei Versuchsreihen. Bei der ersten wurden zwischen zwei Condensatorplatten möglichst planparallele Platten verschiedener isolirender Substanzen gebracht. Der Condensator wurde mit einer Daniell'schen Batterie geladen, seine Capacität sowohl wenn Luft als auch wenn der Isolator zwischen

den Platten war, mittelst eines Thomson'schen Quadrantelektrometers bestimmt. Die isolirenden Platten lagen locker zwischen den Condensatorplatten, die noch dazwischen befindliche Luftschicht wurde ebenfalls der Rechnung unterzogen. Ebenso wurde wegen des Randes eine freilich nur annäherungsweise richtige Correction angebracht. Für Hartgummi, Schwefel, Paraffin und Colophonium gaben verschieden starke Ladungen, verschiedene Ladungsdauern, von 3 Minuten bis Bruchtheilen einer Secunde, verschieden dicke isolirende Platten und verschiedene Distanzen der Condensatorplatten constante Werthe für D und zwar fand ich

für Hartgummi . . . $D = 3{\cdot}17,\ 3{\cdot}11,\ 3{\cdot}20$;
für Schwefel . . . . $D = 3{\cdot}85,\ 3{\cdot}83$;
für Paraffin . . . . $D = 2{\cdot}34,\ 2{\cdot}28$;
für Colophonium . . $D = 2{\cdot}54,\ 2{\cdot}57$.

Die beiden angeführten Zahlen beziehen sich immer auf zwei verschiedene untersuchte Platten von verschiedener Dicke. Andere Versuche, wobei die isolirende Platte zwischen zwei Quecksilberflächen gebracht und die Capacität des so gebildeten Condensators untersucht wurde, ergaben

für Hartgummi . . . $D = 3{\cdot}05,\ 3{\cdot}10,\ 3{\cdot}24$;
für Paraffin . . . . $D = 2{\cdot}33,\ 2{\cdot}31$.

Die Zahl für Hartgummi ist wahrscheinlich deshalb etwas zu klein, weil das Quecksilber sich am Rande durch Capillarität nicht gut an das Hartgummi anlegte. Für Glas, Stearin und Guttapercha dagegen scheint D selbst für so geringe Ladungen nicht constant zu sein, sondern namentlich mit wachsender Ladungsdauer rasch zuzunehmen.

Die zweite Versuchsreihe bestätigte die zuletzt bemerkte Consequenz der Dielektricitätstheorie und zwar wurde sie hauptsächlich angestellt, um zu beweisen, dass die Veränderung der Capacität von Condensatoren durch Zwischenschichten in einer wirklichen Elektrisirung der kleinsten Theile derselben (oder Drehung der bereits elektrisirten) ihren Grund hat, nicht aber darin, dass die Elektricität etwa durch verschiedene Körper verschieden hindurch wirkt.

Es wurde eine Kugel aus dem zu untersuchenden isolirenden Materiale an vollkommen isolirenden Fäden an den einen Hebelarm einer sehr empfindlichen Drehwage gehängt, deren anderer Hebelarm mit einem Spiegel äquilibrirt war, mittelst dessen in der bekannten Weise die kleinsten Drehungen der Drehwage abgelesen werden konnten. In einiger Entfernung von der isolirenden Kugel stand eine fixe Kugel, die durch Funken einer Influenzmaschine geladen und wieder entladen werden konnte. Die ganze Drehwage befand sich in einer bis auf die erforderlichen Schlitze verschlossenen Schachtel aus Goldpapier, aus der nur die isolirende Kugel an ihrem Faden heraushing. Früher war sorgfältig geprüft worden, dass weder der Faden, an dem die Kugel hing, noch die in der Schachtel befindlichen Bestandtheile eine Einwirkung erfuhren, dass also der bei Elektrisirung der fixen Kugel eintretende Ausschlag der Drehwage nur von der Wirkung der Elektricität der fixen Kugel auf die isolirende herrühren konnte. Dass letztere nicht schon früher elektrisch war und sich auch nicht merklich dauernd elektrisirte, wurde constatirt, indem die fixe Kugel bald mehrmal nacheinander positiv, bald abwechselnd positiv und negativ geladen wurde. Genau an die Stelle der nicht leitenden Kugel konnte eine gleichgrosse leitende (ursprünglich unelektrische) Kugel gehängt werden, um die Einwirkung, welche beide erfuhren, zu vergleichen. Wenn auch die Schlagweite gleich blieb, so war es doch nicht möglich, der fixen Kugel bei den verschiedenen Versuchen, die theils nach Einhängung der isolirenden, theils nach Einhängung der leitenden, aber isolirten Kugel gemacht wurden, immer genau dieselbe Elektricitätsmenge zuzuführen. Um den daherrührenden Fehler corrigiren zu können, war die fixe Kugel mit einer zweiten fixen leitend verbunden, der eine ganz ähnliche Drehwage (aber mit leitend mit der Erde verbundener Kugel) gegenüber stand.

Der Ausschlag der zweiten Drehwage diente als Mass der mitgetheilten Elektricitätsmenge. Das Verfahren war nun folgendes: In die erste Drehwage wurde die nicht leitende Kugel eingehängt. Nun liess man einen Funken überspringen, welcher zunächst die beiden fixen Kugeln elektrisirte. Durch ihre Wirkung auf die Hängenden geriethen die beiden Drehwagen in

Schwingungen. Da sie nicht rasch genug zur Ruhe kamen, wurde ihr Ausschlag in bekannter Weise aus mehreren Ablesungen berechnet. Da die Ausschläge sehr klein waren, konnten sie als der Kraft proportional betrachtet werden. Den Ausschlag der ersten dividirt durch den der zweiten Drehwage bezeichne ich kurz als „die Anziehung der isolirenden Kugel". Jetzt wurde an die Stelle der nichtleitenden die gleichgrosse leitende Kugel gehängt. Der Ausschlag der ersten Drehwage dividirt durch den der zweiten soll jetzt „die Anziehung der leitenden Kugel" heissen. Der Quotient der Anziehung der nichtleitenden Kugel in die der leitenden ist jedesmal die in der folgenden Tabelle angeführte Zahl. Die Zahlen dieser Tabelle geben also an, um wie vielmal die leitende, aber isolirte Kugel stärker angezogen wird als eine gleich grosse unter denselben Umständen befindliche nichtleitende. Dieser Quotient war oft von der Zeit der Einwirkung abhängig.

	Zeit der Einwirkung				
	0'9	1'8	22½'	45'	90'
Schwefel	—	2·125	—	2·110	—
Hartgummi......	—	2·064	—	2·094	—
Paraffin.........	2·980	2·920	—	1·420	—
Colophonium	2·140	1·927	1·730	1·700	1·650

Um schon aus dieser vorläufigen Notiz eine beiläufige Schäzzung der von mir erzielten Genauigkeit möglich zu machen, theile ich die Details für die erste in der obigen Tabelle enthaltene Mittelzahl mit. Die Anziehung der Schwefelkugel 5mal gemessen ergab sich zu

+ + — — +

0·560, 0·547, 0·548, 0·562, 0·559 Mittel 0·555.

Die Anziehung der gleich grossen leitenden Kugel aber war

+ + — — +

1·175, 1·180, 1·188, 1·173, 1·179 Mittel 1.179.

Die darüber stehenden Zeichen geben an, mit welcher Elektricität die fixen Kugeln geladen wurden. Der Quotient ist

$$\frac{1\cdot179}{0\cdot555} = 2\cdot125.$$

Nach der Dielektricitätstheorie sollten die in der obigen Tabelle enthaltenen Zahlen den Werth $\frac{D+2}{D-1}$ haben; also wenn man die aus der ersten Versuchsreihe von mir gefundenen Zahlen zu Grunde legt

für Schwefel	2·06
für Hartgummi	2·39
für Paraffin	3·28
für Colophonium . . .	2·93.

Die Zahl für Schwefel zeigt eine genügende Übereinstimmung; für denselben scheint also D innerhalb weiter Grenzen constant zu sein. Hartgummi wird bereits merklich stärker angezogen; für denselben scheint also D, folglich auch ε mit wachsender Ladung zu wachsen. Noch weit mehr gilt dies vom Colophonium und Paraffin, und zwar ist bei den beiden letzten D von der Zeit der Einwirkung abhängig. Je länger die elektrischen Kräfte wirken, desto bedeutender wird die dielektrische Polarisation. Leider gestattete mein, in Eile zusammengestellter Apparat in dieser Hinsicht keine sehr grosse Mannigfaltigkeit; auch konnte ich die Stärke der elektrisirenden Kraft nicht genügend variiren, um mit der Drehwage allein die Abhängigkeit des D von derselben zu constatiren. Ich glaube aber, dass meine Methode, die Anziehung isolirender Körper durch elektrische Kräfte zu prüfen, unter den verschiedensten Verhältnissen durchgeführt, im Stande wäre, noch reichen Aufschluss über das bisher so wenig erforschte Verhalten der Isolatoren im elektrischen Felde zu liefern.

Die erste Versuchsreihe führte ich im Laboratorium des Hrn. Geheimrath Helmholtz in Berlin, die zweite in dem des Hrn. Professor Töpler zu Graz aus, und ich sage den beiden Leitern dieser Institute den wärmsten Dank für die Zuvorkommenheit, mit der sie mir die Räumlichkeiten, Apparate etc. ihrer Institute zur

Verfügung stellten. Zu besonderem Danke bin ich auch noch Hrn. Dr. Albert v. Ettingshausen, Assistenten für Physik an der Grazer Universität, verpflichtet, welcher mich sowohl bei der Zusammenstellung der Apparate, als auch bei den Ablesungen (da immer in zwei Fernröhren gleichzeitig abgelesen werden musste) mit nicht geringen Opfern von Zeit und Mühe unterstützte.

Die hier mitgetheilten Zahlen gewinnen ein erhöhtes Interesse, wenn sie mit der Arbeit Maxwell's „A dynamical theory of the electromagnetic field“, Transactions of the Royal Society of London 1865, Part I, pag. 459 verglichen werden. Daselbst stellt nämlich Maxwell die Hypothese auf, dass Licht und Elektricität verschiedene Bewegungsformen eines und desselben Mediums sind, die sich beide aus den Bewegungsgleichungen, die er für jenes Medium aufstellt, ableiten lassen.

Aus diesen Bewegungsgleichungen folgt zwischen der Dielektricitätsconstante D und dem Brechungsindex i irgend einer Substanz die Relation

$$i = \sqrt{D\mu}$$

(siehe Maxwell's Gleichung 80). μ ist der Coëfficient der magnetischen Induction der betreffenden Substanz. Derselbe ist allerdings für keine der von mir untersuchten Substanzen bekannt. Doch lässt sich leicht zeigen, dass er unmöglich erheblich von dem der Luft verschieden sein kann; dass er also nahe gleich Eins ist, wenn man wieder den für Luft gleich Eins setzt. Die Vergleichung der Formel Maxwell's mit der Helmholtz'schen Formel für die Lichtgeschwindigkeit (Borchardt's Journal Bd. 72, S. 127) zeigt uns, dass μ der von Helmholtz eingeführten Grösse $1+4\pi\vartheta$ proportional ist. ($4\pi\varepsilon$ und $1+4\pi\varepsilon$ sind bei Maxwell identisch, da man aus Helmholtz's Theorie die Maxwell'sche erhält, wenn man den absoluten Werth von ε schon für Luft, also auch die andern Isolatoren sehr gross voraussetzt.) Die Polarisationsconstante ϑ ist nach Weber selbst für Wismuth nur $\frac{1}{400000}$ dividirt durch die Dichte des Wismuth. Aber selbst wenn man diese Zahl für zu unsicher hält, um weitere Schlüsse darauf zu bauen, so folgt schon aus dem Umstande, dass eine

Eisenkugel nach allen Beobachtungen viel stärker als 10000mal so stark angezogen wird, als eine gleich grosse Wismuthkugel, die ausserordentliche Kleinheit des ϑ. Setzt man nämlich selbst für Eisen $\vartheta = \infty$, so folgt daraus für Wismuth

$$\frac{4\pi\vartheta}{3+4\pi\vartheta} = \frac{1}{10000}.$$

Da wir hier alle Verhältnisse viel zu ungünstig annahmen und ϑ für meine Substanzen jedenfalls noch viel kleiner als für Wismuth ist, so kann wohl über die verschwindende Kleinheit von $4\pi\vartheta$ kein Zweifel obwalten. Es ist also für die von mir untersuchten Substanzen $\mu = 1$ zu setzen und es müsste nach der Maxwell'schen Ansicht über das Wesen des Lichts und der Elektricität der Brechungsexponent einfach die Quadratwurzel aus der Dielektricitätsconstante sein. Um diese Consequenz aus meinen Versuchen zu prüfen, stelle ich in der folgenden Tabelle die Quadratwurzeln von D mit den Brechungsexponenten der betreffenden Substanzen zusammen:

	$\sqrt{D}$	i
für Schwefel	1·960	2·040
für Colophonium . . .	1·597	1·543
für Paraffin	1·522	1·538, 1·516
für Hartgummi . . .	1·778	—

Der von mir nach der Wollaston'schen Methode bestimmte Brechungsexponent des wahrscheinlich doppeltbrechenden Paraffin fiel merkwürdiger Weise verschieden aus, je nachdem das Licht parallel oder senkrecht zur Reflexionsebene polarisirt war. Ersterem gehört der grössere, letzterem der kleinere der angeführten Brechungsexponenten an. Ich glaube, dass die Differenzen dieser Zahlen nicht so gross sind, dass sie nicht aus den bei Bestimmung der Dielektricitätsconstanten unvermeidlichen Fehlern erklärt werden könnten, besonders da D für eine und dieselbe Substanz jedenfalls nicht absolut constant ist. Dass ich die Dielektricitätsconstante für den Schwefel etwas zu klein fand, liesse sich ganz gut aus den Hohlräumen erklären, die sich in meinen Schwefelplatten thatsächlich vorfanden. Auch von der Dielektricitätsconstante des Colophoniums kann wegen

der grossen Schwierigkeit, gleich dicke Colophoniumplatten mit erträglich ebener Oberfläche zu erzeugen, keine allzugrosse Genauigkeit erwartet werden. Wenn daher meine Versuche auch gegenwärtig weder denjenigen Umfang noch diejenige Genauigkeit haben, dass sie als definitive Constatirung einer so wichtigen Consequenz wie der Identität des Lichtes mit der Elektricität betrachtet werden können, so muss doch das Resultat derselben als ein wichtiges Moment für die Richtigkeit dieser Theorie bezeichnet werden, und wenn mir anders die Möglichkeit geboten würde, meine Untersuchungen mit grösseren Mitteln fortzusetzen, so bezweifle ich nicht, dass es mir bei den reichen Erfahrungen, die ich über diesen Gegenstand gesammelt habe und bei der durch meine zweite Untersuchungsmethode gebotenen Möglichkeit, auch kleinere Quantitäten auf ihre Dielektricitätsconstante zu prüfen, gelingen würde, diese Frage ihrer Lösung zuzuführen.

XXIII. SITZUNG VOM 17. OCTOBER 1872.

Herr Prof. Dr. Ernst Haeckel in Jena dankt mit Schreiben vom 12. October für seine Wahl zum ausländischen, und Herr Dr. Jul. Hann, mit Schreiben vom 9. October, für seine Wahl zum inländischen correspond. Mitgliede der Classe.

Herr Prof. Dr. E. Mach in Prag übersendet eine Abhandlung: „Über die stroboskopische Bestimmung der Tonhöhe."

Derselbe übersendet ferner zwei von ihm, in Gemeinschaft mit Herrn Dr. J. Kessel ausgeführte Arbeiten, und zwar: 1. „Die Function der Trommelhöhle und der *Tuba Eustachii*"; und 2. „Versuche über die Accomodation des Ohres."

Herr Otto Herman, ehem. Custos am siebenbürgischen Landes-Museum in Szász-Vesszös in Siebenbürgen, übermittelt eine Abhandlung, betitelt: „Das edle siebenbürgische Pferd. — Eine Berichtigung des betreffenden Artikels in M. Dr. Leop. Jos. Fitzinger's „„Versuch über die Abstammung des zahmen Pferdes und seiner Raçen.""

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna: Memorie. Serie III. Tomo I., fasc. 1—4; Tomo II., Fasc. 1. Bologna, 1871 & 1872; 4°. — Indici generali dei dieci tomi della 2da serie delle Memorie. (1862—1870.) Bologna, 1871; 4°. — Rendiconto. Anno Accademico 1871—72. Bologna, 1872; 8°.

— R., delle Scienze di Torino: Atti. Vol. VII, Disp. 1a—7a. Torino, 1871—72; 8°. — Bollettino meteorologico ed astronomico del R. Osservatorio dell' Università di Torino. Anno VI. 1872. Quer-4°.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Bayer., zu München: Sitzungsberichte der mathem.-physik. Classe. 1872. Heft 2. München; 8°.

Annalen der Chemie & Pharmacie, von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R. Band LXXXVIII, Heft 1. Leipzig & Heidelberg, 1872; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrg., Nr. 29. Wien, 1872; 8°.

Arbeiten aus der physiologischen Anstalt zu Leipzig. VI. Jahrgang: 1871. Mitgetheilt durch C. Ludwig, Leipzig, 1872; 8°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome XLIVe. Nrs. 175—177. Genève, Lausanne, Paris, 1872; 8°.

Comitato, R., Geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1872, Nr. 5 & 6. Firenze, 1872; gr. 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXV, Nr. 14. Paris, 1872; 4°.

Essex Institute: Proceedings and Communications. Vol. VI, Part 3. 1868—71. Salem, 1871; 8°. — Bulletin, Vol. III. 1871. Salem, 1872; 8°.

Gesellschaft, Deutsche, geologische: Zeitschrift. XXIV. Bd., 1. & 2. Heft. Berlin, 1872; 8°.

— Naturhistorische, zu Hannover: XXI. Jahresbericht. 1870 bis 1871. Hannover, 1871; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VII. Band, Nr. 18—19. Wien, 1872; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 41. Wien, 1872; 4°.

Istituto, R., Veneto di Scienze, Lettere ed Arti: Memorie. Vol. XVI, Parte 2; Vol. XVII, Parte 1. Venezia, 1872; 4°. — Atti. Tomo I°, Serie IV^a, Disp. 7^a—9^a. Venezia 1871—72; 8°.

Landbote, Der steirische, 5. Jahrgang, Nr. 21. Graz, 1872; 4°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 18. Band, 1872, Heft IX. Gotha; 4°.

— des k. k. techn. & administr. Militär-Comité. Jahrgang 1872, 7—10. Heft. Wien; 8°.

— Mineralogische, gesammelt von G. Tschermak. Jahrgang 1872, Heft 2. Wien; kl. 4°.

Nature. Nr. 154, Vol. VI. London, 1872; 4°.

Observations, Astronomical and Meteorological, made at the United States Naval Observatory during the Year 1869. Washington, 1872; 4°. Nebst Appendix I & II. Washington, 1870 & 1872; 4°.

Repertorium für Experimental-Physik etc. von Ph. Carl. VIII. Band, 2. Heft. München, 1872; 8°.

Report of the Superintendent of the U. St. Coast Survey, during the Year 1868. Washington, 1871; 4°.

Report of the Commissioner of Agriculture for the Year 1870. Washington, 1871; 8⁰.

Reports, Monthly, of the Department of Agriculture for the Year 1871. Washington, 1872; 8⁰.

„Revue politique et littéraire“ et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger.“ IIme Année. 2e Série. Nr. 15. Paris & Bruxelles, 1872; 4⁰.

Smithsonian Institution: Annual Report, for the Year 1870. Washington, 1871; 8⁰.

Société Botanique de France: Bulletin. Tome XVIIe (1870). Comptes rendus 4; Tome XVIIIe (1871), Revue bibliographique E. Paris; 8⁰.

— des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux: Mémoires. Tome VIII, 3me cahier. Paris & Bordeaux, 1872; 8⁰.

— Entomologique de France: Annales. Ve Série, Tome Ier. Paris, 1871; 8⁰.

— Malacologique de Belgique: Bulletin. Tome VII. Année 1872. Pag. I—LXXXII.; 8⁰.

— Géologique de France: Bulletin. 2e Série, Tome XXVIII. 1871, Nr. 4. Paris; 8⁰.

Society, The Royal, of London: Philosophical Transactions. For the Year 1870. Vol. 160, Part II; For the Year 1871. Vol. 161, Part I. London; 4⁰. — Proceedings. Vol. XIX. Nrs. 124—129. London, 1871; 8⁰. — List of Members 1870. — Catalogue of Scientific Papers (1800—1863.) Vol. V. London, 1871; 4⁰.

— The Chemical, of London: Journal. N. S. Vol. IX, August—December, 1871; Vol. X, January, May—July, 1872. London; 8⁰.

Verein, Naturwissenschaftlicher, zu Bremen: Abhandlungen. III. Band, 1. & 2. Heft. Bremen, 1872; 8⁰.

Vierteljahresschrift, österr., für wissenschaftl. Veterinärkunde. XXXVII. Band, 2. Heft. Wien, 1872; 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 41. Wien, 1872; 4⁰.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIV. Jahrgang, 13. Heft. Wien, 1872; 4⁰.

Über die stroboskopische Bestimmung der Tonhöhe.

Von E. Mach.

(Mit zwei Holzschnitten.)

Schon der Erfinder der stroboskopischen Methode, Plateau [1], gibt ein Verfahren und eine Formel an zur Bestimmung der Schwingungszahl der stroboskopisch beobachteten tönenden

[1] Bullet. de l' Académie Belgique III. p. 364 (1836). Vergl. auch meine Schrift: „Optisch-akustische Versuche. Die spectrale und stroboskopische Untersuchung tönender Körper." Prag. Calve 1872. S. 69. — Ich habe in Bezug auf die historische Exposition in dieser Schrift eine Berichtigung hinzuzufügen. Es heisst daselbst S. 69: „Will man ältere Methoden, welche auf Proceduren beruhen, die der stroboskopischen blos ähnlich sind, übergehen, so muss man sagen, dass der erste präcise und klare Vorschlag, die stroboskopische Scheibe zur Untersuchung rascher periodischer Bewegungen zu benützen, von Plateau herrührt." Ich bin nun zu diesem Passus hauptsächlich durch den Umstand veranlasst worden, dass Savart (Ann. de Chim. (1833). T. 53, p. 349) bei Beschreibung seines quergestreiften Bandes, welches er zur Untersuchung der Wasserstrahlen anwendet, keine Vorarbeiter anführt. Neuerdings habe ich mich aber überzeugt, dass die Sache doch anders steht.

Die erste Besprechung der Radspeichencurven durch Roget (Philosoph. Transactions 1825) abgerechnet, verdanken wir die erste genaue Untersuchung der Radspeichencurven und der verwandten Erscheinungen, also alles dessen, was zur stroboskopischen Methode führen konnte und musste, Plateau; so dass also auch in Bezug auf das von Savart angewandte Princip und die Faradey'schen Beobachtungen über Zahnräder, Plateau die Priorität zukommt. Vergl. Ann. de Chim. (1831). T. 48. — Die Abhandlungen von Plateau über die betreffenden Gegenstände befinden sich: Correspondance mathématique etc. par Quételet 1828, p. 393 und 1839, p. 121. — Dissert. sur quelques propriétés des impressions produites par la lumière sur l'organe de la vue. Liège 1829.

Körper. Auch Doppler[1], der einige Jahre später die stroboskopische Methode wieder zur Sprache bringt, weist auf die Bestimmung der Schwingungszahlen durch dieselbe hin. Endlich hat in neuester Zeit v. Obermayer[2] derartige Versuche wirklich ausgeführt mit Hilfe eines Elektromotors, der mit einem Zählwerk und zur Regulirung mit einem Quecksilberagometer versehen war, auf welchen überdies verschiedene durchlöcherte Scheiben aufgesetzt werden konnten.

Ob die stroboskopische Bestimmung der Schwingungszahl einer grösseren oder auch nur derselben Genauigkeit fähig sei, wie eine directe Bestimmung, namentlich wenn man das Verfahren der obigen Autoren anwendet, muss ich vorläufig dahingestellt sein lassen. Es wird erlaubt sein, daran zu zweifeln, wenn man bedenkt, dass man bei der Geschwindigkeitsmessung des stroboskopischen Apparates dieselben Schwierigkeiten zu überwinden hat, welchen die directe Bestimmung unterliegt.

Mir scheint der grosse Vortheil, welchen die stroboskopische Bestimmung bietet, in einem ganz anderen Umstande zu liegen. Diese Bestimmung kann nämlich äusserst rasch vorgenommen werden. Freilich muss man dann dem Apparate eine andere Einrichtung geben, als dies bisher gebräuchlich war.

Ich will diese Einrichtung hier kurz beschreiben. Ich verfiel auf dieselbe, als ich mit Herrn Dr. Kessel Versuche über die Schwingungen des lebenden menschlichen Ohres ausführte, bei welchen es sich darum handelte, rasch grosse Tonreihen mit der Sirene durchzunehmen und die gewissen Schwingungszahlen entsprechenden Schwingungsmaxima des Ohres aufzusuchen.

Bei diesen schleifenden Tönen ist natürlich das Zählwerk der Sirene unbrauchbar. Der erste vorläufige Versuch mit einem Rudimente des zu beschreibenden Apparates wurde schon zu Anfang des Jahres 1871 angestellt.

Stellen wir uns (Fig. 1) auf einem ebenen Blatte eine unbegrenzte Gerade *AA* vor, welche in gleiche Theile getheilt ist.

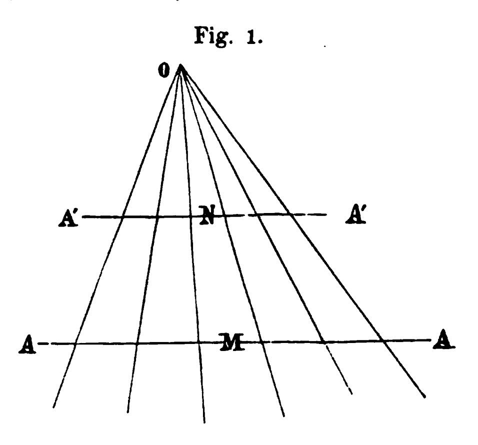
---

[1] Abhandl. d. kön. böhm. Gesellschaft. V. Folge. 3. Bd. S. 779 (1845) und Optisch-akustische Versuche. S. 72.

[2] Sitzb. d. Wien. Akad. Bd. 63. S. 249 (1871).

Von O aus ziehen wir durch die Theilungspunkte scharf markirte Strahlen. Diese Strahlen theilen dann jede zu AA parallele Gerade $A'A'$ ebenfalls in gleiche Theile, deren Grösse von dem Abstande von $A'A'$ und O abhängt. Denken wir uns nun die ganze Ebene mit solchen Strahlen erfüllt und dann nach der Richtung AA mit einer solchen constanten Geschwindigkeit bewegt, dass für das ruhende einen Punkt M in AA fixirende Auge n Strahlen in der Secunde vorbeigehen; so passirt das Auge, wenn wir die Zahl der in der Secunde vorbeigehenden Streifen als Schwingungszahl auffassen, alle Schwingungszahlen von n bis ∞, sobald sich sein Fixationspunkt von M bis O bewegt. Man könnte also auf MO einfach eine Scale der Schwingungszahlen auftragen.

Fig. 1.

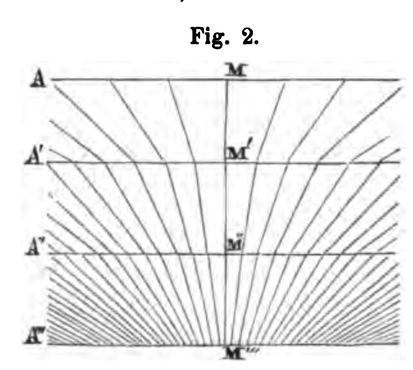


Eine solche Scale wäre aber unbrauchbar, weil die Schwingungszahlen mit wachsender Höhe rasch in ununterscheidbar kleine Entfernungen zusammenrücken würden. Dieser Übelstand lässt sich jedoch leicht vermeiden. Wollte man, dass gleiche musikalische Intervalle sich auch als gleiche Schritte auf MO markiren, so müssten die Logarithmen der Schwingungszahlen auf der Scale MO proportional den Entfernungen der betreffenden Punkte von M (gegen O hin gerechnet) sein. Nennen wir also letztere Entfernung x, so hätten wir $\log n = kx$, wobei k constant. Nehmen wir MO als X-Axe und AA als Y-Axe. Legen wir ferner durch die Theilungspunkte von AA Curven, welche jede zu AA parallele an MO das Stück $MN = x$ abschneidende Gerade $A'A'$ in gleiche Abschnitte von der Grösse y theilen; so ist die Schwingungszahl in der Entfernung x von M $n = \frac{a}{y}$, wenn a die Länge eines Theiles von AA ist und die Schwingungszahl für $AA = 1$ gesetzt wird. Aus beiden Gleichungen ergibt sich

die Gleichung der an MO zunächst liegenden Curve $y = \pm ae^{-kx}$. Die übrigen Curven haben dann die Gleichungen $y = \pm 2ae^{-kx}$, $g = \pm 3ae^{-kx}$ u. s. w.

In der Praxis gestaltet sich die Sache einfacher. Man wird zufrieden sein, wenn alle Octavenschritte auf MO sich als gleiche Distanzen markiren. Man zieht die parallelen gleich abstehenden Geraden $AA'A''$ ... und senkrecht hindurch den Strahl MM'''. Man theilt A in gleiche Theile und legt durch die Theilungspunkte Strahlen, welche sich in M'' treffen, zieht dieselben aber blos bis A aus. Von da zieht man die Strahlen sämmtlich weiter nach dem Scheitel M''', indem man sozusagen das Strahlenbüschel knickt. Die bis A'' ausgezogenen Strahlen setzt man nun nach dem Scheitel M^{IV} fort u. s. w. Die Schwingungszahl wächst dann sichtlich von A bis A' um eine Octave, ebenso von A' bis A'' u. s. f.

Fig. 2.



Streng genommen müsste man nun diese Construction, damit sie bewegt denselben optischen Eindruck hervorruft, wie eine Reihe Körper von allmälig wachsender Schwingungszahl, auf einem unendlichen Blatte ausführen. Allein da periodisch wechselnde Lichteindrücke schon in einer mässigen Zeit einen bleibenden Eindruck hervorbringen und da anderseits dieser Eindruck eine gewisse Zeit nicht überdauert, so genügt schon ein Blatt von sehr mässiger Ausdehnung.

Man begrenzt das Blatt durch zwei zu A und durch zwei zu MM''' parallele Schnitte und bildet daraus die Mantelfläche eines Cylinders in der Weise, dass MM'' zur Axe des Cylinders parallel bleibt.

Mein Apparat trägt einen mit constanter Geschwindigkeit rotirenden Cylinder, welcher drei Umdrehungen in der Secunde macht und der in fünf Octaven getheilt ist. An einem Ende des Cylinders beginnen 10 Streifen, welche gegen das andere Ende zu immer zahlreicher und dichter werden, so dass dieses letztere

320 Streifen trägt. Auf dem Cylinder sind also alle Schwingungszahlen von 30—60 vertreten.

Bringen wir nun an der Axe einer Sirene eine Scheibe mit äquidistanten radialen Spalten von derselben Zahl an wie die Löcher der Tonscheibe und betrachten durch dieselbe, während der Ton der Sirene langsam in die Höhe zieht, unsern rotirenden Cylinder. Vermöge des stroboskopischen Principes sehen wir die Streifen dort einfach und ruhig, wo sie in der Secunde in gleicher Anzahl am Auge vorbeigehen wie die Spalten der Scheibe. Haben wir also an den Cylinder eine Schwingungszahlen-Scale angelegt, so können wir leicht an der Stelle, welche dem ruhig und scharf erscheinenden Ring des Cylinders entspricht, die momentane Schwingungszahl der Sirene einfach ablesen.

Aus der Endlichkeit des Cylinderumfanges erwächst eine kleine Störung, die jedoch nicht viel zu bedeuten hat. Wo nämlich die Streifendistanz nicht genau in dem Umfange des Cylinders aufgeht, und dies ist an den meisten Stellen der Fall, da stimmt das stroboskopische Bild bei der zweiten Umdrehung des Cylinders nicht mehr mit jenem bei der ersten. Ein Drittheil einer Secunde genügt aber vollständig zur Befestigung des stroboskopischen Eindruckes und man wird daher blos dreimal in der Secunde das stroboskopische Bild einen leichten Ruck machen sehen, was die Beobachtung nicht wesentlich stört. Wären die Streifen Schlitze des Cylindermantels, die man anblasen könnte (und in der That liesse sich eine solche Scalensirene construiren), so würden sich diese Stösse als eine leichte Rauhigkeit des Tones bemerkbar machen. Optisch sind sie noch unschädlicher.

Wo die vorbeigehende Streifenzahl der vorbeigehenden Spaltenzahl gleich ist, erscheinen die Streifen ruhig. An den beiden benachbarten Stellen ist aber einerseits die Streifenzahl kleiner, anderseits grösser. Wo die Streifenzahl grösser ist, scheinen die Streifen im Umdrehungssinn, wo sie kleiner ist, hingegen umgekehrt zu laufen. Daraus geht aber hervor, wie es auch der Versuch lehrt, dass man kurze Streifenstücke mit verwachsenen Enden sehen wird, welche sich um die ruhig erscheinenden Stellen drehen werden.

Man sieht natürlich nicht nur jene Cylinderstelle einfach und ruhig, welche der Schwingungszahl der Sirene entspricht, sondern auch alle jene Cylinderstellen, welche den harmonischen Obertönen der Sirene entsprechen. An allen diesen Stellen erscheinen die Streifen einfach, ruhig, und in voller Schwärze. Man bemerkt leicht, dass unter diesen Stellen diejenige, welche die kleinste Schwingungszahl angibt, mit der Schwingungszahl der Sirene übereinstimmt.

Ausserdem erscheinen noch ruhig, aber nicht mehr einfach, alle jene Cylinderstellen, welche harmonische Intervalle zum Sirenenton angeben, unter diesen z. B. auch die harmonischen Untertöne. Verhält sich die Schwingungszahl der Cylinderstelle zu jener der Sirene wie die ganze Zahl p zur ganzen Zahl q, so erscheint diese Stelle ruhig und q-fach[1]. — Solche Stellen unterscheiden sich von den früher erwähnten durch die viel grössere Blässe der Streifen.

Die den aufgezählten Cylinderstellen benachbarten erscheinen leicht flimmernd und die übrigen Cylindertheile gleichförmig grau. Man bemerkt, dass unser rotirender Cylinder durch die optische Scheibe betrachtet, eine vollständige Übersicht aller möglichen stroboskopischen Erscheinungen bietet.

Es handelt sich nun um das Detail des Apparates. Der Cylinder, um welchen das gestreifte Papier gelegt wird, trägt an seiner Axe eine kleine Rolle mit einem gerieften Schnurlauf. Diese Rolle ist mit einer grösseren, an deren Welle das Gewicht wirkt, durch eine Schnur verbunden. Das Gewicht wirkt mittelst einer endlosen Schnur, wie dies an vielen Uhrwerken und namentlich an den durch Gewichte getriebenen Morse'schen Schreibapparaten gebräuchlich ist. Diese Schnur ist durch ein kleines Gegengewicht belastet und geht über ein mit einer Kurbel und einseitig wirkenden Sperrzähnen versehenes Rad, so dass der Apparat, ohne den Gang aufzuhalten, aufgezogen werden kann. Der Cylinder treibt mit Hilfe eines Zahnrades, der Gleichmässigkeit des Ganges wegen, noch rasch laufende Windflügel.

---

[1] Optisch-akustische Versuche. S. 63.

Der Apparat läuft sehr gleichmässig. Man überzeugt sich hievon z. B., wenn man im dunklen Zimmer den rotirenden Cylinder mit Sonnenlicht durch die Lichtunterbrechungsgabel [1] beleuchtet. Jede Ungleichmässigkeit muss sich durch ein Schwanken der ruhig erscheinenden Streifenringe nach der Axenrichtung des Cylinders verrathen. Ein solches Schwanken tritt nicht ein.

Man sieht leicht, dass der Apparat sich auch für genauere Bestimmungen eignet, wenn man neben dem Papiermantel von fünf Octaven noch fünf andere Papiermäntel zum Aufschieben vorräthig hält, von welchen jeder auf die ganze Länge des Cylinders nur eine Octave enthält und also zur genaueren Bestimmung der vorläufig ermittelten Schwingungszahl dienen kann.

Offenbar kann man nicht blos die Schwingungszahl einer Sirene, sondern auch jene eines andern tönenden Körpers mit unserem Apparat bestimmen. Stellen wir eine Saite auf einem durchbrochenen Monochord so, dass sie senkrecht zur Axe des Cylinders läuft, so erscheinen sofort einfache Zacken im Schwingungsfeld, wenn man die gestrichene Saite mit der Cylinderstelle von gleicher Schwingungszahl optisch deckt. Eine ähnliche Erscheinung präsentirt sich, wenn man ein Spiegelsplitterchen (versilbertes Mikroskopdeckglas) an eine Stimmgabelzinke klebt und in dem schwingenden Spiegelchen den Cylinder betrachtet, wobei aber die Gabel so zu halten ist, dass die scheinbare Schwingung des Cylinders nach seiner Axenrichtung stattfindet. Auch hier zeigen sich charakteristische Figuren an der der Schwingungszahl entsprechenden Stelle. Einfach ist ferner die Schwingungszahl eines Körpers, z. B. einer Pfeife, mit Hilfe eines König'schen Brenners von kleiner Flamme zu ermitteln. Man beleuchtet mit demselben im dunklen Zimmer den Cylinder und liest an der tiefsten einfach, ruhig und vollkommen scharf erscheinenden Stelle die Schwingungszahl ab.

Ich glaube, obwohl ich es noch nicht versucht habe, dass der Apparat noch eine Art Umkehrung verträgt. Man wird die

[1] Optisch-akustische Versuche. S. 83.



Streifenconstruction von dem Cylinder auf eine Scheibe übertragen können. Denkt man sich nun statt der Streifen auf der Scheibe Schlitze, oder auf einer sonst mit Tusche überzogenen Glasscheibe freie Stellen, so hat man an einer solchen constant rotirenden Scheibe eine stroboskopische Scale. Man kann durch dieselbe die schwingenden Körper direct beobachten und für die ruhig erscheinenden die Schwingungszahl ablesen.

Auf neue optische Spielzeuge, welche sich hierauf gründen liessen, will ich hier nicht eingehen.

Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen.

Von Ludwig Boltzmann in Graz.

(Mit 1 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. October 1872.)

Die mechanische Wärmetheorie setzt voraus, dass sich die Moleküle der Gase keineswegs in Ruhe, sondern in der lebhaftesten Bewegung befinden. Wenn daher auch der Körper seinen Zustand gar nicht verändert, so wird doch jedes einzelne seiner Moleküle seinen Bewegungszustand beständig verändern, und ebenso werden sich die verschiedenen Moleküle gleichzeitig neben einander in den verschiedensten Zuständen befinden. Lediglich dem Umstande, dass selbst die regellosesten Vorgänge, wenn sie unter denselben Verhältnissen vor sich gehen, doch jedesmal dieselben Durchschnittswerthe liefern, ist es zuzuschreiben, dass wir auch im Verhalten warmer Körper ganz bestimmte Gesetze wahrnehmen. Denn die Moleküle der Körper sind ja so zahlreich und ihre Bewegungen so rasch, dass uns nie etwas anderes, als jene Durchschnittswerthe wahrnehmbar wird. Man möchte die Regelmässigkeit jener Durchschnittswerthe mit der bewunderungswürdigen Constanz der von der Statistik gelieferten Durchschnittszahlen vergleichen, welche ja auch aus Vorgängen abgeleitet sind, von denen jeder einzelne durch ein ganz unberechenbares Zusammenwirken der mannigfaltigsten äusseren Umstände bedingt ist. Die Moleküle sind gleichsam eben so viele Individuen, welche die verschiedensten Bewegungszustände haben, und nur dadurch, dass die Anzahl derjenigen, welche durchschnittlich einen gewissen Bewegungszustand haben, constant ist, bleiben die Eigenschaften des Gases unverändert. Die Bestimmung von Durchschnittswerthen ist Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Probleme der mechanischen Wärmetheorie sind daher Probleme der Wahr-

scheinlichkeitsrechnung. Es wäre aber ein Irrthum, zu glauben, dass der Wämetheorie deshalb eine Unsicherheit anhafte, weil daselbst die Lehrsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung kommen. Man verwechsle nicht einen unvollständig bewiesenen Satz, dessen Richtigkeit in Folge dessen problematisch ist, mit einem vollständig erwiesenen Satze der Wahrscheinlichkeitsrechnung; letzterer stellt, wie das Resultat jedes anderen Calcüls, eine nothwendige Consequenz gewisser Prämissen dar, und bestätigt sich, sobald diese richtig sind, ebenso in der Erfahrung, wenn nur genügend viele Fälle der Beobachtung unterzogen werden, was bei der enormen Anzahl der Körpermoleküle in der Wärmetheorie immer der Fall ist. Nur scheint es hier doppelt geboten, bei den Schlüssen mit der grössten Strenge zu verfahren. Will man daher nicht blos beiläufige Werthe der in der Gastheorie vorkommenden Grössen muthmassen, sondern eine exacte Theorie derselben in Angriff nehmen, so muss vor allem die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Zustände bestimmt werden, welche an einem und demselben Moleküle im Verlaufe einer sehr langen Zeit und an den verschiedenen Molekülen gleichzeitig vorkommen, d. h. es muss berechnet werden, wie sich die Zahl jener Moleküle, deren Zustand zwischen gewissen Grenzen liegt, zur Gesammtanzahl der Moleküle verhält. Es wurde dieses Problem bereits von Maxwell und mir in verschiedenen Abhandlungen behandelt, ohne dass jedoch bis jetzt eine vollständige Lösung gelungen wäre. In der That scheint dieselbe namentlich in dem Falle, wo jedes Molekül wieder aus mehreren materiellen Punkten (den Atomen) besteht, sehr schwierig, da man die Bewegungsgleichungen bereits für einen Complex von drei Atomen nicht mehr zu integriren vermag. Allein bei näherer Betrachtung erweist es sich als doch nicht so unwahrscheinlich, dass sich jene Wahrscheinlichkeit aus den blossen Bewegungsgleichungen ohne deren Integration wird ableiten lassen. Denn die zahlreichen einfachen Gesetze über das Verhalten der Gase zeigen, dass der Ausdruck für jene Wahrscheinlichkeit gewisse allgemeine, von der speciellen Natur der Gase unabhängige Eigenschaften besitzen muss, und gerade derartige allgemeine Gesetze lassen sich nicht selten schon aus den blossen Bewe-

gungsgleichungen ableiten, ohne dass deren Integration dazu erforderlich wäre. In der That gelang es mir, das Problem für Gasmoleküle, die aus beliebig vielen Atomen bestehen, der Lösung zuzuführen. Ich will jedoch hier, der besseren Übersicht halber, zunächst den einfachsten Fall behandeln, dass jedes Molekül ein einzelner materieller Punkt ist. Hieran schliesse ich dann erst den allgemeinen, in dem übrigens die Durchführung der Rechnung im Wesen ganz dieselbe ist.

I. Betrachtung einatomiger Gasmoleküle.

Sei irgend ein Raum mit sehr vielen Gasmolekülen erfüllt, deren jedes ein einfacher materieller Punkt ist. Jede Molekül fliege während des grössten Theiles der Zeit geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort. Nur wenn sich zwei Moleküle zufällig sehr nahe kommen, beginnen sie auf einander einzuwirken. Ich nenne diesen Vorgang, während dessen zwei Moleküle auf einander einwirken, einen Zusammenstoss der beiden Moleküle, ohne dass jedoch dabei an einen Stoss elastischer Körper zu denken ist; die während des Zusammenstosses wirksamen Kräfte können vielmehr ganz beliebig sein. Selbst wenn zu Anfang der Zeit alle Moleküle dieselbe Geschwindigkeit besessen hätten, würden sie dieselbe im Verlaufe der Zeit nicht immer beibehalten. In Folge der Zusammenstösse werden vielmehr einige Moleküle grössere, andere kleinere Geschwindigkeiten annehmen, bis sich endlich eine solche Vertheilung der Geschwindigkeiten unter den Molekülen hergestellt hat, dass dieselbe durch die Zusammenstösse nicht weiter verändert wird. Bei dieser schliesslich sich herstellenden Geschwindigkeitsvertheilung werden im Allgemeinen alle möglichen Geschwindigkeiten von Null bis zu einer sehr grossen Geschwindigkeit vorkommen. Die Zahl der Moleküle, deren Geschwindigkeit zwischen v und $v+dv$ liegt, wollen wir mit $F(v)dv$ bezeichnen. Dann bestimmt uns also die Function F die Geschwindigkeitsvertheilung vollständig. Für den Fall einatomiger Moleküle, den wir jetzt betrachten, fand bereits Maxwell für $F(v)$ den Werth $Av^2e^{-Bv^2}$, wobei A und B Constanten sind, so dass also die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen

Geschwindigkeiten durch eine ähnliche Formel gegeben wird, wie die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Beobachtungsfehler in der Theorie der Methode der kleinsten Quadrate. Der erste Beweis jedoch, den Maxwell für diese Formel gab, wird von ihm selbst als unrichtig bezeichnet. Später gab er zwar einen sehr eleganten Beweis dafür, dass, wenn man die obige Geschwindigkeitsvertheilung einmal unter den Glasmolekülen hergestellt hat, dieselbe in der That durch die Zusammenstösse nicht weiter verändert wird. Er sucht auch zu beweisen, dass es die einzige Geschwindigkeitsvertheilung von der betrachteten Eigenschaft ist. Allein der letztere Beweis scheint mir wieder Fehlschlüsse zu enthalten [1]. Es ist somit noch nicht bewiesen,

---

[1] Erstlich sollte Maxwell eigentlich beweisen, dass eben so oft ein Paar von Molekülen ihre Geschwindigkeit von *OA*, *OB* in *OA'*, *OB'* verwandeln, wie umgekehrt, während er thatsächlich nur davon spricht, dass ein Molekül eben so oft seine Geschwindigkeit von *OA* in *OA'*, als von *OA'* in *OA* verwandelt; dann behauptet Maxwell, dass, wenn die Geschwindigkeit *OA* öfter in *OA'* als umgekehrt übergehe, um ebensoviel öfter die Geschwindigkeit *OA'* in *OA''* als umgekehrt übergehen müsse, weil sonst die Anzahl der Moleküle mit der Geschwindigkeit *OA'* nicht constant bleiben könnte, welcher Schluss nur erlaubt wäre, wenn die Geschwindigkeit *OA'* in gar keine andere, als *OA* und *OA''* übergehen könnte. In der That kann nur geschlossen werden, dass eine oder mehrere Geschwindigkeiten *OA''*, *OA'''*... existiren, in welche die Geschwindigkeit *OA'* öfter übergeht, als umgekehrt. Um endlich zu beweisen, dass es nicht möglich sei, dass die Geschwindigkeit eines Moleküls öfter von *OA* in *OA'* als umgekehrt übergehe, sagt Maxwell, dasselbe müsste sonst eine in sich zurücklaufende Reihe von Geschwindigkeiten *OA*, *OA'*, *OA''*...*OA* lieber in der einen, als in der umgekehrten Ordnung durchlaufen. Dies könne aber nicht sein, denn es liesse sich kein Grund angeben, behauptet er, weshalb das Molekül diesen Cyclus lieber in der einen als in der anderen Ordnung durchlaufe. Diese letztere Behauptung aber scheint mir das zu beweisende als schon bewiesen anzunehmen. Denn nehmen wir bereits als bewiesen an, dass sich die Geschwindigkeit eines Moleküls eben so oft von *OA* in *OA'*, wie umgekehrt, verwandelt, dann wäre freilich kein Grund, warum es diesen Cyclus lieber in der einen, als in der anderen Ordnung durchlaufe. Nehmen wir dagegen den zu beweisenden Satz noch nicht als erwiesen an, so wäre gerade die Thatsache, dass sich die Geschwindigkeit eines Moleküls lieber von *OA* in *OA'*, als umgekehrt, lieber von *OA'* in *OA''*, als von *OA''* in *OA'* u. s. w. verwandelt, der Grund, weshalb dasselbe jene



dass, wie immer der Zustand des Gases zu Anfang gewesen sein mag, er sich immer dieser von Maxwell gefundenen Grenze nähern muss. Es könnte sein, dass es ausser dieser noch verschiedene andere mögliche Grenzen gibt. Dieser Beweis gelingt aber leicht mittelst der Auffassungsweise des Problems, zu deren Auseinandersetzung ich jetzt schreiten will, und welche zudem den Vortheil bietet, dass sie sich direct auf mehratomige Moleküle, also auf den in der Natur wahrscheinlich allein vorkommenden Fall übertragen lässt.

Ich beginne damit, das Problem nochmals genau zu definiren. Gesetzt also, wir hätten irgend einen Raum R, in demselben befinden sich sehr viele Gasmoleküle. Jedes Molekül ist ein einfacher materieller Punkt, der sich in der bereits geschilderten Weise bewegt. Während des grössten Theiles der Zeit fliegt er geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort. Nur wenn sich zwei Moleküle sehr nahe kommen, beginnen sie auf einander zu wirken. Das Wirkungsgesetz der Kräfte, die während eines Zusammenstosses wirksam sind, muss uns natürlich gegeben sein. Ich will aber bezüglich desselben gar keine beschränkende Annahme machen. Es kann uns gegeben sein, dass zwei Moleküle wie elastische Kugeln von einander abprallen; es kann uns auch jedes beliebige andere Wirkungsgesetz gegeben sein. Bezüglich der Gefässwände, welche das Gas umschliessen, will ich jedoch voraussetzen, dass die Moleküle an denselben wie elastische Kugeln reflectirt werden. Es würde da auch jedes beliebige Wirkungsgesetz dieselben Formeln liefern. Aber es vereinfacht die Sache, wenn wir uns über das Gefäss diese specielle Vorstellung machen. Wir stellen uns nun folgendes Problem: Es sei zu Anfang der Zeit also für $t = 0$, der Ort, die Geschwindigkeit und die Geschwindigkeitsrichtung jedes unserer Moleküle gegeben. Es wird gefragt, welches ist der Ort, die Geschwindigkeit und die Geschwindigkeitsrichtung jedes Moleküls nach Verlauf einer beliebigen

---

Reihe von Geschwindigkeiten lieber in der Ordnung OA, OA', OA'' ... OA, als in der umgekehrten durchlaufen würde. Beide Vorgänge sind ja nichts weniger als identisch. Es kann daher auch nicht a priori auf ihre gleiche Wahrscheinlichkeit geschlossen werden.

Zeit t. Da uns die Gestalt des Gefässes R, sowie das Wirkungsgesetz der während der Zusammenstösse wirksamen Kräfte gegeben ist, so ist dieses Problem natürlich ein vollständig bestimmtes. Es ist jedoch klar, dass es in dieser Allgemeinheit nicht vollständig auflösbar ist. Die Lösung wird aber eine viel leichtere, wenn wir an die Stelle dieses ganz allgemeinen Problems nur ein etwas specielleres setzen. Nur zwei ganz in der Natur der Sache liegende Beschränkungen wollen wir da hinzunehmen. Es ist zunächst klar, dass nach Verlauf einer sehr langen Zeit für die Geschwindigkeitsrichtung eines Moleküls jede Richtung im Raume gleich wahrscheinlich sein wird. Handelt es sich daher blos darum, die nach langer Zeit sich herstellende Geschwindigkeitsvertheilung zu finden, so können wir annehmen, dass schon zu Anfang jede Geschwindigkeitsrichtung gleich wahrscheinlich gewesen sei. Es kann der allgemeinste Fall auf keine anderen schliesslichen Zustandsvertheilungen führen, als dieser speciellere. Dies sei die erste Beschränkung, welche wir machen wollen. Die zweite sei, dass die Geschwindigkeitsvertheilung schon zu Anfang der Zeit eine gleichförmige gewesen sei. Ich muss da zunächst erklären, was ich unter einer gleichförmigen Geschwindigkeitsvertheilung verstehe. Es wird für die Folge besser sein, statt der Geschwindigkeit die lebendige Kraft eines Moleküls einzuführen. Thun wir das gleich jetzt. Es sei x die lebendige Kraft eines unserer Gasmoleküle, so dass also $x = \frac{mv^2}{2}$ ist. R ist der gesammte Raum, in dem unser Gas eingeschlossen ist. Construiren wir in diesem Raume R einen kleineren (r will ich ihn nennen), dessen Gestalt ganz beliebig ist, dessen Volumen aber gleich eins sein soll. Wir setzen voraus, dass im Raume r noch immer sehr viele Moleküle sind, dass also seine Dimensionen gross gegen die mittlere Distanz zweier Nachbarmoleküle sind, worin keine Beschränkung liegt, da wir ja die Volumeinheit so gross wählen können, als wir wollen. Die Anzahl der Moleküle im Raume r, deren lebendige Kraft zur Zeit t zwischen x und $x+dx$ liegt, will ich mit $f(x, t)dx$ bezeichnen. Dieselbe wird im Allgemeinen davon abhängen, wo ich den Raum r im Raume R construire. Es könnten sich z. B. rechts im Raume R die schnelleren,

links die langsameren Moleküle befinden. Dann würde die Anzahl $f(x, t)dx$ verschieden ausfallen, je nachdem ich den Raum r rechts oder links im Raume R construire. Wenn nun dies nicht der Fall ist, wenn die Anzahl $f(x, t)\,dx$ zu einer gegebenen Zeit vollkommen gleich ausfällt, wo immer ich den Raum r im Raume R construiren mag, so sage ich, die Vertheilung der lebendigen Kraft sei zur Zeit t eine gleichförmige, d. h. also nichts anderes, als die Moleküle mit den verschiedenen lebendigen Kräften sind gleichförmig unter einander gemischt. Es sind nicht rechts die schnelleren, links die langsameren, oder umgekehrt. Es ist da wieder klar, dass nach Verlauf einer sehr langen Zeit die Vertheilung der lebendigen Kraft eine gleichförmige wird; denn dann ist ja jeder Ort im Gase gleichberechtigt. Die Wände stören nicht, da an ihnen die Moleküle wie elastische Kugeln reflectirt werden; also gerade so von ihnen zurücktreten, als ob der Raum jenseits der Wände von gleich beschaffenem Gase erfüllt wäre. Wir können daher wieder annehmen, dass schon zu Anfang der Zeit die Geschwindigkeitsvertheilung eine gleichförmige war. Dies, sowie die gleiche Wahrscheinlichkeit jeder Geschwindigkeitsrichtung zu Anfang der Zeit sind die beiden beschränkenden Annahmen, unter denen wir zunächst das Problem behandeln werden. Es ist klar, dass diese beiden Bedingungen dann auch für alle folgende Zeit erfüllt sein werden, dass also der Zustand des Gases zur Zeit t durch die Function $f(x, t)$ vollständig bestimmt ist. Gegeben sei uns der Zustand unseres Gases zu Anfang der Zeit, also $f(x, 0)$. Gefunden soll werden der Zustand nach Verlauf einer beliebigen Zeit t, also $f(x, t)$. Der Weg, den wir da einschlagen werden, ist derselbe, den man in ähnlichen Fällen immer einschlägt. Wir berechnen zuerst, um wie viel sich die Function $f(x, t)$ während einer sehr kleinen Zeit τ verändert; hiedurch erhalten wir zunächst eine partielle Differentialgleichung für $f(x, t)$; dieselbe muss dann so integrirt werden, dass f für $t = 0$ den gegebenen Werth $f(x, 0)$ annimmt. Wir haben also jetzt eine doppelte Aufgabe vor uns, erstens die Aufstellung der partiellen Differentialgleichung und zweitens deren Integration. Wenden wir uns zuerst an die erste Aufgabe. $f(x, t)dx$ ist die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, deren lebendige Kraft zur Zeit t zwischen

x und $x+dx$ liegt. So lange ein Molekül mit keinem andern zusammenstösst, behält es seine lebendige Kraft unverändert bei. Würden also keine Zusammenstösse erfolgen, so würde sich die Zahl der Moleküle, deren lebendige Kraft zwischen x und $x+dx$ liegt, also $f(x, t)$ gar nicht ändern; diese Function ändert sich blos durch die Zusammenstösse. Wollen wir daher die Veränderung dieser Function während einer sehr kleinen Zeit τ erfahren, so müssen wir die Zusammenstösse während dieser Zeit der Betrachtung unterziehen. Betrachten wir einen Zusammenstoss, vor welchem die lebendige Kraft des einen der stossenden Moleküle

zwischen x und $x+dx$,

die des andern

zwischen x' und $x'+dx'$

liegt. Dadurch ist natürlich die Natur des Zusammenstosses noch keineswegs vollkommen bestimmt. Je nachdem derselbe ein centraler oder mehr oder weniger schiefer ist, kann vielmehr die lebendige Kraft des einen der stossenden Moleküle nach dem Zusammenstosse noch gar mannigfaltige Werthe haben. Setzen wir voraus, dieselbe liege nach dem Zusammenstosse

zwischen ξ und $\xi+d\xi$;

dann ist aber die lebendige Kraft des 2. Moleküls nach dem Zusammenstosse bestimmt. Bezeichnen wir letztere mit ξ', so ist nämlich nach dem Principe der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$x+x'=\xi+\xi'; \qquad 1)$$

die Summe der lebendigen Kraft beider Moleküle vor dem Stosse ist gleich der Summe der lebendigen Kraft beider Moleküle nach demselben. Wir können uns die Grenzen, zwischen denen die unseren Zusammenstoss charakterisirenden Variabeln liegen, durch folgendes Schema darstellen:

	a	*b*	
vor dem Stosse . .	$x, x+dx$	$x', x'+dx'$	A)
nach „ „ . .	$\xi, \xi+d\xi$		

Unter der Rubrik a steht die lebendige Kraft des einen, unter der Rubrik b die der anderen der zusammenstossenden Moleküle. Es fragt sich jetzt, wie viele Zusammenstösse geschehen, während der Zeit τ in der Volumeinheit so, dass die lebendige Kraft der stossenden Moleküle zwischen den durch das Schema A) dargestellten Grenzen liegt. Die Anzahl dieser Zusammenstösse soll mit dn bezeichnet werden. Die Bestimmung dieser Zahl dn kann nur in recht weitläufiger Weise durch Betrachtung der relativen Geschwindigkeit beider Moleküle geschehen. Da diese Betrachtung ausser ihrer Weitläufigkeit nicht die mindeste Schwierigkeit, aber auch kein besonderes Interesse hat, und ihr Resultat so einfach ist, dass man fast sagen möchte, es verstehe sich von selbst, so will ich mich begnügen, hier dieses Resultat mitzutheilen. Dasselbe besteht in Folgendem: Diese Anzahl dn ist erstens proportional der Zeit τ; je länger diese Zeit τ ist, desto mehr Zusammenstösse der betrachteten Art erfolgen während derselben; natürlich nur so lange τ sehr klein ist, so dass sich der Zustand des Gases während τ nicht merklich ändert. Zweitens ist dn proportional der Grösse $f(x, t)dx$; dies ist ja die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, deren lebendige Kraft zwischen x und $x+dx$ liegt; je mehr solcher Moleküle sich in der Volumeinheit befinden, desto öfter stossen sie in der betrachteten Weise zusammen. Drittens ist dn proportional $f(x', t)dx'$; denn was von dem einen der zusammenstossenden Moleküle gilt, gilt natürlich auch vom andern. Das Product dieser drei Grössen muss noch multiplicirt werden mit einem gewissen Proportionalitätsfactor, von dem man leicht einsieht, dass er unendlich klein, wie $d\xi$ sein muss. Derselbe wird im Allgemeinen von der Natur des Zusammenstosses, also von den, den Zusammenstoss bestimmenden Grössen x, x' und ξ abhängen. Wir wollen, um alles dies auszudrücken, den Proportionalitätsfactor mit $d\xi . \psi(x, x', \xi)$ bezeichnen, so dass wir also haben:

$$dn = \tau . f(x, t)dx . f(x', t)dx' . d\xi \psi(x, x', \xi). \qquad 2)$$

Dies ist das Resultat, zu dem die exacte Betrachtung des Vorganges des Zusammenstosses führt, durch welche sich natürlich auch die Function ψ bestimmen lässt, sobald das Wirkungs-



gesetz der Moleküle gegeben ist; denn diese Function ψ hängt natürlich von dem Wirkungsgesetze ab. Da wir jedoch diese Function ψ nicht brauchen werden, so wäre ihre Bestimmung hier überflüssig. Wir wollen jetzt in dem durch die Gleichung 2) gegebenen Ausdrucke für dn die Grösse x constant lassen, nach x' und ξ aber über alle möglichen Werthe dieser Grössen integriren, d. h. bezüglich ξ von Null bis $x+x'$, bezüglich x' von Null bis ∞. Das Resultat dieser Integrationen bezeichne ich mit $\int dn$; so ist also:

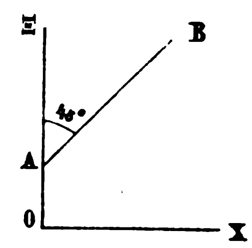
$$\int dn = \tau f(x,t)dx \int_0^\infty \int_0^{x+x'} f(x' t)\,\psi(x,x',\xi)\,dx'd\xi.$$

Da x für die beiden Integrationen als constant zu betrachten ist, so können wir $f(x,t)$ auch unter die beiden Integralzeichen schreiben, und erhalten:

$$\int dn = \tau dx \int_0^\infty \int_0^{x+x'} f(x,t)f(x' t)\,\psi(x,x',\xi)\,dx'd\xi.\text{[2]} \qquad 3)$$

[2] Anstatt die Grenzen eines bestimmten Integrales wirklich hinzuschreiben, kann man dieselben noch in verschiedener Weise bestimmen, z. B. durch Ungleichungen. In dem bestimmten Integrale der Formel 3) ist x als Constante zu betrachten. Die beiden Integrationsvariabeln sind x' und ξ; dieselben können nur positive Werthe inclusive Null annehmen, denn es sind lebendige Kräfte; und zwar muss auch $x+x'-\xi \overline{\gtrless} 0$ sein; denn $x+x'-\xi$ ist die lebendige Kraft des 2. Moleküls nach dem Zusammenstosse; anderseits ist klar, dass alle positiven x' und ξ, für welche auch $x+x'-\xi$ positiv ausfällt, möglichen Zusammenstössen entsprechen; also innerhalb der Integrationsgrenzen liegen. Die 3 Ungleichungen

$$x' \overline{\gtrless} 0, \quad \xi \overline{\gtrless} 0, \quad x+x'-\xi \overline{\gtrless} 0 \qquad 3a)$$



definiren uns also ebenfalls die Integrationsgrenzen des Integrales der Formel 3) unzweideutig. Es empfiehlt sich diese Methode der Grenzbestimmung dadurch, dass sie die Rechnung oft bedeutend abkürzt. Eine dritte Methode der Grenzenbestimmung ist die geometrische. Man trägt die Integrationsvariabeln auf rechtwinkeligen Coordinatenaxen auf und bestimmt die Fläche, über welche zu integriren ist. Tragen wir in unserem Falle auf der Abscissenaxe OX' die Variable x',

Was ist nun diese Grösse $\int dn$? Wir haben x constant gelassen. Die lebendige Kraft eines Moleküls vor dem Stosse bleibt also zwischen den Grenzen x und $x+dx$ eingeschlossen. Bezüglich aller übrigen Variabeln aber haben wir über alle möglichen Werthe derselben integrirt. Alle übrigen Variabeln sind also keiner beschränkenden Bedingung mehr unterworfen. Es ist also $\int dn$ einfach die Zahl der Zusammenstösse, welche in der Volumeinheit während der Zeit τ so geschehen, dass vor denselben die lebendige Kraft eines Moleküls zwischen x und $x+dx$ liegt. Durch jeden dieser Zusammenstöss verliert ein Molekül diese lebendige Kraft, folglich wird durch jeden dieser Zusammenstösse die Zahl der Moleküle, deren lebendige Kraft zwischen x und $x+dx$ liegt, um eins vermindert[3]. Im Ganzen geschehen während der Zeit τ in der Volumeinheit $\int dn$ solcher Zusammenstösse. Im Ganzen wird also jene Zahl um $\int dn$ vermindert. Die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, deren lebendige Kraft zur Zeit t zwischen x und $x+dx$ lag, ist aber, wie wir wissen, $f(x,t)dx$; während der Zeit τ wird sie in Folge der eben betrachteten Zusammenstösse um $\int dn$ vermindert, wir müssen also $\int dn$ von $f(x,t)dx$ abziehen. Wir haben bis jetzt blos die Zusammenstösse berücksichtigt, durch welche ein Molekül eine lebendige Kraft, die zwischen

auf der Ordinatenaxe $O\Xi$ die Variable ξ auf, so erhalten wir die Fläche, über welche zu integriren ist, indem wir $OA=x$ machen, und die Gerade AB ins Unendliche und unter 45° gegen die Coordinatenaxen geneigt ziehen. Das unendliche Trapez $X'OAB$ ist dann die Fläche, über welche die Integration zu erstrecken ist. Die letztere Art, die Grenzen darzustellen, zeichnet sich namentlich durch ihre grosse Anschaulichkeit aus.

[3] Ausgenommen sind hievon jene Zusammenstösse, bei denen auch nach dem Stosse die lebendige Kraft eines oder gar beider Moleküle zwischen x und $x+dx$ liegt. Man sieht jedoch leicht, dass die Zahl dieser Zusammenstösse, sowie auch derjenigen, vor denen die lebendige Kraft beider Moleküle zwischen x und $x+dx$ liegt, durch welche also gleichzeitig zwei Moleküle diese lebendige Kraft verlieren, unendlich klein höherer Ordnung ist, also vernachlässigt werden darf. Die ersteren Zusammenstösse, welche wir jetzt unberechtigter Weise subtrahiren, sind übrigens zudem auch in $\int d\nu$ enthalten, und werden daher ohnedies später wieder hinzuaddirt.

x und $x+dx$ liegt, verliert, durch welche also $f(x,t)dx$ vermindert wird. Wir müssen jetzt noch jene betrachten, durch welche ein Molekül eine solche lebendige Kraft gewinnt, durch welche also $f(x,t)dx$ vermehrt wird. Bezeichnen wir die Zahl dieser letzteren Zusammenstösse mit $\int d\nu$, so muss also $\int d\nu$ zu $f(x,t)dx$ addirt werden; in der Summe

$$f(x,t)dx - \int dn + \int d\nu. \tag{4}$$

ist das erste Glied der Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, deren lebendige Kraft zur Zeit t zwischen x und $x+dx$ lag; davon ist subtrahirt die Zahl der Moleküle, welche während der Zeit τ diese lebendige Kraft verlieren, addirt die Zahl der Moleküle, welche während der Zeit τ diese lebendige Kraft gewinnen. Das Resultat ist offenbar die Zahl der Moleküle, welche zur Zeit $t+\tau$ diese lebendige Kraft haben, also $f(x,t+\tau)dx$. Wir erhalten somit:

$$f(x,t+\tau)dx = f(x,t)dx - \int dn + \int d\nu. \tag{5}$$

Es muss noch $\int d\nu$ bestimmt werden. $\int d\nu$ ist die Zahl der Zusammenstösse in der Volumeinheit während der Zeit τ, nach denen die lebendige Kraft eines Moleküls zwischen x und $x+dx$ liegt. Wir müssen also jetzt für die lebendige Kraft vor dem Stosse eine andere Bezeichnung wählen. Sei also etwa $d\nu$ die Zahl der Zusammenstösse, welche in der Volumeinheit während der Zeit τ so geschehen, dass vor denselben die lebendige Kraft des einen Moleküls zwischen u und $u+du$, die des anderen zwischen v und $v+dv$ liegt, nach dem Stosse aber die des einen Moleküls zwischen x und $x+dx$ liegt. Die lebendige Kraft des anderen Moleküls nach dem Stosse ist natürlich hiedurch wieder bestimmt. $d\nu$ ist also die Zahl der Zusammenstösse, welche, entsprechend dem früher mit A) bezeichneten Schema, durch folgendes Schema charakterisirt sind:

	a	b	
vor dem Stosse. .	$u, u+du$	$v, v+dv$	B)
nach „ „ . .	$x, x+dx$		

Man sieht sogleich, dass sich die jetzt betrachteten Zusammenstösse von den früher betrachteten, durch das Schema A) dargestellten blos darin unterscheiden, dass jetzt die lebendigen Kräfte vor und nach dem Zusammenstosse durch andere Buchstaben ausgedrückt sind. Die Anzahl $d\nu$ der jetzt betrachteten Zusammenstösse kann also aus der Zahl dn der früher betrachteten durch blosse Buchstabenvertauschung gefunden werden. Und zwar muss, wie man leicht (am besten durch Vergleichung der beiden Schemata) sieht, jetzt

$$\begin{array}{lll} u \text{ statt } x, & v \text{ statt } x', & x \text{ statt } \xi \\ \text{ebenso} & & \\ du \text{ statt } dx, & dv \text{ statt } dx', & dx \text{ statt } d\xi \end{array} \qquad C)$$

gesetzt werden. Die Anzahl der früher betrachteten Zusammenstösse hiess dn und war durch die Gleichung 2) gegeben. Nehmen wir darin die Buchstabentauschung C) vor, so erhalten wir $d\nu$. Es ist also

$$d\nu = \tau . f(u,t)\, du\, f(v,t) dv\, dx . \psi(u, v, x).$$

Hier wollen wir wieder x constant lassen; bezüglich u und v aber über alle möglichen Werthe dieser Grössen integriren. Das Resultat

$$\tau\, dx \int\int f(u,t) f(v,t)\, \psi(u, v, x) du\, dv$$

ist die Zahl der Zusammenstösse in der Volumeinheit während der Zeit τ, nach denen die lebendige Kraft eines Moleküls zwischen x und $x+dx$ liegt (denn nach allen anderen Variabeln wurde über alle möglichen Werthe integrirt), also die Zahl der Zusammenstösse, durch welche ein Molekül eine lebendige Kraft gewinnt, die zwischen x und $x+dx$ liegt; genau jene Zahl, welche wir schon früher mit $\int d\nu$ bezeichneten [4]. Thun wir dies wieder, so erhalten wir also:

$$\int d\nu = \tau\, dx \int\int f(u,t) f(v,t)\, \psi(u, v, x) du\, dv. \qquad 6)$$

---

[4] Man könnte glauben, dass wir hier die Zusammenstösse vergessen haben, nach denen die lebendige Kraft des zweiten der stossenden



Es entsteht noch die Frage nach den Grenzen des Doppelintegrals [5]. Wenn $u > x$ ist, so kann v alle möglichen Werthe

---

Moleküle zwischen x und $x+dx$ liegt. Sei für einen solchen Stoss $u=u_1$, $v=v_1$. Da wir bezüglich u und v über alle möglichen Werthe integrirt haben, so haben wir auch den Stoss, für welchen $u=v_1$, $v=u_1$ ist, und nach dem Stosse die lebendige Kraft des ersten Moleküls zwischen x und $x+dx$ liegt, in das Integrale aufgenommen; dies ist aber genau der Fall, den wir eben vergessen zu haben fürchteten. Denn welches wir als das erste, welches als das zweite Molekül auffassen, ist gleichgiltig. Alle diese Zusammenstösse sind also in unserem Integrale schon mitberücksichtigt, nur tritt dabei u an die Stelle von v und umgekehrt. Wollte man noch ein zweites Integrale beifügen, das die Stösse enthält, nach denen die lebendige Kraft des zweiten Moleküls zwischen x und $x+dx$ liegt, so müsste dafür im Doppelintegrale jede Ambe aus Werthen von u und v ohne Permutation genommen, also nach v von Null (resp. $x-u$) bis u, nach u von Null bis ∞ integrirt werden. Nur jene Fälle, wo die lebendige Kraft beider Moleküle nach dem Stosse zwischen x und $x+dx$ liegt, haben wir nicht, wie es sein sollte, doppelt gezählt, was aber kein Fehler ist, da jene Zahl unendlich klein höherer Ordnung ist.

[5] Bestimmen wir die Grenzen nach der in der Anmerkung 2 angedeuteten Methode, so erhalten wir zur Grenzbestimmung die Ungleichungen

$$u \gtreqless 0, \quad v \gtreqless 0, \quad u+v-x \gtreqless 0.$$

Führen wir jetzt beliebige neue Variabeln p, q ein, so ist bekanntlich

$$dpdq = \Sigma \pm \frac{dp}{du} \cdot \frac{dq}{dv} dudv.$$

Im speciellen Falle, dass wir $p=u+v-x$, $q=u$ setzen, ist die Functionaldeterminante gleich eins (sie ist natürlich positiv zu nehmen); ferner wird in diesem Falle

$$v=p+x-q.$$

Es geht daher die Gleichung 6) über in

$$\int d\nu = \tau dx \iint f(q, t) \cdot f(p+x-q, t) \cdot \psi(q, p+x-q, x)\, dpdq.$$

Und die Ungleichungen, welche die Grenzen bestimmen, gehen in folgende über:

$$q \gtreqless 0, \quad p+x-q \gtreqless 0, \quad p \gtreqless 0.$$

Nun können wir im Integrale die Variabeln bezeichnen, wie wir wollen, wenn wir nur dieselbe Bezeichnungsveränderung auch in den Ungleichun-

von Null bis Unendlich durchlaufen; ist aber $u<x$, so kann v nicht kleiner als $x-u$ werden, weil sonst $u+v-x$, was ja die lebendige Kraft des zweiten Moleküls nach dem Stosse ist, negativ würde. Wenn also $u<x$ ist, so durchlauft v alle Werthe von $x-u$ bis Unendlich. Es muss also schon das Integrale nach u in zwei zerlegt werden. Eines von Null bis x, das andere von x bis Unendlich. Im ersten ist bezüglich v von $x-u$ bis Unendlich, im zweiten von Null bis Unendlich zu integriren. Die Formel 6) geht also nach richtiger Grenzenbestimmung über in folgende:

$$\int d\nu = \tau\, dx \int_0^x \int_{x-u}^\infty f(u,t) f(v,t)\, \psi(u,v,x)\, du\, dv$$
$$+ \tau\, dx \int_x^\infty \int_0^\infty f(u,t) f(v,t)\, \psi(u,v,x)\, du\, dv. \qquad 7)$$

Wir wollen jetzt statt v die neue Variable

$$w = u + v - x \qquad 8)$$

einführen, so dass also $v = x + w - u$ ist. Da bei der Integration nach v sowohl u als auch x als constant zu betrachten sind, so folgt aus der Formel 8) $dw = dv$. Es ist also nach richtiger Grenzbestimmung der Integration bezüglich w

---

gen vornehmen. Verwechseln wir die Buchstaben p, q mit x', ξ, so erhalten wir also

$$\int d\nu = \tau dx \iint f(\xi, t) f(x+x'-\xi, t)\, \psi(\xi, x+x'-\xi, x)\, dx'\, d\xi.$$

Und die Grenzen sind bestimmt durch

$$x' \gtreqless 0, \quad \xi \gtreqless 0, \quad x+x'-\xi \gtreqless 0;$$

also wieder durch die Ungleichungen 3a), die auch die Grenzen in der Formel 3) bestimmten. Wenn wir also zum Schlusse den Integralzeichen die Grenzen wieder anhängen, so stimmt die letzte Formel mit der Formel 11) des Textes, welche wir also hier auf einem kürzeren Wege gewonnen haben.

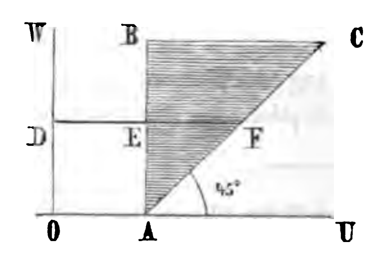


$$\int d\nu = \tau\, dx \int_0^x \int_0^\infty f(u,t) f(x+w-u,t)\, \psi(u, x+w-u, x)\, du\, dw$$
$$+ \tau\, dx \int_x^\infty \int_{u-x}^\infty f(u,t) f(x+w-u,t)\, \psi(u, x+w-x, x)\, du\, dv. \tag{9}$$

Da diese Integrale eine einfache Summirung einer Anzahl von Stössen darstellen, so können wir die Integrationsordnung ohne weiteres umkehren. Dadurch geht das erste Doppelintegrale der Formel 9) über in folgendes:

$$\int_0^\infty \int_0^x f(u,t) f(x+w-u,t)\, \psi(u, x+w-u, x)\, dw\, du. \tag{10}$$

Bei dem zweiten ist die Bestimmung der neuen Integrationsgrenzen nicht ganz so einfach. Wir wollen dieselben durch geometrische Betrachtungen gewinnen. Wir tragen auf der Abscissenaxe OU die Werthe von u, auf der Ordinatenaxe OW die von w auf. x ist bei der Integration constant. Machen wir $OA = x$ und ziehen durch A die beiden unbegrenzten Geraden AB parallel OW, und AC unter 45° gegen die Coordinatenaxen geneigt. In dem zweiten Doppelintegrale der Formel 9) war nach u von x bis Unendlich, also vom Punkte A an bis ins Unendliche bezüglich w von $u - x$ bis ∞, also von der Geraden AC angefangen bis ins Unendliche zu integriren. Die gesammte Integration war also über das unbegrenzte Dreieck zu erstrecken, welches in der Figur schraffirt ist. Und nun ist es leicht, die Grenzen zu bestimmen, wenn zuerst nach u, dann nach w integrirt wird. Für ein gegebenes w, also z. B. $w = OD$ ist bezüglich u von DE bis DF, also von x bis $x + w$ zu integriren. Bezüglich w geht dann die Integration von Null bis Unendlich. Das zweite Doppelintegral der Formel 9) verwandelt sich also in



$$\int_0^\infty \int_x^{x+w} f(u,t) f(x+w-u,t)\, \psi(u, x+w-u, x)\, dw\, du.$$

Es vereinigt sich, wie man sieht, mit dem ersten in Formel 10) gegebenen, zu einem einzigen Doppelintegrale. (Das erste stellt nebenbei bemerkt die Integration über das unbegrenzte Rechteck *WOAB* unserer Figur dar.) Die Wiedervereinigung beider Doppelintegrale liefert:

$$\int d\nu = \tau\, dx \int_0^\infty \int_0^{x+w} f(u,t) f(x+w-u,t)\, \psi(u, x+w-u, x)\, dw\, du.$$

Um diesen Ausdruck gleichförmiger mit dem durch Formel 3) gegebenen Ausdrucke für $\int dn$ zu machen, will ich statt w den Buchstaben x', statt u den Buchstaben ξ schreiben. Bekanntlich kann man ja in einem bestimmten Integrale die Variabeln, nach denen zu integriren ist, bezeichnen, wie man will, wenn nur die Grenzen dieselben bleiben. Dadurch ergibt sich

$$\int d\nu = \tau\, dx \int_0^\infty \int_0^{x+x'} f(\xi,t) f(x+x'-\xi,t)\, \psi(\xi, x+x'-\xi, x)\, dx'\, d\xi. \quad 11)$$

Bevor wir die beiden für $\int dn$ und $\int d\nu$ gefundenen Werthe in die Gleichung 5) substituiren, wollen wir jene Gleichung noch etwas transformiren. Entwickeln wir ihre linke Seite nach dem Taylor'schen Lehrsatze, so ergibt sich

$$f(x,t)dx + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \tau\, dx + A\tau^2 dx = f(x,t)dx - \int dn + \int d\nu\,,$$

wobei A irgend eine endliche Grösse ist, und daraus

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\int d\nu}{\tau\, dx} - \frac{\int dn}{\tau\, dx} - A\tau\,,$$

also nach Substitution der Werthe 3) und 11) für $\int dn$ und $\int d\nu$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \int_0^\infty \int_0^{x+x'} f(\xi,t) f(x+x'-\xi,t) \psi(\xi, x+x'-\xi, x) dx' d\xi -$$

$$- \int_0^\infty \int_0^{x+x'} f(x,t) f(x',t) \psi(x,x',\xi) \, dx' d\xi - A\tau.$$

Da alles bis auf $A\tau$ endlich ist, kann dasselbe vernachlässigt werden. Ferner können die beiden Integrale in eins zusammengefasst werden, da ja Integrationsvariabeln und Grenzen in beiden dieselben sind. Dadurch ergibt sich:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \int_0^\infty \int_0^{x+x'} [f(\xi,t) f(x+x'-\xi,t) \psi(\xi, x+x'-\xi, x) - \qquad 12)$$

$$- f(x,t) f(x',t) \psi(x,x',\xi)] \, dx' d\xi.$$

Dies ist die gesuchte partielle Differentialgleichung, welche das Gesetz der Veränderung der Function f bestimmt. Sie bedarf jedoch noch einer Transformation, zu welcher wir die beiden durch folgende für beliebige x, x' und ξ giltige Gleichungen ausgedrückten Eigenschaften der Function ψ brauchen werden:

$$\psi(x,x',\xi) = \psi(x', x, x+x'-\xi) \qquad 13)$$

$$\sqrt{xx'}\psi(x,x',\xi) = \sqrt{\xi(x+x'-\xi)}\,\psi(\xi, x+x'-\xi, x), \qquad 14)$$

wobei selbstverständlich alle Wurzeln mit dem positiven Zeichen zu nehmen sind; die ψ sind auch wesentlich positive Grössen. Die erste dieser beiden Gleichungen lässt sich leicht beweisen. Sei dn' die Zahl der Zusammenstösse, welche in der Volumeinheit während der schon früher mit τ bezeichneten sehr kleinen Zeit so geschehen, dass vor denselben die lebendige Kraft des ersten Moleküls zwischen x' und $x'+dx'$, die des zweiten zwischen x und $x+dx$, und nach demselben die des ersten Moleküls zwischen $x+x'-\xi-d\xi$ und $x+x'-\xi$ liegt, also der Stösse, welche durch das Schema

		a	b	
vor dem Stosse..		$x', x'+dx'$	$x, x+dx$	D)
nach „ „ ..		$x+x'-\xi-d\xi, x+x'-\xi$		

charakterisirt sind. Dann kann dn' wieder durch blosse Buchstabenvertauschung aus der früher mit dn bezeichneten Grösse gefunden werden. Und zwar zeigt die Vergleichung der Schemata D) und A), dass man

$$x' \text{ statt } x, \quad x \text{ statt } x', \quad x+x'-\xi-d\xi \text{ statt } \xi,$$
$$dx' \text{ statt } dx, \quad dx \text{ statt } dx'$$

schreiben muss. $d\xi$ bleibt. Nimmt man diese Vertauschungen in der Gleichung 2) vor, so ergibt sich:

$$dn' = \tau f(x', t) dx' \,.\, f(x, t) dx \,.\, d\xi\, \psi(x', x, x+x'-\xi-d\xi). \qquad 15)$$

Wenn aber die lebendige Kraft des einen Moleküls nach dem Stosse zwischen $x+x'-\xi-d\xi$ und $x+x'-\xi$ liegt, so liegt die des anderen genau zwischen ξ und $\xi+d\xi$. Statt des Schema's D) könnten wir unsere Zusammenstösse also auch durch folgendes

	a	b
vor dem Stosse..	$x', x'+dx'$	$x, x+dx$
nach „ „ ..		$\xi, \xi+d\xi$

charakterisiren. Und jetzt sieht man, dass es ganz dieselben Zusammenstösse, wie die durch das Schema A) charakterisirten sind. Denn, welches Molekül ich als das erste, welches als das zweite bezeichne (welches in die Rubrik a, welches in die Rubrik b eintrage), ist offenbar gleichgiltig. Da jene beiden Gattungen von Zusammenstössen gar nicht verschieden sind, so muss also auch ihre Anzahl gleich, folglich $dn = dn'$ sein. Setzen wir die beiden Werthe 2) und 15) wirklich gleich und streichen die beiden gemeinsamen Factoren, so ergibt sich

$$\psi(x, x', \xi) = \psi(x', x, x+x'-\xi-d\xi).$$

Hier kann das Differential $d\xi$ neben dem Endlichen weggelassen werden, da ja ψ unmöglich discontinuirlich sein kann, und wir erhalten somit die Gleichung 13). Schwieriger ist der Beweis der Gleichung 14). Der Beweis dieser Gleichung wurde

zuerst, freilich in etwas anderer Form, von Maxwell geliefert; dieselbe wurde dann von mir bedeutend verallgemeinert, wobei sie sich als specieller Fall des Jacobi'schen Princips des letzten Multiplicators erwies; ich glaube, mich daher mit dem Beweise dieser Gleichung hier nicht aufhalten zu sollen, dieselbe vielmehr als etwas bekanntes voraussetzen zu können. Ich bemerke nur noch, dass bei ihrem Beweise vorausgesetzt wird, dass die zwischen zwei materiellen Punkten wirksame Kraft Function ihrer Entfernung ist, nach der Richtung ihrer Verbindungslinie wirkt, und Wirkung und Gegenwirkung gleich sind. Diese Voraussetzungen sind also zur Giltigkeit der folgenden Rechnungen nothwendig. Mit Rücksicht auf die Gleichung 14) kann aus der eckigen Klammer der Gleichung 12) auch ψ als gemeinsamer Factor herausgehoben werden, und es ergibt sich:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x,t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}} \right] \times \qquad 16)$$
$$\times \sqrt{xx'}\, \psi(x,x',\xi) dx' d\xi.$$

Dies ist die Fundamentalgleichung für die Veränderung der Function $f(x,t)$. Ich bemerke nochmal, dass die Wurzeln alle positiv zu nehmen sind, sowie auch ψ und die f wesentlich positive Grössen sind. Setzen wir für einen Augenblick

$$f(x,t) = C\sqrt{x}e^{-hx}, \qquad 16\text{a})$$

wobei C und h Constanten sind, so dass also

$$f(x',t) = C\sqrt{x'}e^{-hx'}, \quad f(\xi,t) = C\sqrt{\xi}e^{-h\xi},$$

$$f(x+x'-\xi,t) = C\sqrt{x+x-\xi}\, e^{-h(x+x-\xi)}$$

wird, so verschwindet der Ausdruck in der eckigen Klammer der Gleichung 16); es wird also $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = 0$. Dies ist nichts anderes, als der Beweis Maxwell's übertragen in unsere

gegenwärtige Bezeichnungsweise. Ist die Zustandsvertheilung zu irgend einer Zeit durch die Formel 16a) bestimmt, so ist $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=0$, d. h. dieselbe verändert sich im Verlaufe der Zeit nicht weiter. Dies und nichts anderes ist von Maxwell bewiesen worden. Wir wollen aber jetzt das Problem viel allgemeiner auffassen. Wir wollen annehmen, die Vertheilung der lebendigen Kraft sei zu Anfang der Zeit eine ganz beliebige gewesen, und wollen uns fragen, wie verändert sich dieselbe im Verlaufe der Zeit. Ihre Veränderung ist bestimmt durch die partielle Differentialgleichung 16). Es kann diese partielle Differentialgleichung, wie wir später sehen werden, in ein System gewöhnlicher Differentialgleichung verwandelt werden, wenn man an die Stelle des Doppelintegrals eine Summe sehr vieler Glieder setzt. Es ist ja ein solches Doppelintegrale bekanntlich nichts anderes, als eine abgekürzte Bezeichnung für eine Summe unendlich vieler Glieder. An dem Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen werden dann alle Rechnungsoperationen viel anschaulicher. Ich will jedoch absichtlich diese Vertauschung der Summation mit einer Integration vorerst nicht vornehmen, damit es nicht scheine, als sei dieselbe zum Beweise unserer Sätze nothwendig. Dieser Beweis kann geführt werden ganz ohne dass man die Symbolik der Integralrechnung verlässt. Nur zur Veranschaulichung derselben werden wir zum Schlusse die Summenformeln benützen. Wir wollen zunächst den Beweis eines Satzes liefern, welcher die Grundlage unserer ganzen gegenwärtigen Untersuchung bildet, des Satzes nämlich, dass die Grösse

$$E=\int_0^\infty f(x,t)\left\{\log\left[\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\right]-1\right\}dx \tag{17}$$

niemals zunehmen kann, wenn die in dem bestimmten Integrale vorkommende Function $f(x, t)$ der partiellen Differentialgleichung 16) genügt. Auf der rechten Seite der Formel 17) ist bezüglich x von Null bis Unendlich zu integriren. Es fällt also x aus der Grösse E ganz heraus. E ist nur eine Function von t. Da t in den Grenzen des Integrals nicht vorkommt, so erhalten

wir den Differentialquotienten $\frac{dE}{dt}$, indem wir die Grösse unter dem Integralzeichen partiell nach t differentiiren, x dabei constant lassend. Diese Differentiation, welche ungemein leicht auszuführen ist, liefert

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty \log\left[\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\right] \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} . dx.$$

Wir nehmen an, dass $f(x,t)$ die Gleichung 16) befriedigt. Substituiren wir aus dieser Gleichung den Werth für $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$, so ergibt sich

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty \log\left[\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\right] dx \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x,t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\right] \times$$
$$\times \sqrt{xx'}\, \psi(x,x',\xi) dx' d\xi.$$

Da bei der Integration nach x' und ξ die Grösse x als constant zu betrachten ist, so können wir den Logarithmus auch unter die beiden folgenden Integralzeichen setzen und schreiben

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \log \frac{f(x,t)}{\sqrt{x}} . \left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x,t)}{\sqrt{x}} \frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\right] \times \tag{18}$$
$$\times \sqrt{xx'}\, \psi(x,x',\xi) dx\, dx' d\xi.$$

Die wahre Bedeutung der Transformationen, welche wir jetzt mit diesem Ausdrucke vornehmen werden, wird freilich erst in ein helles Licht treten, wenn wir die Integrale durch Summenformeln ersetzen werden. Es wird sich da zeigen, dass alle folgenden Transformationen des Integrals wie natürlich nichts anderes als Veränderungen der Summationsordnung sind; es wird dann auch klar werden, warum gerade diese Änderungen der Summationsordnung nothwendig sind. Jetzt aber will ich hierauf nicht näher eingehen, sondern so rasch als möglich zum Beweise des Satzes zu gelangen suchen, dass in der

That E nicht zunehmen kann. Wir können in der Formel 18) zuerst nach x' und dann nach x integriren[6]; dadurch erhalten wir:

$$\frac{dE}{dt}=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{x+x'}\log\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}}-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\right]\times$$

$$\times\sqrt{xx'}\,\psi(x,x',\xi)dx'dx\,d\xi,$$

oder wenn wir für $\psi(x,x',\xi)$ seinen Werth aus der Gleichung 13) substituiren,

$$\frac{dE}{dt}=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{x+x'}\log\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\frac{(f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}}-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\right]\times$$

$$\times\sqrt{xx'}\,\psi(x',x,x+x'-\xi))\,dx'dx\,d\xi.$$

Wir lassen jetzt die Variabeln x' und x unverändert; aber statt ξ führen wir die neue Variable $\xi'=x+x'-\xi$ ein, so dass also $\xi=x+x'-\xi'$, $d\xi=-d\xi'$ wird. Dann ergibt sich

---

[6] Dass die Vertauschung der Integrationsordnung unbedingt gestattet ist, folgt schon daraus, dass wir die Gleichungen 20), 22) und 23) genau in derselben Weise wie die Gleichung 18) direct hätten ableiten können; wir schlugen den Weg der Transformation blos ein, um die Schlüsse, durch welche wir die Gleichung 18) erhielten, nicht viermal wiederholen zu müssen. Auch dadurch, dass die früher angewandte Differentiation unter dem Integralzeichen unerlaubt wird, indem der Integrant discontinuirlich wird, erleidet der im Texte geführte Beweis keine Störung, wie man nachweisen kann, indem man aus dem gesammten Raume, über den in den Formeln 18), 20), 22) und 23) die Integrationen zu erstrecken sind, gleichzeitig um alle Stellen, für welche eine der Grössen s, s', σ oder σ' Null oder unendlich wird, sehr dünne flächenartig ausgedehnte Streifen ausschliesst. Von der Gesammtheit der auf diese Art aus $4\frac{dE}{dt}$ ausgeschlossenen Glieder lässt sich dann mittelst der ergänzten Taylor'schen Reihe beweisen, dass ihre Summe nicht positiv sein kann, wenn keine dieser Grössen unendlich nahe unendlch viele Discontinuitätsstellen hat.

$$\frac{dE}{dt} = -\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{x+x'}^0 \log\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\left[\frac{f(x+x'-\xi',t)}{\sqrt{x+x'-\xi'}}\frac{f(\xi',t)}{\sqrt{\xi'}} - \frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\right]\times$$
$$\times\sqrt{xx'}\,\psi(x',x,\xi')dx'dx\,d\xi',$$

oder, wenn man Zeichen und Grenzen des ersten Integrals umkehrt:

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{x+x'} \log\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\left[\frac{f(\xi',t)}{\sqrt{\xi'}}\frac{f(x+x'-\xi',t)}{\sqrt{x+x'-\xi'}} - \frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\right]\times \tag{19}$$
$$\times\sqrt{xx'}\,\psi(x',x,\xi')dx'dx\,d\xi'.$$

Dieses dreifache Integrale ist jetzt ganz so gebaut, wie das der Formel 18); nur sind die Variabeln, nach denen integrirt werden soll, anders bezeichnet. Allein das ist nur ein scheinbarer Unterschied. Die Integrationsvariabeln eines bestimmten Integrals kann man ja bezeichnen wie man will, so lange nur die Grenzen dieselben bleiben. Wir können daher auch in der Formel 19) statt ξ' wieder ξ schreiben, und auch die Buchstaben x und x' mit einander vertauschen. Dadurch ergibt sich

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{x+x'} \log\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\right]\times \tag{20}$$
$$\times\sqrt{xx'}\,\psi(x,x',\xi)dx\,dx'd\xi.$$

Über die Identität der beiden Integrale 19) und 20) kann kein Zweifel bestehen, da sie sich blos durch die Buchstaben unterscheiden, mit denen die Integrationsvariabeln bezeichnet sind. Einen dritten Ausdruck für $\frac{dE}{dt}$ erhalten wir in folgender Weise. Wir substituiren in Formel 18) statt $\sqrt{xx'}\,\psi(x,x',\xi)$ seinen Werth aus der Gleichung 14). Dadurch erhalten wir zunächst:

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{x+x'} \log\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\right]\times$$
$$\times\sqrt{\xi(x+x'-\xi)}\,\psi(\xi,x+x'-\xi,x)dx\,dx'd\xi.$$

Wir wollen jetzt für x' eine neue Variable einführen. Da müssen wir uns die Integration nach x' zuerst, also vor der nach ξ ausgeführten denken. Wir brauchen da blos das Doppelintegrale

$$\int_0^\infty\int_0^{x+x'}\log\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}}-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(x'\,t)}{\sqrt{x'}}\right]\times$$
$$\times\sqrt{\xi(x+x'-\xi)}\,\psi(\xi,x+x'-\xi,x)\,dx'd\xi$$

zu transformiren. Dasselbe braucht dann nur noch mit dx multiplicirt und nach x von Null bis Unendlich integrirt zu werden, um $\frac{dE}{dt}$ zu erhalten. In einem solchen Doppelintegrale haben wir bereits früher die Integrationsordnung umgekehrt. Durch ganz dieselben Betrachtungen, wie damals, ergibt sich, dass es in eine Summe zweier Integrale zerfällt, nämlich:

$$\int_0^x\int_0^\infty\log\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}}-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\right]\times$$
$$\times\sqrt{\xi(x+x'-\xi)}\psi(\xi,x+x'-\xi,x)d\xi\,dx'+$$
$$+\int_x^\infty\int_{\xi-x}^\infty\log\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}}-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\right]\times$$
$$\times\sqrt{\xi(x+x'-\xi)}\psi(\xi,x+x'-\xi,x)d\xi\,dx'.$$

Führen wir jetzt in diese beiden Integrale für x' die Variable $\xi'=x+x'-\xi$ ein, so erhalten wir nach richtiger Grenzenbestimmung:

$$\int_0^x\int_{x-\xi}^\infty\log\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\frac{f(\xi',t)}{\sqrt{\xi'}}-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(\xi+\xi'-x,t)}{\sqrt{\xi+\xi'-x}}\right]\times$$
$$\times\sqrt{\xi\xi'}\,\psi(\xi,\xi',x)d\xi\,d\xi'+$$
$$+\int_x^\infty\int_0^\infty\log\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\frac{f(\xi',t)}{\sqrt{\xi'}}-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(\xi+\xi'-x,t)}{\sqrt{\xi+\xi'-x}}\right]\times$$
$$\times\sqrt{\xi\xi'}\,\psi(\xi,\xi',x)d\xi\,d\xi'.$$

Diese beiden bestimmten Integrale sind noch bezüglich x von Null bis Unendlich zu integriren, so dass man also erhält:

$$\frac{dE}{dt}=\int_0^\infty\int_0^x\int_{x-\xi}^\infty \log\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\,\frac{f(\xi',t)}{\sqrt{\xi'}}-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\,\frac{f(\xi+\xi'-x,t)}{\sqrt{\xi+\xi'-x}}\right]\times$$
$$\times\sqrt{\xi\xi'}\,\psi(\xi,\xi',x)\,dx\,d\xi\,d\xi'+ \qquad 21)$$
$$+\int_0^\infty\int_x^\infty\int_0^\infty \log\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\,\frac{f(\xi',t)}{\sqrt{\xi'}}-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\,\frac{f(\xi+\xi'-x,t)}{\sqrt{\xi+\xi'-x}}\right]\times$$
$$\times\sqrt{\xi\xi'}\,\psi(\xi,\xi',x)\,dx\,d\xi\,d\xi'.$$

Hier müssen wir jetzt die Integrationsordnung so verändern, dass zuerst nach x, dann nach ξ', zuletzt nach ξ integrirt wird [7]. Da ist es behufs der Grenzenbestimmung wohl am

---

[7] Alle im Text geführten etwas weitläufigen Grenzenbestimmungen vereinfachen sich ausserordentlich, wenn man die Grenzen nach der bereits in der Anmerkung 2 gegebenen Weise definirt. Dann sieht die Formel 18) so aus:

$$\frac{dE}{dt}=\iiint\log\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\,\frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}}-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\,\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\right]\times \qquad 18a)$$
$$\times\sqrt{xx'}\,\psi(x,x',\xi)\,dx\,dx'\,d\xi.$$

Zu integriren ist über alle Werthe, welche folgenden Ungleichungen genügen:

$$x\geqq 0,\; x'\geqq 0,\; \xi\geqq 0,\; x+x'-\xi\geqq 0 \qquad 18b)$$

Die beiden Formeln 18a) und 18b) besagen jetzt ganz dasselbe, wie früher das eine bestimmte Integrale 18), und ich bemerke noch, dass jetzt die Integrationsordnung ganz willkürlich ist, ja es ist nicht einmal nothwendig, dass überhaupt zuerst nach der einen, dann der anderen Variabeln integrirt wird, wenn nur über alle Werthe integrirt wird, die den Ungleichungen 18b) genügen. Führen wir nun irgend welche neuen Variabeln u, v, w ein, so ist bekanntlich

$$du\,dv\,dw=\Sigma\pm\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dw}{dz}\cdot dx\,dy\,dz.$$

besten, sich den Integrationsraum geometrisch zu versinnlichen. Da das Integrale ein dreifaches ist, so müssen wir hiezu den

---

Wollen wir nun die Formel 20) des Textes erhalten, so brauchen wir nur zu setzen

$$u=x',\ v=x,\ w=x+x'-\xi.$$

Dann wird die Functionaldeterminante gleich eins, und es ist klar, dass sie mit positiven Zeichen zu nehmen ist, wenn wir immer von den kleineren zu den grösseren Werthen der Variabeln integriren, also die Differentiale positiv betrachten. Es ist also

$$du\,dv\,dw=dx\,dx'\,d\xi$$

und die Gleichung 18 a) geht über in

$$\frac{dE}{dt}=\iiint \log\frac{f(v,t)}{\sqrt{v}}\cdot\left[\frac{f(u+v-w,t)}{\sqrt{u+v-w}}\frac{f(w,t)}{\sqrt{w}}-\frac{f(v,t)}{\sqrt{v}}\frac{f(u,t)}{\sqrt{u}}\right]\times$$
$$\times\sqrt{uv}\,\psi(v,u,u+v-w)\,du\,dv\,dw.$$

Die Ungleichungen 18 b) aber, welche die Grenzen bestimmen, verwandeln sich in

$$v \gtrless 0,\ u \gtrless 0,\ u+v-w \gtrless 0,\ w \gtrless 0.$$

Nun können wir wieder die Buchstaben u, v, w mit x, x' und ξ vertauschen (an der Bezeichnung der Integrationsvariabeln liegt ja nichts), und erhalten für das Integrale

$$\frac{dE}{dt}=\iiint \log\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\cdot\left[\frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}}\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x'}}\frac{f(x',t)}{\sqrt{x}}\right]\times$$
$$\times\sqrt{xx'}\,\psi(x',x,x+x'-\xi)\,dx\,dx'\,d\xi$$

und für die Ungleichungen, die die Grenzen bestimmen

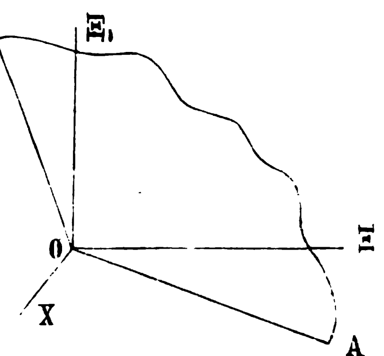
$$x \gtrless 0,\ x' \gtrless 0,\ \xi \gtrless 0,\ x+x'-\xi \gtrless 0. \qquad \text{20 b)}$$

Ersetzen wir jetzt schliesslich $\psi(x',x,x+x'-\xi)$ nach Gleichung 13) durch $\psi(x,x',\xi)$, so erhalten wir

$$\frac{dE}{dt}=\iiint \log\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\cdot\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}}-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\right]\times \qquad \text{20 a)}$$
$$\times\sqrt{xx'}\,\psi(x,x',\xi)\,dx\,dx'\,d\xi.$$

Die Ungleichungen 20 b) sind identisch mit den Ungleichungen 18 a). Vereinigen wir daher die beiden Formeln 20 a) und 20 b) in eine ein-

Raum zu Hilfe nehmen. Ziehen wir uns drei rechtwinklige Coordinatenaxen OX, $O\Xi$, $O\Xi'$ im Raume, und tragen auf denselben die Werthe von x, ξ, ξ' auf. Ferner ziehen wir in der Ebene $XO\Xi$ die Gerade OA, welche mit OX und $O\Xi$ Winkel von 45° macht und ebenso in der Ebene $\Xi O\Xi'$ die Gerade OB. Betrachten wir jetzt das erste in der Formel 21) erscheinende dreifache Integrale. In demselben ist bezüglich ξ' von $x-\xi$ bis ∞, also von einem Punkte der Ebene AOB bis ins Unendliche hinauf zu integriren; bezüglich ξ ist von Null bis x, also von Null bis zu einem Punkte der



---

zige, indem wir uns wieder zuerst nach ξ, dann nach x', zuletzt nach x integrirt denken und die Integrationsgrenzen jedesmal den Integralzeichen beisetzen, so erhalten wir die gewünschte Formel 20) des Textes.

Wollen wir die Formel 22) des Textes gewinnen, so setzen wir

$$u=\xi,\quad v=x+x'-\xi,\quad w=x.$$

Die Determinante ist wieder eins, daher

$$du\, dv\, dw = dx\, dx'\, d\xi.$$

Ferner ist

$$x'=u+v-w.$$

Die Gleichung 18 a) lautet also nach Einführung dieser Variabeln

$$\frac{dE}{dt}=\iiint \log\frac{f(w,t)}{\sqrt{w}}\cdot\left[\frac{f(u,t)}{\sqrt{u}}\frac{f(v,t)}{\sqrt{v}}-\frac{f(w,t)}{\sqrt{w}}\frac{f(u+v-w,t)}{\sqrt{u+v-w}}\right]\times$$

$$\times\sqrt{w(u+v-w)}\,\psi(w,u+v-w,u)\,du\,dv\,dw$$

und die Ungleichungen 18 b) lauten

$$w\gtreqless 0,\quad u+v-w\gtreqless 0,\quad u\gtreqless 0,\quad v\gtreqless 0.$$

Vertauschen wir jetzt, ganz wie früher die Buchstaben u, v, w mit x, x', ξ, so erhalten wir:

Geraden OA zu integriren. Der Integrationsraum des ersten Integrals ist also der ganze Theil des Raumes, welcher vertical über AOB steht (wofern man sich die Axe $O\Xi'$ vertical denkt). Ebenso findet man, dass der Integrationsraum des zweiten Integrals der Formel 21) jener Theil des Raumes ist, der vertical über dem Dreiecke $AO\Xi$ steht. (Jenes Dreieck von O gegen A und gegen Ξ zu ins Unendliche erstreckt gedacht.) Beide Integrale zusammen repräsentiren uns also eine Integration, die über die körperliche Ecke zu erstrecken ist, die von den vier Figuren AOB, $AO\Xi$, $BO\Xi'$ und $\Xi O\Xi'$ begrenzt wird. Und nun ist es leicht, die Grenzen zu bestimmen, wenn zuerst nach x

---

$$\frac{dE}{dt}=\iiint\log\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\cdot\left[\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}-\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}}\right]\times \qquad 22\text{a)}$$

$$\times\sqrt{\xi(x+x'-\xi)}\,\psi(\xi,x+x'-\xi,x)\,dx\,dx'\,d\xi$$

$$x\geqq 0,\ x'\geqq 0,\ x+x'-\xi\geqq 0,\ \xi\geqq 0. \qquad 22\text{b)}$$

Man sieht sofort, dass wir in der Gleichung 22 a) wieder blos von der Formel 14) Gebrauch zu machen und die Grenzen wirklich anzuschreiben brauchen, um die Formel 22) des Textes zu erhalten. Man sieht also, dass, wenn man von der Methode der Grenzenbestimmung durch Ungleichungen Gebrauch macht, die Transformationen fast ohne alle Rechnung gemacht werden können, welche im Texte weitläufige Rechnungen erfordern. Wenn ich trotzdem im Texte von der weitläufigeren Methode Gebrauch machte, so geschah es blos, weil diese Art der Grenzenbestimmung durch Ungleichungen eine etwas ungewöhnlichere ist. Ich bemerke hier noch, dass für E auch folgender Ausdruck gesetzt werden kann:

$$E_1=\int_0^\infty f(x,t)\log\left[\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\right]dx. \qquad 17\text{a)}$$

Dieser Ausdruck ist nämlich blos um $\int_0^\infty f(x,t)\,dx$, also um die Gesammtzahl der Moleküle in der Volumeinheit grösser, als der im Texte für E gegebene. Und da diese Gesammtzahl constant ist, so unterscheidet er sich nur durch eine Constante davon, kann also wie der im Texte gegebene nicht zunehmen. Eine andere Transformationsmethode der Integrale besteht darin, dass man der Function $\psi(x,x',\xi)$ den Werth Null beilegt, so oft $x+x'-\xi<0$ ist, und dann alle Integrationen von Null bis Unendlich erstreckt.

integrirt wird. Bei constantem ξ und ξ' bleiben wir in jener körperlichen Ecke, wenn x von Null bis $\xi+\xi'$ wächst. Null und $\xi+\xi'$ sind also die Integrationsgrenzen für x. Bezüglich ξ und ξ' aber geht die Integration von Null bis Unendlich. Bei dieser neuen Anordnung der Integrationsordnung vereinigen sich also wieder beide Integrale in eines und man hat

$$\frac{dE}{dt}=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{\xi+\xi'}\log\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\cdot\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\frac{f(\xi',t)}{\sqrt{\xi'}}-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(x+x'-x,t)}{\sqrt{\xi+\xi'-x}}\right]\times$$
$$\times\sqrt{\xi\xi'}\,\psi(\xi,\xi',x)d\xi\,d\xi'dx.$$

In diesem bestimmten Integrale ist es wieder gleichgiltig, mit welchen Buchstaben wir die Variabeln, nach denen zu integriren ist, bezeichnen. Wir können daher die beiden Variabeln ξ und ξ' auch mit den lateinischen Buchstaben x und x' bezeichnen, die Variable x aber mit dem Buchstaben ξ. Thun wir dies und setzen noch vor das ganze Integral das negative Zeichen, während wir gleichzeitig die Zeichen in der eckigen Klammer umkehren, so ergibt sich

$$\frac{dE}{dt}=-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{x+x'}\log\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\cdot\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}}-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\right]\times \qquad 22)$$
$$\times\sqrt{xx'}\,\psi(x,x',\xi)dx\,dx'\,d\xi.$$

Wenden wir auf diese Formel wieder ganz dieselbe Transformation an, durch welche wir aus der Gleichung 18) die Gleichung 20) erhielten, so gewinnen wir noch einen vierten Ausdruck für $\frac{dE}{dt}$. Ich glaube, diese Transformation hier nicht wirklich ausführen zu sollen; man übersieht leicht, dass ihr Resultat folgendes ist:

$$\frac{dE}{dt}=-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{x+x'}\log\frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}}\cdot\left[\frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}\frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}}-\right. \qquad 23)$$
$$\left.-\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}\frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}\right]\sqrt{xx'}\,\psi(x,x',\xi)dx\,dx'd\xi.$$

Ich will jetzt die vier Ausdrücke, die wir für $\frac{dE}{dt}$ erhielten, noch einmal übersichtlich zusammenstellen, wobei ich mich aber folgender Abkürzungen bediene. Ich setze:

$$\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}=s,\quad \frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}}=s',\quad \frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}}=\sigma,\quad \frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}}=\sigma',$$

$$\sqrt{xx'}\,\psi(x,x',\xi)=r.$$

Dadurch gehen die vier Gleichungen 18), 20), 22) und 23) über in

$$\frac{dE}{dt}=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{x+x'}\log s\ .(\sigma\sigma'-ss')r\,dx\,dx'\,d\xi$$

$$\frac{dE}{dt}=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{x+x'}\log s'.(\sigma\sigma'-ss')r\,dx\,dx'\,d\xi$$

$$\frac{dE}{dt}=-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{x+x'}\log \sigma\ .(\sigma\sigma'-ss')r\,dx\,dx'\,d\xi$$

$$\frac{dE}{dt}=-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{x+x'}\log \sigma'.(\sigma\sigma'-ss')r\,dx\,dx'\,d\xi.$$

Wir erhalten auch $\frac{dE}{dt}$, wenn wir alle die vier Ausdrücke addiren und die Summe durch 4 dividiren. Da rechts lauter bestimmte Integrale mit denselben Integrationsvariabeln und denselben Grenzen stehen, so können wir die Integralzeichen vor die Summen schreiben und brauchen blos die Grössen unter den Integralzeichen zu addiren. Heben wir da noch den gemeinsamen Factor heraus, so erhalten wir

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{x+x'}(\log s+\log s'-\log\sigma-\log\sigma')(\sigma\sigma'-ss')\,r\,dx\,dx'\,d\xi,$$

oder nach Zusammenziehen der Summe der Logarithmen in den Logarithmus eines Productes

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{x+x'} \log\left(\frac{ss'}{\sigma\sigma'}\right).(\sigma\sigma'-ss')\, r\, dx\, dx'\, d\xi. \qquad 24)$$

Wenn nun nicht für alle Werthecombinationen der in den s und σ enthaltenen Variabeln

$$ss' = \sigma\sigma' \qquad 25)$$

ist, so muss für einige entweder $ss' > \sigma\sigma'$ oder $ss' < \sigma\sigma'$ sein. Im ersten Falle ist $\log\left(\frac{ss'}{\sigma\sigma'}\right)$ positiv, $\sigma\sigma' - ss'$ aber negativ, im zweiten umgekehrt; in beiden Fällen ist daher das Product $\log\left(\frac{ss'}{\sigma\sigma'}\right).(\sigma\sigma'-ss')$ negativ. Nun ist aber die Grösse r wesentlich positiv, da ψ immer positiv ist, und auch die Quadratwurzeln mit positivem Zeichen zu nehmen sind. Es ist also die Grösse unter dem Integralzeichen, folglich auch das ganze Integrale nothwendig negativ. Es muss also E nothwendig abnehmen. Nur wenn allgemein die Gleichung 25) gilt, kann E constant bleiben. Da nun, wie wir später sehen werden, E auch nicht negativ unendlich werden kann, so muss es sich mit wachsender Zeit immer mehr einem Minimum nähern, für welches $\frac{dE}{dt} = 0$ wird, daher die Gleichung 25) besteht. Diese Gleichung lautet, wenn wir für s, s', σ und σ' wieder ihre Werthe substituiren:

$$\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{f(x',t)}{\sqrt{x'}} = \frac{f(\xi,t)}{\sqrt{\xi}} \cdot \frac{f(x+x'-\xi,t)}{\sqrt{x+x'-\xi}}.$$

Damit diese Gleichung für alle Werthe der Variabeln x, x' und ξ bestehe, muss, wie sich leicht zeigen lässt,

$$f(x,t) = C\sqrt{x}\, e^{-hx}$$

sein. Es ist somit strenge bewiesen, dass, wie immer die Vertheilung der lebendigen Kraft zu Anfang der Zeit gewesen sein mag, sie sich nach Verlauf einer sehr langen Zeit immer nothwendig der von Maxwell gefundenen nähern muss. Das bis-

her Vorgenommene ist nun allerdings nichts weiter als ein mathematischer Kunstgriff, um einen Satz strenge zu beweisen, dessen exacter Beweis bisher nicht gelungen ist. Es gewinnt aber sehr an Bedeutung durch seine Anwendbarkeit auf die Theorie mehratomiger Gasmoleküle. Dort lässt sich wieder von einer gewissen Grösse *E* beweisen, dass dieselben in Folge der Molecularbewegung nur abnehmen oder im Grenzfalle constant bleiben kann. Es lässt sich also der Beweis liefern, dass bei der Atombewegung von Systemen beliebig vieler materieller Punkte immer eine gewisse Grösse existirt, welche in Folge jener Atombewegung nicht zunehmen kann, und diese Grösse stimmt bis auf einen constanten Factor genau mit der von mir in der Abhandlung „Analyt. Beweis der 2. Haupts. etc.", Sitzungsb. d. Wiener Akad. Bd. 63, für das bekannte Integrale $\int \frac{dQ}{T}$ gefundenen Grösse überein. Es ist also hiemit ein analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes auf einem ganz anderen Wege angebahnt, als derselbe bisher versucht wurde. Bisher suchte man nämlich immer zu beweisen, dass $\int \frac{dQ}{T} = 0$ ist für den umkehrbaren Kreisprocess, womit noch immer nicht analytisch bewiesen ist, dass es für den nicht umkehrbaren Kreisprocess, der doch allein in der Natur vorkommt, immer negativ ist, während der umkehrbare Kreisprocess blos ein Ideal ist, dem man sich mehr oder weniger nähern, es aber nicht vollkommen erreichen kann. Hier dagegen gelangen wir direct zum Satze, dass $\int \frac{dQ}{T}$ im Allgemeinen negativ und nur für den Grenzfall gleich Null ist, der natürlich der umkehrbare Kreisprocess ist (weil für ihn nicht, wenn man ihn in dem einen und andern Sinne durchläuft, $\int \frac{dQ}{T}$ immer negativ sein kann).

II. Ersetzung der Integrale durch Summen.

Ich will mich hier nicht länger mit Betrachtung der Beziehung der Grösse *E* zum Integrale $\int \frac{dQ}{T}$ aufhalten, sondern jetzt

zeigen, wie alles bisher Vorgetragene viel klarer und anschaulicher wird, wenn wir die partielle Differentialgleichung 16) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen verwandeln. Es geschieht dies, indem wir das in jener partiellen Differentialgleichung erscheinende Doppelintegrale durch eine Summe ersetzen nach der bekannten Formel

$$\int_0^\infty f(x,t)dx = lim\,\varepsilon[f(\varepsilon,t)+f(2\varepsilon,t)+f(3\varepsilon,t)+\ldots f(p\varepsilon,t)]$$

$$\text{für } lim\,\varepsilon = 0,\ lim\,p\varepsilon = \infty.$$

Wir wollen beide Integrale der Formel 16) durch eine derartige Summe ersetzen, und zuerst ε und p endlich annehmen. Dann verwandelt sich die Gleichung 16) in eine Differentialgleichung mit folgenden Unbekannten: $f(\varepsilon,t)$, $f(2\varepsilon,t),\ldots f(p\varepsilon,t)$. Jede dieser Unbekannten ist nur mehr Function der Zeit. Die Zahl der Unbekannten ist p. Allein die Gleichung 16) muss für jedes x gelten. Setzen wir darin der Reihe nach

$$x = \varepsilon,\ x = 2\varepsilon, \ldots x = p\varepsilon,$$

so erhalten wir im Ganzen p Differentialgleichungen zwischen unsern p Unbekannten; und da die Unbekannten nur Functionen der Zeit sind, so sind die Differentialgleichungen keine partiellen. Dieses System von p gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen p Unbekannten lösen wir zuerst auf und untersuchen dann, welcher Grenze sich die Lösung nähert, wenn ε unendlich klein, $p\varepsilon$ unendlich gross wird. Jene Grenze ist dann die Lösung der partiellen Differentialgleichung. Die Substitution der Summenformel in die partielle Differentialgleichung hat gar keine Schwierigkeit. Dieselbe verwandelt sich dann in das Gleichungssystem 34) auf Seite 39. Auf dieser Seite werden wir dann auch die übrigen jetzt nur skizzirten Rechnungsoperationen ausführen. Zuvor will ich aber noch zeigen, wie man unser Problem modificiren muss, um direct statt auf die partielle Differentialgleichung auf jenes System von p gewöhnlichen Differentialgleichungen zu kommen. Die Methode, deren wir uns hiebei bedienen werden, ist keineswegs neu. Die Integrale sind bekanntlich nichts anderes, als symbolische

Bezeichnungen für Summen unendlich vieler, unendlich kleiner Glieder. Die symbolische Bezeichnung der Integralrechnung zeichnet sich nur durch eine solche Kürze aus, dass es in den meisten Fällen nur zu unnützen Weitschweifigkeiten führen würde, wenn man die Integrale erst als Summen von p Gliedern hinschriebe und dann p immer grösser werden liesse. Trotzdem aber gibt es Fälle, in denen die letztere Methode wegen der Allgemeinheit, die sie erzielt, namentlich aber wegen der grösseren Anschaulichkeit, in der sie die verschiedenen Lösungen eines Problems erscheinen lässt, nicht ganz zu verschmähen ist. Ich erinnere da an die elegante Auflösung des Problems der Saitenschwingungen durch Lagrange in den *Miscellanea taurinensia*, wo derselbe zuerst die Schwingungen eines Systems von n mit einander verbundenen Kugeln behandelt, und dann zu den Saitenschwingungen gelangt, indem er n immer grösser, die Masse jeder Kugel immer kleiner werden lässt. In ähnlicher Weise wurde auch das Problem der Diffusion und Wärmeleitung (durch Stefan, Sitzungsb. d. Wiener Akad. Bd. 47 u. Beez) gelöst. Noch eine hübsche Anwendung dieser Methode auf die Differentialgleichung $\frac{d^2w}{dr\,ds} = a\left(\frac{dw}{dz} + \frac{dw}{ds}\right)$ deutet Riemann in den Ber. d. Götting. Ges. d. Wiss. Bd. 8 an. Diese Methode scheint mir nun auch in unserem Falle, wenn man sich einmal an einige Abstractionen gewöhnt hat, die Deutlichkeit sehr zu fördern. Wir wollen an die Stelle der continuirlichen Variabeln x eine Reihe discreter Werthe ε, 2ε, 3ε, ... $p\varepsilon$ setzen. Wir müssen daher annehmen, dass unsere Moleküle nicht im Stande sind, eine continuirliche Reihe lebendiger Kräfte anzunehmen, sondern blos solche, welche Vielfache einer gewissen Grösse ε sind. Im Übrigen wollen wir ganz dasselbe Problem wie früher behandeln. In einem Raume R haben wir sehr viele Gasmoleküle. Aber jedes derselben soll nur fähig sein, folgende lebendige Kräfte anzunehmen:

$$\varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ 4\varepsilon \ldots p\varepsilon \qquad 26)$$

Kein Molekül soll eine dazwischen liegende noch grössere lebendige Kraft annehmen. Wenn zwei Moleküle zusammenstossen, so sollen sie ihre lebendige Kraft in gar mannigfaltiger

Weise verändern. Aber immer soll nach dem Stosse die lebendige Kraft jedes Moleküls wieder ein Vielfaches von ε sein. Ich brauche wohl nicht zu bemerken, dass wir es da für den Augenblick nicht mit einem reellen physikalischen Probleme zu thun haben. Es dürfte schwer sein, eine Vorrichtung zu ersinnen, welche den Zusammenstoss zweier Körper so regulirt, dass nach demselben die lebendige Kraft eines jeden immer ein Vielfaches von ε ist. Darum handelt es sich hier auch gar nicht. Jedenfalls steht es uns frei, die mathematischen Consequenzen dieser Annahme zu prüfen, welche nichts weiter als ein Hilfsmittel sein soll, um uns die Berechnung des physikalischen Vorganges zu erleichtern. Denn zum Schlusse werden wir ja ε unendlich klein, $p\varepsilon$ unendlich gross setzen, wodurch sofort die unter 26) gegebene Reihe lebendiger Kräfte in eine continuirliche, unsere mathematische Fiction also in das früher behandelte physikalische Problem übergeht. Wir nehmen nun an, zur Zeit t befinden sich w_1 Moleküle mit der leb. Kraft ε, w_2 Moleküle mit der leb. Kraft $2\varepsilon \ldots w_p$ mit der leb. Kraft $p\varepsilon$ in der Volumeinheit. Wir nehmen wieder an, schon zur Zeit t sei die Vertheilung der lebendigen Kraft eine gleichförmige gewesen (die mit w bezeichneten Grössen seien also unabhängig davon, wo wir den Raum vom Volumen eins construiren) und für die Geschwindigkeitsrichtung sei jede Richtung im Raume gleich wahrscheinlich gewesen. Im Verlaufe der Zeit werden aus der Volumeinheit Moleküle von einer gewissen lebendigen Kraft, z. B. $k\varepsilon$ austreten; allein da die Vertheilung der lebendigen Kraft eine gleichförmige ist, so werden durchschnittlich eben so viele wieder aus der Umgebung eintreten. Und da es sich hier nur um Durchschnittswerthe handelt, so werden sich die mit w bezeichneten Anzahlen also nur durch die Zusammenstösse verändern. Wollen wir daher die Differentialgleichungen für die Veränderungen der w aufstellen, so müssen wir die Zusammenstösse einer nähern Betrachtung unterziehen. Bezeichnen wir mit $N_{kl}^{\varkappa\lambda}$ die Zahl der Zusammenstösse, welche in der Volumeinheit während der sehr kleinen Zeit τ so geschehen, dass vor denselben die lebendige Kraft des ersten der stossenden Moleküle $k\varepsilon$, die des zweiten $l\varepsilon$, nach dem Stosse aber die des ersten $\varkappa\varepsilon$, des zweiten $\lambda\varepsilon$ ist. Die vier Grössen k, l, $\varkappa$, λ sind ganze positive

Zahlen $\leqq p$; denn Zusammenstösse, bei denen die Grössen k, l, $\varkappa$, λ andere Werthe hätten, finden, wie wir wissen, nicht statt. Ausserdem besteht zwischen denselben die Gleichung

$$k+l=\varkappa+\lambda\,, \tag{27}$$

da die Summe der lebendigen Kraft beider Moleküle vor dem Stosse gleich der Summe der lebendigen Kraft beider Moleküle nach dem Stosse sein muss. Da wir es gegenwärtig nicht mit einem reellen physikalischen Probleme zu thun haben, so können wir diese Anzahl $N_{\varkappa\lambda}^{kl}$ natürlich auch nicht wirklich bestimmen; wir können über dieselbe vielmehr jede beliebige Voraussetzung machen und die daraus folgenden Consequenzen prüfen. Wollen wir aber, dass unser Problem für unendlich kleine ε in das früher behandelte übergeht, so müssen wir voraussetzen, dass $N_{\varkappa\lambda}^{kl}$ vollkommen analog bestimmt sei, wie früher die Anzahl der Zusammenstösse bestimmt war. Wir nehmen also an, die Zahl $N_{\varkappa\lambda}^{kl}$ sei wieder erstens proportional der Zeit τ, zweitens proportional der Anzahl der Moleküle mit der lebendigen Kraft $k\varepsilon$ in der Volumeinheit, also proportional w_k, drittens proportional der Zahl w_l. Das Product dieser drei Grössen sei noch zu multipliciren mit einem gewissen Proportionalitätsfactor, der noch von den vier die Natur des Zusammenstosses bestimmenden Grössen k, l, $\varkappa$, λ, aber nicht von der Zeit abhängen kann, und mit $A_{\varkappa\lambda}^{kl}$ bezeichnet werden mag. Fassen wir alles dieses zusammen, so haben wir also:

$$N_{\varkappa\lambda}^{kl}=\tau\,.\,w_k\,.\,w_l\,.\,A_{\varkappa\lambda}^{kl}. \tag{28}$$

Jetzt ist die Zahl der Zusammenstösse ganz analog wie früher (in Formel 2) bestimmt. Die Grösse A tritt an die Stelle der früher mit ψ bezeichneten. Wollen wir die Analogie vollständig machen, so müssen wir der Grösse A auch noch dieselben Eigenschaften beilegen, welche die Grösse ψ hatte. ψ erfüllte die Gleichung

$$\sqrt{xx'}\,\psi(x,x',\xi)=\sqrt{\xi(x+x'-\xi)}\,\psi(\xi,x+x'-\xi,x). \tag{29}$$

In unserem Falle sind die lebendigen Kräfte vor dem Stosse $k\varepsilon$, $l\varepsilon$, die nach demselben $\varkappa\varepsilon$, $\lambda\varepsilon$; in unserem Falle ist also

$$x = k\varepsilon, \quad x' = l\varepsilon, \quad \xi = \varkappa\varepsilon, \quad x + x' - \xi = \lambda\varepsilon.$$

Der Grösse $\psi(x, x', \xi)$ entspricht $A_{\varkappa\lambda}^{kl}$, und man sieht leicht, dass der Grösse $\psi(\xi, x + x' - \xi, x)$ die Grösse $A_{kl}^{\varkappa\lambda}$ entspricht. Die Gleichung 29) geht also in unserem Falle über in

$$\sqrt{kl} \,.\, A_{\varkappa\lambda}^{kl} = \sqrt{\varkappa\lambda} \,.\, A_{kl}^{\varkappa\lambda}. \tag{30}$$

Nun ist die Analogie eine vollständige, und wir brauchen nur ε unendlich klein, $p\varepsilon$ unendlich gross zu setzen, um aus der Lösung dieses Problems die des früher behandelten physikalischen zu erhalten. Die Formeln werden etwas einfacher, wenn wir $\sqrt{kl} A_{\varkappa\lambda}^{kl}$, was ja wieder eine von den vier Zahlen k, l, $\varkappa$, λ abhängige Constante ist, mit $B_{\varkappa\lambda}^{kl}$ bezeichnen. Dann geht die Gleichung 30) über in

$$B_{\varkappa\lambda}^{kl} = B_{kl}^{\varkappa\lambda} \tag{31}$$

und die Gleichung 28) verwandelt sich in

$$N_{\varkappa\lambda}^{kl} = \tau \,.\, \frac{w_k \, w_l}{\sqrt{kl}} \,.\, B_{\varkappa\lambda}^{kl}. \tag{32}$$

Die Quadratwurzeln sind natürlich positiv zu nehmen, da $N_{\varkappa\lambda}^{kl}$ wie die w wesentlich positive Zahlen sind, und wir die B auch immer positiv wählen wollen. Nach diesen Vorbereitungen fragen wir uns, welche Veränderung die Grösse w_1 während der Zeit τ erfährt. w_1 ist die Zahl der Moleküle mit der lebendigen Kraft ε in der Volumeinheit. Wir wissen, dass sich diese Zahl nur in Folge der Zusammenstösse verändert. So oft nämlich zwei Moleküle so zusammenstossen, dass vor dem Stosse eines derselben die lebendige Kraft ε hat, während nach demselben keines mehr die lebendige Kraft ε hat, wird diese Zahl um eins vermindert. Umgekehrt, so oft zwei Moleküle so zusammenstossen, dass vor dem Stosse keines, nach dem Stosse aber eines die lebendige Kraft ε hat, wird jene Zahl um eins

vermehrt. Ziehen wir also die erstere Zahl von w_1 ab, und addiren die letztere hinzu, so erhalten wir die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, welche zur Zeit $t+\tau$ die lebendige Kraft ε haben, und welche wir mit w_1' bezeichnen wollen. Es handelt sich also jetzt um die Zahl der Zusammenstösse, vor denen eines der stossenden Moleküle die lebendige Kraft ε hatte. Wenn auch das andere die lebendige Kraft ε hatte, so müssen nach dem Stosse wieder beide die lebendige Kraft ε haben, da die Summe der lebendigen Kraft beider nach dem Stosse wieder 2ε sein muss und keine anderen lebendigen Kräfte als die in der Reihe 26) verzeichneten vorkommen können. Hatte vor dem Stosse ein Molekül die lebendige Kraft ε, das andere 2ε, so muss aus demselben Grunde auch nach dem Stosse eines die lebendige Kraft ε, das andere 2ε haben. Durch alle diese Zusammenstösse ändert sich also die Zahl der Moleküle mit der lebendigen Kraft ε nicht. Anders aber ist die Sache, wenn vor dem Stosse ein Molekül die lebendige Kraft ε, das andere 3ε hatte; dann können nach dem Stosse beide die lebendige Kraft 2ε haben. Durch jeden dieser Zusammenstösse wird die Zahl der Moleküle mit der lebendigen Kraft ε, also w_1, um eins vermindert. Im Ganzen geschehen N_{22}^{13} solcher Zusammenstösse in der Volumeinheit während der Zeit τ; durch alle diese Zusammenstösse zusammen nimmt also w_1 um N_{22}^{13} ab. Es ist also N_{22}^{13} von w_1 zu subtrahiren. Ebenso sind N_{23}^{14}, N_{32}^{14}, $N_{24}^{15}, \ldots N_{p-1,2}^{1p}$ von w_1 zu subtrahiren. Dagegen sind die Zahlen N_{13}^{22}, $N_{14}^{23}, \ldots N_{1,p}^{p-1,2}$ dazu zu addiren, weil durch jeden dieser Zusammenstösse die Zahl der Moleküle mit der lebendigen Kraft ε um eins vermehrt wird. Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} w_1' = w_1 &- N_{22}^{13} - N_{23}^{14} - N_{32}^{14} - N_{24}^{15} - \ldots \\ &+ N_{13}^{22} + N_{14}^{23} + N_{14}^{32} + N_{15}^{24} + \ldots \end{aligned} \qquad 33)$$

Das Gesetz, welches hier herrscht, ist leicht zu übersehen. Zu subtrahiren sind alle N, welche oben den Index 1 haben, zu addiren alle, welche unten den Index 1 haben. Diejenigen, welche diesen Index sowohl oben, als auch unten haben, sind zu addiren und subtrahiren, können also ganz weggelassen werden. (Früher im Integrale haben wir diese sich tilgenden

Glieder bequemlichkeitshalber nicht fortgehoben.) Dabei ist noch zu beachten, dass die vier Indices der N die Gleichung 27) erfüllen müssen, und dass zwei N, welche durch gleichzeitige Verwechslung der obern und untern Indices auseinander hervorgehen (z. B. N_{23}^{14} und N_{32}^{41}) ganz identischen Zusammenstössen entsprechen, daher nur einmal addirt (respective subtrahirt) werden dürfen. Entwickeln wir w'_1 nach dem Taylor'schen Lehrsatze, so ergibt sich $w'_1 = w_1 + \tau \frac{dw_1}{dt}$. Substituiren wir dies, sowie die durch die Gleichung 32) gegebenen Werthe der N in die Gleichung 33), so ergibt sich, nachdem mit τ wegdividirt wurde

$$\frac{dw_1}{dt} = -B_{22}^{13} \frac{w_1 w_3}{\sqrt{1}\sqrt{3}} - B_{23}^{14} \frac{w_1 w_4}{\sqrt{1}\sqrt{4}} - B_{32}^{14} \frac{w_1 w_4}{\sqrt{1}\sqrt{4}} - B_{24}^{15} \frac{w_1 w_5}{\sqrt{1}\sqrt{5}} - \dots$$

$$+ B_{13}^{22} \frac{w_2^2}{2} + B_{14}^{23} \frac{w_2 w_3}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + B_{14}^{32} \frac{w_2 w_3}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + B_{15}^{24} \frac{w_2 w_4}{\sqrt{2}\sqrt{4}} + \dots$$

welche Gleichung unter Berücksichtigung der Gleichung 32) auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{dw_1}{dt} = B_{22}^{13} \left(\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1 w_3}{\sqrt{1}\sqrt{3}} \right) +$$

$$+ (B_{23}^{14} + B_{32}^{14}) \left(\frac{w_2 w_3}{\sqrt{2}\sqrt{3}} - \frac{w_1 w_4}{\sqrt{1}\sqrt{4}} \right) + \dots$$

Ebenso findet man

$$\frac{dw_2}{dt} = 2B_{22}^{13} \left(\frac{w_1 w_3}{\sqrt{1}\sqrt{3}} - \frac{w_2^2}{2} \right) + \tag{34}$$

$$+ (B_{23}^{14} + B_{32}^{14}) \left(\frac{w_1 w_4}{\sqrt{1}\sqrt{4}} - \frac{w_2 w_3}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \right) + \dots$$

$$\vdots$$

$$\frac{dw_p}{dt} = \left(B_{2,\,p-1}^{1,\,p} + B_{p-1,\,2}^{1,\,p} \right) \left(\frac{w_{p-1} w_2}{\sqrt{p-1}\sqrt{2}} - \frac{w_1 w_p}{\sqrt{1}\sqrt{p}} \right) +$$

$$+ \left(B_{3,\,p-2}^{1,\,p} + B_{p-2,\,3}^{1,\,p} \right) \left(\frac{w_3 w_{p-2}}{\sqrt{3}\sqrt{p-2}} - \frac{w_1 w_p}{\sqrt{1}\sqrt{p}} \right) + \dots$$

Es bedarf höchstens noch einer Erläuterung, warum das Glied $B_{22}^{13}\frac{w_1 w_3}{\sqrt{1}\sqrt{3}}$ im Ausdrucke für $\frac{dw_2}{dt}$ den Factor 2 hat. Dieses Glied rührt von jenen Zusammenstössen her, für welche vor dem Stosse ein Molekül die lebendige Kraft ϵ, das andere 3ϵ, nach dem Stosse beide die lebendige Kraft 2ϵ haben; durch jeden dieser Stösse wird die Zahl der Moleküle mit der lebendigen Kraft 2ϵ nicht um eins, sondern um zwei vermehrt, weil ja durch jeden dieser Stösse gleichzeitig zwei Moleküle die lebendige Kraft 2ϵ gewinnen. Daher müssen alle diese Stösse doppelt gezählt werden. Ebenso zählen im Ausdrucke für $\frac{dw_3}{dt}$ die Glieder $B_{33}^{15}\frac{w_1 w_5}{\sqrt{5}}$ und $B_{33}^{24}\frac{w_2 w_4}{\sqrt{2}\sqrt{4}}$ u. s. w. doppelt. Es wäre leicht, das Gleichungssystem 34) durch Summenformeln darzustellen; ich glaube aber, dass dadurch für die Deutlichkeit nichts Wesentliches gewonnen würde; das Bildungsgesetz ist ja nach dem Auseinandergesetzten klar. Man sieht auch, dass dies genau das Gleichungssystem ist, in welches die eine partielle Differentialgleichung 18) übergeht, wenn man sie nach der früher auseinandergesetzten Lagrange'schen Methode durch ein System von p gewöhnlichen Differentialgleichungen ersetzt und $f(k\epsilon, t)$ mit w_k bezeichnet. Um die Gleichungen 34) etwas zu vereinfachen, setzen wir

$$w_k = \sqrt{k}\,.\,u_k\,.$$

Dieselben verwandeln sich dann in

$$\frac{du_1}{dt} = B_{22}^{13}(u_2^2 - u_1 u_3) + (B_{23}^{14} + B_{32}^{14})(u_2 u_3 - u_1 u_4) + \cdots$$

$$\sqrt{2}\frac{du_2}{dt} = 2B_{22}^{13}(u_1 u_3 - u_2^2) + (B_{23}^{14} + B_{32}^{14})(u_1 u_4 - u_2 u_3) + \cdots \quad 35)$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{p}\,\frac{du_p}{dt} = (B_{2,p-1}^{1,p} + B_{p-1,2}^{1,p})(u_2 u_{p-1} - u_1 u_p) + \cdots$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich wieder beweisen, dass

$$E = u_1 \log u_1 + \sqrt{2} u_2 \log u_2 + \ldots + \sqrt{p} u_p \log u_p$$

beständig abnehmen muss, so lange nicht $u_2^2 - u_1 u_3$, $u_2 u_3 - u_1 u_4 \ldots$ kurz alle in den Gleichungen 35) mit den Coëfficienten B multiplicirten Ausdrücke verschwinden. Die Gleichungen 35) haben das Unbequeme, dass sie sich höchstens durch Summenformeln nicht aber explicit vollständig hinschreiben lassen. Es wird daher ohne Zweifel die Deutlichkeit erhöhen, wenn wir, mit den einfachsten Fällen beginnend, erst allmälig zum allgemeinen Falle übergehen. Sei zunächst $p = 3$; die Moleküle seien also nur fähig, drei verschiedene lebendige Kräfte, ε, 2ε und 3ε anzunehmen. Dann reducirt sich das Gleichungssystem 35) auf folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= B_{22}^{13}(u_2^2 - u_1 u_3) \\ \sqrt{2}\frac{du_2}{dt} &= 2B_{22}^{13}(u_1 u_3 - u_2^2) \\ \sqrt{3}\frac{du_3}{dt} &= B_{22}^{13}(u_2^2 - u_1 u_3) \end{aligned} \tag{36}$$

und der Ausdruck für E geht über in

$$E = u_1 \log u_1 + \sqrt{2}\, u_2 \log u_2 + \sqrt{3}\, u_3 \log u_3.$$

Die Differentiation liefert

$$\frac{dE}{dt} = (\log u_1 + 1)\frac{du_1}{dt} + (\log u_2 + 1)\frac{du_2}{dt} + (\log u_3 + 1)\frac{du_3}{dt}$$

oder nach veränderter Anordnung der Glieder

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = \log u_1 \frac{du_1}{dt} &+ \sqrt{2} \log u_2 \frac{du_2}{dt} + \sqrt{3} \log u_3 \frac{du_3}{dt} \\ &+ \frac{du_1}{dt} + \sqrt{2}\frac{du_2}{dt} + \sqrt{3}\frac{du_3}{dt}. \end{aligned}$$

Die Summe der letzten drei Glieder verschwindet gemäss den Gleichungen 36) und man erhält somit $\frac{dE}{dt}$, indem man die erste dieser Gleichungen mit $\log u_1$, die zweite mit $\log u_2$, die dritte mit $\log u_3$ multiplicirt und alle drei addirt. Führt man dies wirklich aus, so erhält man

$$\frac{dE}{dt}=B_{22}^{13}.(u_2^2-u_1u_3).(\log u_1+\log u_3-2\log u_2)$$

oder

$$\frac{dE}{dt}=B_{22}^{13}.(u_2^2-u_1u_3)\log\left(\frac{u_1u_3}{u_2^2}\right).$$

Von den beiden Factoren, welche auf der rechten Seite dieser Gleichung mit B_{22}^{13} multiplicirt sind, ist für $u_2^2>u_1u_3$ der erste positiv, der zweite negativ, für $u_2^2<u_1u_3$ aber der erste negativ und der zweite positiv; ihr Product ist daher immer negativ, und da B_{22}^{13} wesentlich positiv ist, so ist $\frac{dE}{dt}$ immer negativ oder gleich Null; letzteres für $u_2^2=u_1u_3$. Nun lässt sich aber leicht beweisen, dass E nicht negativ unendlich werden kann. Selbstverständlich kann keine der drei Grössen u_1, u_2 und u_3 negativ oder imaginär werden. Für positive u aber kann $u\log u$ bekanntlich keinen grösseren negativen Werth als $-\frac{1}{e}$, die Grösse E also keinen grösseren negativen Werth als

$$-\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{e}$$

annehmen, wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Es muss sich also E, da sein Differentialquotient nicht positiv sein kann, immer mehr einem Minimum nähern, für welches $\frac{dE}{dt}=o$, also $u_2^2=u_1u_3$ ist. Ganz in derselben Weise kann der Beweis auch geführt werden, wenn $n>3$ ist. Ich betrachte hier nur noch den Fall $n=4$. In diesem Falle reduciren sich die Gleichungen 35) auf

$$\frac{du_1}{dt} = B_{22}^{13}(u_2^2 - u_1 u_3) + (B_{23}^{14} + B_{32}^{14})(u_2 u_3 - u_1 u_4) \tag{37}$$

$$\sqrt{2}\frac{du_2}{dt} = 2B_{22}^{13}(u_1 u_3 - u_2^2) + (B_{23}^{14} + B_{32}^{14})(u_1 u_4 - u_2 u_3) + B_{33}^{24}(u_3^2 - u_2 u_4)$$

$$\sqrt{3}\frac{du_3}{dt} = B_{22}^{13}(u_2^2 - u_1 u_3) + (B_{23}^{14} + B_{32}^{14})(u_1 u_4 - u_2 u_3) + 2B_{33}^{24}(u_2 u_4 - u_3^2)$$

$$\sqrt{4}\frac{du_4}{dt} = (B_{23}^{14} + B_{32}^{14})(u_2 u_3 - u_1 u_4) + B_{33}^{24}(u_3^2 - u_2 u_4).$$

Für E aber findet man

$$E = u_1 \log u_1 + \sqrt{2}\, u_2 \log u_2 + \sqrt{3}\, u_3 \log u_3 + \sqrt{4}\, u_4 \log u_4$$

$$\frac{dE}{dt} = \log u_1 \frac{du_1}{dt} + \sqrt{2} \log u_2 \frac{du_2}{dt} + \sqrt{3} \log u_3 \frac{du_3}{dt} + \sqrt{4} \log u_4 \frac{du_4}{dt}.$$

Substituirt man hier für $\frac{du_1}{dt}$, $\frac{du_2}{dt}$, $\frac{du_3}{dt}$, $\frac{du_4}{dt}$ ihre Werthe aus den Gleichungen 37), so ergibt sich nach passender Anordnung der Glieder

$$\frac{dE}{dt} = B_{22}^{13}(u_2^2 - u_1 u_3) \log\left(\frac{u_1 u_3}{u_2^2}\right) + B_{33}^{24}(u_3^2 - u_2 u_4) \log\left(\frac{u_2 u_4}{u_3^2}\right) +$$

$$+ (B_{23}^{14} + B_{32}^{14})(u_2 u_3 - u_1 u_4) \log\left(\frac{u_1 u_4}{u_2 u_3}\right).$$

Ich bemerke, dass die Veränderung der Anordnung der Summanden, welche hier erforderlich war, nichts anderes ist, als unsere frühere weitläufige Transformation des bestimmten Integrals. Aus dem obigen Ausdrucke sieht man sofort, dass $\frac{dE}{dt}$ wieder nothwendig negativ ist, wenn nicht gleichzeitig

$$u_2^2 = u_1 u_3, \quad u_3^2 = u_2 u_4, \quad u_2 u_3 = u_1 u_4$$

ist, wofür man auch setzen kann

$$u_3 = \frac{u_2^2}{u_1}, \quad u_4 = \frac{u_2^3}{u_1^2}.$$

Ebenso findet man für den allgemeinen Fall, dass $\frac{dE}{dt}$ nothwendig negativ ist, daher E nothwendig abnimmt, wenn nicht

$$u_3 = \frac{u_2^2}{u_1}, \quad u_4 = \frac{u_2^3}{u_1^2}, \ldots \tag{38}$$

ist. Da nun E wieder keinen grösseren negativen Werth als

$$-\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots\sqrt{p}}{e} \tag{39}$$

annehmen kann, so muss es sich nothwendig einem Minimum immer mehr und mehr nähern, für welches die Gleichungen 38) bestehen werden. Es nähert sich daher die Zustandvertheilung immer mehr der durch die Gleichungen 38) bestimmten. Es ist noch zu beweisen, dass die Gleichungen 38) die Zustandsvertheilung eindeutig bestimmen. Addiren wir alle Gleichungen 35), so ergibt sich

$$\frac{du_1}{dt} + \sqrt{2}\frac{du_2}{dt} + \sqrt{3}\frac{du_3}{dt} + \ldots \sqrt{p}\frac{du_p}{dt} = 0,$$

daher

$$u_1 + \sqrt{2}u_2 + \sqrt{3}u_3 + \ldots + \sqrt{p}\,u_p = a \tag{40}$$

In ähnlicher Weise findet man

$$u_1 + 2\sqrt{2}u_2 + 3\sqrt{3}u_3 + \ldots + p\sqrt{p}u_p = \frac{b}{\varepsilon}, \tag{41}$$

wobei a und b Constanten sind. Die Bedeutung dieser Gleichungen liegt auf der Hand. Es ist nämlich

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots = u_1 + \sqrt{2}u_2 \pm \sqrt{3}u_3 + \ldots = a$$

die Gesammtzahl der Moleküle in der Volumeinheit, b aber ist ihre gesammte lebendige Kraft. Die Gleichungen 40) und 41) besagen uns also, dass jene beiden Grössen constant sind. Seien uns die beiden Grössen a und b, also die Gesammtzahl der Moleküle in der Volumeinheit und ihre gesammte lebendige Kraft

gegeben. Dann wollen wir den Quotienten $\frac{u_2}{u_1}=\gamma$ setzen. Die Gleichungen 38) gehen dann über in

$$u_3=\gamma^2 u_1,\ u_4=\gamma^3 u_1,\ \ldots\ u_p=\gamma^{p-1}u_1.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen 40) und 41), so findet man daraus mit Leichtigkeit

$$\begin{aligned}&\left[pa-\frac{b}{\varepsilon}\right]\sqrt{p}\,\gamma^{p-1}+\left[(p-1)a-\frac{b}{\varepsilon}\right]\sqrt{p-1}\,\gamma^{p-2}+\ldots\\&+\left(3a-\frac{b}{\varepsilon}\right)\sqrt{3}\gamma^2+\left(2a-\frac{b}{\varepsilon}\right)\sqrt{2}\gamma+a-\frac{b}{\varepsilon}=0.\end{aligned}\qquad 42)$$

Da alle u nothwendig positiv sind, so sieht man unmittelbar, dass $\frac{b}{\varepsilon}-a$ positiv, $\frac{b}{\varepsilon}-pa$ aber negativ sein muss. Es muss daher b zwischen εa und εpa liegen. In der Gleichung 42) ist daher der Coëfficient von γ^{p-1} positiv, das von γ freie Glied aber negativ. Ihr Gleichungspolynom ist also für $\gamma=\infty$ positiv, für $\gamma=0$ negativ; sie liefert also eine positive Wurzel für γ und sie liefert nur eine, weil die Reihe der Coëfficienten nur einen Zeichenwechsel hat. Negative oder imaginäre Werthe für γ haben natürlich keinen Sinn. Aus γ aber lassen sich alle u, mithin auch die w eindeutig bestimmen. Wie immer also die Zustandsvertheilung zu Anfang der Zeit gewesen sein mag, es gibt eine, und nur eine, der sie sich mit wachsender Zeit immer mehr nähert. Dieselbe hängt blos ab von den Constanten a und b, also der Gesammtzahl und der gesammten lebendigen Kraft der Moleküle (Dichte und Temperatur des Gases). Dieser Satz wurde zunächst nur für den Fall bewiesen, dass die Zustandsvertheilung schon zu Anfang der Zeit eine gleichförmige war. Er muss also auch gelten, wenn dies nicht der Fall war, wenn die Moleküle nur so vertheilt waren, dass sie sich mit wachsender Zeit immer mehr mischen, dass also die Zustandsvertheilung nach Verlauf einer sehr langen Zeit eine gleichförmige wird, und dies wird immer der Fall sein, mit Ausnahme ganz specieller Fälle, z. B. wenn die Moleküle anfangs in einer gera-



den Linie angeordnet gewesen wären, und auch von den Wänden in diese Gerade zurückreflectirt würden. Da wir dies für beliebige p und ε bewiesen haben, so können wir sofort zu dem Falle übergehen, wo $\frac{1}{p}$ und ε unendlich klein sind[8]. Wir haben zunächst:

$$w_k = \sqrt{k}u_k = u_1\sqrt{k}\gamma^{k-1}.$$

[8] Für sehr grosse p wird den Ausdruck 39) sehr gross von der Ordnung $p^{3/2}$. In diesem Falle ist es also nothwendig, einen kleineren negativen Werth aufzusuchen, den E niemals überschreiten kann. Die hier mit E bezeichnete Grösse unterscheidet sich durch eine Constante von der früher so bezeichneten. Wollen wir die in der Anmerkung 7, Gleichung 17 a) mit E_1 bezeichnete Grösse erhalten, die wieder nur durch eine Constante von den übrigen mit diesen Buchstaben bezeichneten Grössen verschieden ist, so müssen wir zu unserem gegenwärtigen E noch

$$-\frac{3\log\varepsilon}{2}(u_1+\sqrt{2}u_2+\ldots)$$

addiren. Es ist also

$$E_1 = E - \frac{3\log\varepsilon}{2}(u_1+\sqrt{2}u_2+\ldots) = u_1\log\left(\frac{u_1}{\varepsilon^{3/2}}\right)+\sqrt{2}u_2\log\left(\frac{u_2}{\varepsilon^{3/2}}\right)+\ldots$$

Es ist zunächst klar, dass E_1 eine für alle reellen positiven Werthe der u reelle und continuirliche Function derselben ist. Ferner kann (wenn wir eine negative Grösse als um so kleiner bezeichnen, je grösser ihr Zahlenwerth ist), E nicht kleiner als der Ausdruck 39), also E_1 nicht kleiner als

$$-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}+\ldots\sqrt{p}) - {}^3\!/_2\, a\log\varepsilon$$

werden. Es muss daher E_1 ein Minimum haben, wenn die u alle reellen positiven mit den Gleichungen 40) und 41) verträglichen Werthe durchlaufen. Man beweist zunächst leicht, dass für dieses Minimum keines der u gleich Null sein kann, dass es also nicht an der Grenze der von den u gebildeten Mannigfaltigkeit liegen kann, und folglich nach den gewöhnlichen Regeln der Differentialrechnung gefunden wird. Addiren wir zum totalen Differential von E_1 das der beiden Gleichungen 40) und 41); ersteres mit dem unbestimmten Multiplicator λ, letzteres mit dem ebenfalls erst zu bestimmenden Multiplicator μ multiplicirt, so ergibt sich

$$(\log u_1+\lambda+\mu)\,du_1+(\log u_2+\lambda+2\mu)\sqrt{2}du_2+\ldots = 0.$$

Für das Minimum muss bekanntlich der Factor jedes Differentials verschwinden, woraus man nach Elimination von λ und μ erhält

Für unendlich kleine ε setzen wir nun wieder

$$\varepsilon = dx,\ k\varepsilon = x,\ \gamma = e^{-h\varepsilon},\ \frac{u_1}{\varepsilon^{3/2}} = C \qquad 43)$$

$$\log u_2 - \log u_1 = \log u_3 - \log u_2 = \ldots \text{oder } u_3 = \frac{u_2^2}{u_1},\ u_4 = \frac{u_3^2}{u_2} \ldots,$$

worin man sogleich die Gleichungen 38) wieder erkennt. Dieselben bestimmen also in der That den kleinsten Werth, den E_1 annehmen kann, wenn die u alle möglichen mit den Gleichungen 40) und 41) vereinbaren Werthe annehmen. Da aber die u während des ganzen Vorganges in der That an die Gleichungen 40) und 41) gebunden sind, so ist dies der kleinste Werth, den E_1 während des ganzen Vorganges anzunehmen im Stande ist. Um denselben zu berechnen, setzen wir wieder

$$u_2 = u_1\gamma,\ u_3 = u_1\gamma^2 \ldots$$

Wir wissen, dass wir dann aus den Gleichungen 38), 40) und 41) einen einzigen positiven Werth für γ finden, der also dem wirklichen Minimum von E_1 entsprechen muss. Dieser Minimalwerth von E_1 ist also

$$E' = \frac{1}{\varepsilon}\, b \log\gamma + a \log\left(\frac{u_1}{\gamma\,\varepsilon^{3/2}}\right).$$

Einen kleineren Werth kann E_1 nicht annehmen. Und dieser Werth bleibt selbst für unendlich kleine ε und unendliche p endlich. Er geht nämlich mit Rücksicht auf die Gleichungen 43) über in

$$a \log C - bh,$$

oder weil $a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{h^3}}\,C,\ b = \frac{3a}{2h}$ ist, so kann man hiefür schreiben

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{h^3}}\,C(\log C - \tfrac{3}{2}),$$

was, da die Constanten C und h nicht unendlich sind, eine endliche Grösse ist. Es kann also die mit E_1 bezeichnete Grösse nicht negativ unendlich werden, dagegen könnte E_1 positiv unendlich sein. Doch lässt sich leicht zeigen, dass dann unmöglich Wärmegleichgewicht herrschen kann. Dies, sowie eine ausführliche Discussion der Ausnahmsfälle, wo

$$\lim \frac{\varepsilon}{\tau}[f(\varepsilon, t+\tau) \log f(\varepsilon, t+\tau) + \sqrt{2} f(2\varepsilon, t+\tau) \log f(2\varepsilon, t+\tau) + \ldots$$

$$- f(\varepsilon, t) \log f(\varepsilon, t) - \sqrt{2} f(2\varepsilon, t) \log f(2\varepsilon, t) - \ldots]$$

ungleich ausfallen könnte, je nachdem $\frac{\varepsilon}{\tau}$ oder $\frac{\tau}{\varepsilon}$ verschwindet, würde mich jedoch hier zu weit führen.

und erhalten

$$w_k = C\sqrt{x}\, e^{-hx} dx,$$

also wieder die Maxwell'sche Zustandsvertheilung. Ebenso überzeugt man sich, dass die Summe, welche wir hier mit E bezeichnet haben, abgesehen von einem constanten Addenden, in das Integral der Formel 17 a) übergeht; wir erhalten also nach dieser Methode alle Resultate wieder, welche wir früher durch die Transformation der bestimmten Integrale gewannen, und sie hat den Vortheil, dass sie viel einfacher und durchsichtiger ist. Nur muss man sich dabei an die Abstraction, dass ein Molekül nur im Stande sei, eine endliche Anzahl lebendiger Kräfte anzunehmen, als Übergangsstadium gewöhnt haben.

Setzt man in den Gleichungen 35) die Differentialquotienten der u nach der Zeit gleich Null, so erhält man die Bedingungsgleichungen, dass die Zustandsvertheilung sich mit wachsender Zeit nicht ändert, also stationär ist. Man sieht sogleich, dass die Gleichungen 35) dann ausser der von uns gefundenen noch zahlreiche andere Lösungen haben, welche aber keine denkbaren stationären Zustandsvertheilungen darstellen, da dabei die Wahrscheinlichkeit gewisser lebendiger Kräfte nothwendig negativ oder imaginär ausfällt. Ganz analog verhält es sich natürlich auch, wenn, wie es in der Natur der Fall ist, jedes Molekül alle lebendigen Kräfte von Null bis ∞ annehmen kann. Die Bedingung, dass die Zustandsvertheilung stationär sei, erhält man dann, wenn man in der Gleichung 16) $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = 0$ setzt. Dieselbe ist also

$$0 = \int_0^\infty \int_0^{x+x'} \left[\frac{f(\xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{f(x+x'-\xi)}{\sqrt{x+x'-\xi}} - \frac{f(x)\, f(x')}{\sqrt{xx'}}\right] \sqrt{xx'}\, \psi(x,x',\xi)\, dx'\, d\xi.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist $f(x) = C\sqrt{x}\, e^{-hx}$; also die Maxwell'sche Zustandsvertheilung. Aus dem vorher Gesagten aber folgt, dass dieselbe noch unendlich viele andere Lösungen hat, welche aber nicht brauchbar sind, da dabei $f(x)$ immer für gewisse x negativ oder imaginär ausfällt. Daraus

folgt am klarsten, dass Maxwell's Versuche, a priori zu beweisen, dass seine Lösung die einzige sei, fehlschlagen mussten. Sie ist nicht die einzige, sondern es kann nun bewiesen werden, dass sie allein lauter positive Wahrscheinlichkeiten liefert, dass sie also allein brauchbar ist.

III. Diffusion, Reibung und Wärmeleitung der Gase.

Hier sollen nur noch wenige Bemerkungen Platz finden, die sich auf den Fall beziehen, dass die Zustandsvertheilung zwar nicht ganz regellos, aber doch auch nicht das ist, was wir gleichförmig genannt haben, und dass auch nicht alle Geschwindigkeitsrichtungen gleichmässig vertreten sind, was bei innerer Reibung und Wärmeleitung stattfindet. Dann sei

$$f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

an der Stelle im Gase, deren Coordinaten x, y, z sind, die auf die Volumeinheit entfallende Anzahl der Moleküle, für welche die Componente der Geschwindigkeit in der Richtung der x-Axe zwischen ξ und $\xi+d\xi$, die in der Richtung der y-Axe zwischen η und $\eta+d\eta$, die in der Richtung der z-Axe zwischen ζ und $\zeta+d\zeta$ liegt. Ein Zusammenstoss ist durch die Geschwindigkeitscomponenten ξ, η, ζ und ξ_1, η_1, ζ_1 der beiden stossenden Moleküle vor demselben, sowie durch die Grössen b und φ bestimmt. (Letztere beide Grössen, sowie die später vorkommenden V, k, A_2, X etc. sollen dieselbe Bedeutung wie in Maxwell's Abhandl. Phil. mag. 4. ser. vol. 35 haben.) Functionen dieser acht Variabeln sind die Geschwindigkeitscomponenten ξ', η', ζ' und ξ_1', η_1', ζ_1' nach dem Stosse. Schreiben wir der Kürze halber $d\omega_1$ für $d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1$, und bezeichnen mit f den Werth der Function $f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t)$, mit f_1, f' und f_1' die Werthe dieser Function, wenn man darin für $\xi \eta \zeta$, respective $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$, $\xi' \eta' \zeta'$ oder $\xi_1' \eta_1' \zeta_1'$ setzt; dann muss die Function f der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + X \frac{\partial f}{\partial \xi} + Y \frac{\partial f}{\partial \eta} + Z \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \\ &+ \int d\omega_1 \int b\, db \int d\varphi\, V (f f_1 - f' f_1') = 0 \end{aligned} \qquad 44)$$

genügen, wie man leicht sieht, wenn man ein Volumelement sich mit den Geschwindigkeiten ξ, η, ζ fortbewegt denkt und erwägt, wie sich in demselben die Zustandsvertheilung durch die Zusammenstösse verändert. Ist das Gas von fixen Wänden umgeben, so folgt aus der Gleichung 44) wieder, dass E durch die Molecularbewegung nur abnehmen kann, wenn man setzt

$$E = \iiiiiint f \log f \, dx \, dy \, dz \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

welcher Ausdruck der Entropie des Gases proportional ist. Um für den Fall anderer Grenzbedingungen nur ein Beispiel zu geben, sei die Abstossung zweier Moleküle der 5. Potenz ihrer Entfernung verkehrt proportional. X, Y, Z sollen im Folgenden immer verschwinden. Wir wollen setzen

$$f = A(1 + 2hay\xi + c\xi\eta)e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}, \qquad 45)$$

wobei die beiden Constanten a und c sehr klein sein sollen. Substituiren wir diesen Werth in die Gleichung 44), vernachlässigen die Quadrate und Producte von a und c und führen die Integrationen nach b und φ genau so durch, wie es Maxwell in der citirten Abhandlung (Seite 141—144) lehrt, so finden wir, dass die Gleichung 44) erfüllt ist, wenn $c = -\frac{2ha}{3A_2 k\rho}$ gemacht wird. Die Formel 45) gibt also eine mögliche Zustandsvertheilung, und zwar diejenige, wobei sich jede der xz-Ebene parallele Schicht in der Richtung der x-Axe mit der Geschwindigkeit ay bewegt, wenn y die y-Coordinate der betreffenden Schicht ist, also den einfachsten Fall innerer Reibung. Die Reibungsconstante ist das in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurchgehende durch $-a$ dividirte Bewegungsmoment, also

$$-\frac{\rho\overline{\xi\eta}}{a} = -\frac{\rho}{a}\frac{\iiint \xi\eta f \, d\xi \, d\eta \, d\zeta}{\iiint f \, d\xi \, d\eta \, d\zeta} = \frac{1}{6A_2 kh} = \frac{p}{3A_2 k\rho};$$

genau, wie sie schon Maxwell gefunden hat. Die Bezeichnungen sind durchaus die von Maxwell gebrauchten. Ein allgemeinerer Ausdruck ist folgender:

$$f = A\left[1 - \frac{2ht}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) + 2h(u\xi+v\eta+w\zeta) + \right. \qquad 46)$$
$$\left. + \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 + \alpha'\eta\zeta + \beta'\xi\zeta + \gamma'\xi\eta\right] e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}.$$

Derselbe genügt ebenfalls der Gleichung 44), wenn u, v, w lineare Functionen von x, y, z sind, und

$$\alpha = -\frac{2h}{3A_2 k\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \alpha' = -\frac{2h}{3A_2 k\rho}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

gesetzt wird. Analoge Werthe haben β, γ, β' und γ'. Der Ausdruck 46) stellt eine beliebige Bewegung des Gases dar, bei der die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w im Punkte mit den Coordinaten x, y, z lineare Functionen dieser Coordinaten sind. Wenn nicht

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ist, so ändert sich die Dichte und Temperatur mit der Zeit. Letztere wie bei einem Gase, dem man keine Wärme zuführt. Berechnet man mittelst des Ausdruckes 46)

$$\overline{\xi^2}, \ \overline{\eta^2}, \ \overline{\xi\eta}, \ldots,$$

so erhält man wieder die schon von **Maxwell** gefundenen Werthe. Wäre $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ von Null verschieden, so erhielte man in die Gleichung 44) noch ein Glied, das sich nicht tilgen würde, nämlich

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\cdot\xi^3 e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)},$$

als dessen durchschnittlichen Werth wir etwa

$$-\frac{\partial\alpha}{\partial x}\left(\overline{\xi^2}\right)^{3/2} e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} = \frac{2h}{3A_2 k\rho}\sqrt{\frac{p^3}{\rho^3}}\, e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 47)$$
$$= \frac{\mu}{\rho}\sqrt{\frac{\rho}{p}}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}$$

annehmen können. Man sieht leicht, dass dieser Werth gegen jedes der übrigen Glieder, aus denen die Gleichung 44) besteht, wenn man darin den Werth von f aus Gleichung 46) substituirt, verschwindet, dass also die Gleichung 44) noch nahe erfüllt ist, man somit bei Berechnung der Zustandsvertheilung die Grössen u, v, w nach dem Taylor'schen Satze entwickeln und bei den ersten Potenzen von x, y, z stehen bleiben kann. Das erste Glied der Gleichung 44) nach Substitution des Werthes f aus Gleichung 46) wäre z. B.

$$-\frac{2h}{3}\xi^2\frac{\partial u}{\partial x}e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}.$$

Sein mittlerer Werth also

$$^1/_3\frac{\partial u}{\partial x}e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}.$$

Berechnet man den Quotienten dieser Grösse in die Grösse 47) für Luft bei 0° C. und dem Normalbarometerstande numerisch, so findet man denselben etwa $= 0{\cdot}00009$ Millim. $\times \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}}$. Derselbe ist also selbst dann noch verschwindend klein, wenn $\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$ etwa 1 Millim. ist, wenn also die Werthe von $\frac{\partial u}{\partial x}$, die um 1 Millim. von einander abstehen, durchschnittlich sich wie 1 : 2 verhalten. Erst wenn dies schon für Werthe von $\frac{\partial u}{\partial x}$ der Fall ist, deren Abstände nicht mehr gross gegen die mittlere Weglänge sind, würde dieser Quotient erheblich. Auch der Werth

$$f = A[1+ax+by+cz-(a\xi+b\eta+c\zeta)t]\,e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}$$

befriedigt die Gleichung 44). Für ein Gemenge zweier Gasarten wollen wir die auf die zweite bezüglichen Grössen durch einen unten angefügten Stern bezeichnen, p und p_* seien die Partialdrücke, m und m_* die Massen eines Moleküls für beide Gasarten. Dann tritt an die Stelle der Gleichung 44) folgende:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta\frac{\partial f}{\partial z}+\int d\omega_1\int bdb\int d\varphi V(ff_1-f'f_1') \\ +\int d\omega_*\int bdb\int d\varphi V(ff_*-f'f_*')=0 \tag{44*}$$

und eine analoge Gleichung für die zweite Gasart. Dem einfachsten Falle der Diffusion entspricht das Integral

$$f=\sqrt{\frac{m^3h^3}{\pi^3}}N(1+2hmu\xi)e^{-hm(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}; \\ f_*=\sqrt{\frac{m_*^3h^3}{\pi^3}}N_*(1+2hm_*u_*\xi)e^{-hm_*(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}, \tag{46*}$$

wobei N und N_* Functionen von x, Nu und N_*u_* aber constant sein sollen. Keine Grösse soll Function der Zeit sein. Die Gleichung 44*) ist befriedigt, wenn

$$\frac{dN}{dx}+NN_*2hmm_*(u-u_*)A_1k=0$$

ist. Eine analoge Gleichung muss für N_* gelten. Es muss also sein: $N+N_*=\text{const}=$ der Anzahl der Moleküle beider Gase in der Volumeinheit; daraus folgt: $Nu=-N_*u_*=$ der Anzahl der Moleküle einer Gasart, die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt 1 gehen. Die Diffusionsconstante ist

$$-\frac{Nu}{\frac{dN}{dx}}=\frac{1}{(N+N_*)2hmm_*A_1k}=\frac{pp_*}{A_1k\rho\rho_*(p+p_*)},$$

weil

$$2h=\frac{N+N_*}{p+p_*}=\frac{N}{p}=\frac{N_*}{p_*}$$

ist.

Will man die Bewegungsgleichungen erhalten, so multiplicire man die Gleichung 44) oder 44*) mit $m\xi d\omega$ (wobei $d\omega=d\xi\,d\eta\,d\zeta$), und integrire über alle ξ, η, ζ. Die vier ersten Glieder dieser Gleichungen verwandeln sich dann in

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\overline{\xi^2})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\overline{\xi\eta})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\overline{\xi\zeta})}{\partial z},$$

oder weil

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

in

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial(\rho\overline{\xi'^2})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\overline{\xi'\eta'})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\overline{\xi'\zeta'})}{\partial z},$$

wobei

$$\xi=\xi'+u,\ \eta=\eta'+v,\ \zeta=\zeta'+w$$

gesetzt wurde. Die übrigen Glieder aber liefern negativ genommen das durch die Stösse den Molekülen zugeführte Bewegungsmoment, das natürlich verschwindet, wenn kein zweites Gas beigemischt ist. Das zugeführte Bewegungsmoment mehr der Resultirenden aller Druckkräfte

$$\left(-\frac{\partial(\rho\overline{\xi'^2})}{\partial x}-\frac{\partial(\rho\overline{\xi'\eta'})}{\partial y}-\frac{\partial(\rho\overline{\xi'\zeta'})}{\partial z}\right)$$

ist also gleich der mit der Dichte multiplicirten Beschleunigung

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Die letzteren Gleichungen gelten natürlich für jedes beliebige Wirkungsgesetz. Dagegen haben die Ausdrücke 45), 46) und 46*) nur dann Giltigkeit, wenn die Abstossung zweier Moleküle der fünften Potenz ihrer Entfernung verkehrt proportional ist. Für jedes andere Wirkungsgesetz, z. B. wenn die Gasmoleküle wie elastische Kugeln an einander abprallen, befriedigen die Ausdrücke 45), 46) und 46*) die Gleichungen 44) und 44*) nicht, für alle anderen Wirkungsgesetze ist also bei Diffusion, Reibung etc. die Geschwindigkeitsvertheilung durch kein so einfaches Gesetz gegeben. Für den Fall der Diffusion müsste dann f etwa in folgender Form dargestellt werden:

$$A[1+a\xi+b\xi^3+c(\eta^2+\zeta^2)\xi+d\xi^5\ldots]e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}, \qquad 47^*)$$

und ich sehe kein anderes Mittel zur Auflösung der Gleichung 44*), als die successive Bestimmung der Coëfficienten

$a, b, c\dots$ Für alle anderen Wirkungsgesetze ist also die Geschwindigkeitsvertheilung eines diffundirenden Gases nicht dieselbe, als ob es sich allein im Raume mit seiner Diffusionsgeschwindigkeit u fortbewegte. Es rührt dies daher, dass die Moleküle mit verschiedenen Geschwindigkeiten auch verschiedene Diffusionsgeschwindigkeit haben, wodurch die Geschwindigkeitsvertheilung fortwährend gestört wird. Da die Glieder des Ausdruckes 47*) mit ξ^3, $\xi\eta^2,\dots$ in die Diffusionsconstante im Allgemeinen Glieder von derselben Ordnung liefern, wie die mit ξ, so kann die Diffusionsconstante nicht numerisch exact erhalten werden, wenn man erstere bei Berechnung des mitgetheilten Bewegungsmomentes vernachlässigt. Doch dürfte der hiedurch herbeigeführte Fehler kaum sehr gross sein. Ähnliches gilt natürlich von der Reibung und Wärmeleitung. Ja es wird nicht nur der Werth, sondern auch die Constanz der Diffusions-, Reibungsconstante etc. bei anderen als dem Maxwell'schen Wirkungsgesetze fraglich.

Dem Falle der Wärmeleitung in der Richtung der x-Axe entspricht unter Voraussetzung des Maxwell'schen Wirkungsgesetzes folgender Werth von f:

$$f = A[1 + ax(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) + bx + c\xi + g\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)]e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)},$$

woraus folgt

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} = \xi A e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}[a(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+b].$$

Das letzte Glied der Gleichung 44) aber reducirt sich, wenn man darin den obigen Werth für f substituirt, und alle Integrationen nach Maxwell's Vorschrift ausführt, auf

$$2gA_2kMN\xi\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\frac{5}{2h}\right)Ae^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}.$$

Damit also die Gleichung 44) erfüllt sei, muss

$$a = -2gA_2kMN,\quad b = 5gA_2kMN.\frac{1}{h} = -\frac{5a}{2h}$$

sein. Die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit gehende Masse ist

$$\rho\overline{\xi} = \rho\left(\frac{c}{2h} + \frac{5g}{4h^2}\right).$$

Soll die Wärmeleitung mit keiner Massenbewegung verbunden sein, so muss also

$$c = -\frac{5g}{2h}$$

sein. Bezeichnen wir mit T die absolute Temperatur, mit B aber eine Constante, so ist

$$T = \frac{M}{2}(\overline{\xi^2} + \overline{\eta^2} + \overline{\zeta^2}).B = \frac{3MB}{4h}\left(1 + \frac{ax}{h}\right),$$

daher mit Vernachlässigung von unendlich kleinem

$$\frac{dT}{dx} = \frac{a}{h}T.$$

Die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit gehende lebendige Kraft ist

$$L = \frac{\rho}{2}(\overline{\xi^3} + \overline{\xi\eta^2} + \overline{\xi\zeta^2}).$$

Die Mittelwerthe können ohne Schwierigkeit mittelst des angenommenen Werthes von f berechnet werden. Man erhält, wenn man alle dabei vorkommenden Integrale von der Form

$$\iiint \xi^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^n e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

ausrechnet, was am besten durch Differentiation von $N\overline{\xi^2}$ nach h geschieht:

$$L = \frac{5}{8} \cdot \frac{\rho g}{h^3} = \frac{5MNg}{8h^3}.$$

Die Wärmeleitungsconstante ist

$$C = -\frac{L}{\frac{dT}{dx}} = -\frac{5MNg}{8h^3} \cdot \frac{h}{aT} = \frac{5}{16h^2TA_2k_1}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta\frac{\partial f}{\partial z}+\int d\omega_1\int b\,db\int d\varphi\,V(ff_1-f'f_1')$$
$$+\int d\omega_*\int b\,db\int d\varphi\,V(ff_*-f'f_*')=0 \qquad 44^*)$$

und eine analoge Gleichung für die zweite Gasart. Dem einfachsten Falle der Diffusion entspricht das Integral

$$f=\sqrt{\frac{m^3h^3}{\pi^3}}N\,(1+2hmu\xi)\,e^{-hm(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)};$$
$$f_*=\sqrt{\frac{m_*^3h^3}{\pi^3}}N_*(1+2hm_*u_*\xi)\,e^{-hm_*(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}, \qquad 46^*)$$

wobei N und N_* Functionen von x, Nu und N_*u_* aber constant sein sollen. Keine Grösse soll Function der Zeit sein. Die Gleichung 44*) ist befriedigt, wenn

$$\frac{dN}{dx}+NN_*2hmm_*(u-u_*)A_1k=0$$

ist. Eine analoge Gleichung muss für N_* gelten. Es muss also sein: $N+N_*=$ const $=$ der Anzahl der Moleküle beider Gase in der Volumeinheit; daraus folgt: $Nu=-N_*u_*=$ der Anzahl der Moleküle einer Gasart, die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt 1 gehen. Die Diffusionsconstante ist

$$-\frac{Nu}{\frac{dN}{dx}}=\frac{1}{(N+N_*)2hmm_*A_1k}=\frac{pp_*}{A_1k\rho\rho_*(p+p_*)},$$

weil

$$2h=\frac{N+N_*}{p+p_*}=\frac{N}{p}=\frac{N_*}{p_*}$$

ist.

Will man die Bewegungsgleichungen erhalten, so multiplicire man die Gleichung 44) oder 44*) mit $m\xi d\omega$ (wobei $d\omega=d\xi\,d\eta\,d\zeta$), und integrire über alle ξ, η, ζ. Die vier ersten Glieder dieser Gleichungen verwandeln sich dann in

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\overline{\xi^2})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\overline{\xi\eta})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\overline{\xi\zeta})}{\partial z},$$

oder weil

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

in

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial(\rho\overline{\xi'^2})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\overline{\xi'\eta'})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\overline{\xi'\zeta'})}{\partial z},$$

wobei

$$\xi=\xi'+u,\ \eta=\eta'+v,\ \zeta=\zeta'+w$$

gesetzt wurde. Die übrigen Glieder aber liefern negativ genommen das durch die Stösse den Molekülen zugeführte Bewegungsmoment, das natürlich verschwindet, wenn kein zweites Gas beigemischt ist. Das zugeführte Bewegungsmoment mehr der Resultirenden aller Druckkräfte

$$\left(-\frac{\partial(\rho\overline{\xi'^2})}{\partial x}-\frac{\partial(\rho\overline{\xi'\eta'})}{\partial y}-\frac{\partial(\rho\overline{\xi'\zeta'})}{\partial z}\right)$$

ist also gleich der mit der Dichte multiplicirten Beschleunigung

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Die letzteren Gleichungen gelten natürlich für jedes beliebige Wirkungsgesetz. Dagegen haben die Ausdrücke 45), 46) und 46*) nur dann Giltigkeit, wenn die Abstossung zweier Moleküle der fünften Potenz ihrer Entfernung verkehrt proportional ist. Für jedes andere Wirkungsgesetz, z. B. wenn die Gasmoleküle wie elastische Kugeln an einander abprallen, befriedigen die Ausdrücke 45), 46) und 46*) die Gleichungen 44) und 44*) nicht, für alle anderen Wirkungsgesetze ist also bei Diffusion, Reibung etc. die Geschwindigkeitsvertheilung durch kein so einfaches Gesetz gegeben. Für den Fall der Diffusion müsste dann f etwa in folgender Form dargestellt werden:

$$A[1+a\xi+b\xi^3+c(\eta^2+\zeta^2)\xi+d\xi^5\ldots]e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}, \qquad 47^*)$$

und ich sehe kein anderes Mittel zur Auflösung der Gleichung 44*), als die successive Bestimmung der Coëfficienten

$a, b, c \dots$ Für alle anderen Wirkungsgesetze ist also die Geschwindigkeitsvertheilung eines diffundirenden Gases nicht dieselbe, als ob es sich allein im Raume mit seiner Diffusionsgeschwindigkeit u fortbewegte. Es rührt dies daher, dass die Moleküle mit verschiedenen Geschwindigkeiten auch verschiedene Diffusionsgeschwindigkeit haben, wodurch die Geschwindigkeitsvertheilung fortwährend gestört wird. Da die Glieder des Ausdruckes 47*) mit ξ^3, $\xi\eta^2, \dots$ in die Diffusionsconstante im Allgemeinen Glieder von derselben Ordnung liefern, wie die mit ξ, so kann die Diffusionsconstante nicht numerisch exact erhalten werden, wenn man erstere bei Berechnung des mitgetheilten Bewegungsmomentes vernachlässigt. Doch dürfte der hiedurch herbeigeführte Fehler kaum sehr gross sein. Ähnliches gilt natürlich von der Reibung und Wärmeleitung. Ja es wird nicht nur der Werth, sondern auch die Constanz der Diffusions-, Reibungsconstante etc. bei anderen als dem Maxwell'schen Wirkungsgesetze fraglich.

Dem Falle der Wärmeleitung in der Richtung der x-Axe entspricht unter Voraussetzung des Maxwell'schen Wirkungsgesetzes folgender Werth von f:

$$f = A[1 + ax(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) + bx + c\xi + g\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)]e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)},$$

woraus folgt

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} = \xi A e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}[a(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+b].$$

Das letzte Glied der Gleichung 44) aber reducirt sich, wenn man darin den obigen Werth für f substituirt, und alle Integrationen nach Maxwell's Vorschrift ausführt, auf

$$2gA_2kMN\xi\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\frac{5}{2h}\right)Ae^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}.$$

Damit also die Gleichung 44) erfüllt sei, muss

$$a = -2gA_2kMN, \quad b = 5gA_2kMN.\frac{1}{h} = -\frac{5a}{2h}$$

sein. Die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit gehende Masse ist

$$\rho\overline{\xi} = \rho\left(\frac{c}{2h} + \frac{5g}{4h^2}\right).$$

Soll die Wärmeleitung mit keiner Massenbewegung verbunden sein, so muss also

$$c = -\frac{5g}{2h}$$

sein. Bezeichnen wir mit T die absolute Temperatur, mit B aber eine Constante, so ist

$$T = \frac{M}{2}(\overline{\xi^2} + \overline{\eta^2} + \overline{\zeta^2}) . B = \frac{3MB}{4h}\left(1 + \frac{ax}{h}\right),$$

daher mit Vernachlässigung von unendlich kleinem

$$\frac{dT}{dx} = \frac{a}{h}T.$$

Die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit gehende lebendige Kraft ist

$$L = \frac{\rho}{2}(\overline{\xi^3} + \overline{\xi\eta^2} + \overline{\xi\zeta^2}).$$

Die Mittelwerthe können ohne Schwierigkeit mittelst des angenommenen Werthes von f berechnet werden. Man erhält, wenn man alle dabei vorkommenden Integrale von der Form

$$\int\int\int \xi^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^n e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

ausrechnet, was am besten durch Differentiation von $N\overline{\xi^2}$ nach h geschieht:

$$L = \frac{5}{8}\cdot\frac{\rho g}{h^3} = \frac{5MNg}{8h^3}.$$

Die Wärmeleitungsconstante ist

$$C = -\frac{L}{\frac{dT}{dx}} = -\frac{5MNg}{8h^3}\cdot\frac{h}{aT} = \frac{5}{16h^2TA_2k_1}.$$

Beachtet man, dass

$$\frac{p}{\rho} = \overline{\xi^2} = \frac{1}{2h}$$

ist, so ergibt sich endlich

$$C = \frac{5p^2}{4\rho^2 T A_2 k_1}.$$

Da ich die Gasmoleküle dabei als einfache materielle Punkte betrachtete, so ist bei mir die Maxwell'sche Grösse $\beta = 1$, das Verhältniss der Wärmecapacitäten $\gamma = 1^2/_3$. Wird daher die specifische Wärme (der Gewichtseinheit des Gases) bei constantem Volumen in gewöhnlichen Wärmeeinheiten gemessen mit w, das mechanische Wärmeäquivalent mit $\frac{1}{J}$ bezeichnet, so ist nach einer bekannten Formel

$$(\gamma - 1) w = \frac{2}{3} w = \frac{pJ}{\rho T}.$$

Die Wärmeleitungsconstante in gewöhnlichen Wärmeeinheiten gemessen ist also

$$C' = JC = \frac{5wp}{6kA_2 \rho} = \frac{5}{2} w \mu,$$

wobei μ der Reibungscoëfficient ist. Dieser Werth der Wärmeleitungsconstante ist $^3/_2$mal so gross, als der von Maxwell gefundene, was in einem Versehen Maxwell's bei Ableitung seiner Gleichung 43) aus 39) seinen Grund hat. Die Gasmoleküle sind dabei von mir als einfache materielle Punkte vorausgesetzt, weil sich unter dieser Annahme allein die Rechnungen exact durchführen lassen. In der Natur ist diese Annahme freilich nicht erfüllt, und würden daher die obigen Formeln bei ihrer Anwendung auf Experimente noch einer Modification bedürfen. Zieht man die intramoleculare Bewegung nach der Art Maxwell's in Rechnung, so würde man erhalten

$$C = \frac{5\beta p^2}{4\rho^2 T A_2 k}, \quad C' = \frac{5}{2} w \mu.$$

Doch scheint mir dies sehr willkürlich zu sein, und man könnte leicht, wenn man die intramoleculare Bewegung in anderer Weise in Rechnung zieht, erheblich andere Werthe für die Wärmeleitungsconstante erhalten. Aus diesem Grunde scheint mir eine numerisch exacte Berechnung derselben aus der Theorie, so lange man nicht mehr über die intramoleculare Bewegung weiss, unmöglich zu sein, und seit daher die Wärmeleitungsconstante, deren Grössenwerth man früher kaum für bestimmbar hielt, durch Stefan in so genauer Weise experimentell bestimmt wurde, scheint mir ihre experimentelle Bestimmung die theoretische an Genauigkeit weit zu übertreffen.

Wie sich die Sache gestaltet, wenn die Function f keine lineare Function von x ist, oder wenn gleichzeitig Wärmeleitung in anderen Richtungen oder Bewegungen stattfinden, wird kaum einer weiteren Erläuterung bedürfen.

IV. Betrachtung mehratomiger Gasmoleküle.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, dass jedes Molekül ein einzelner materieller Punkt sei. Dies ist bei den in der Natur vorkommenden Gasen sicher nicht der Fall. Wir werden der Wahrheit offenbar weit näher kommen, wenn wir voraussetzen, dass jedes Molekül aus mehreren materiellen Punkten (Atomen) besteht. Das Verhalten solcher mehratomiger Gasmoleküle soll im gegenwärtigen Abschnitte der Betrachtung unterzogen werden. Ich bemerke, dass die früher eingeführten Bedeutungen der Buchstaben in diesem Abschnitte nicht mehr gelten.

Die Anzahl der materiellen Punkte, also der Atome eines Moleküls, sei r. Dieselben mögen durch ganz beliebige Kräfte zusammengehalten werden, von denen wir blos voraussetzen, dass die zwischen je zwei Atomen wirksame Kraft eine Function des Abstandes der beiden Atome sei, und ihre Richtung in die Verbindungslinie derselben fällt, und dass sie so beschaffen sind, dass sich die Atome eines und desselben Moleküls niemals ganz von einander trennen können. Ich will diese Kräfte als die inneren Kräfte des Moleküls bezeichnen. Während der weitaus grössten Zeit der Bewegung eines Moleküls sollen auf die Atome desselben blos diese inneren Kräfte wirken. Nur wenn

das Molekül einem anderen zufällig sehr nahe kommt, sollen auch die Atome jenes andern auf die Atome dieses Moleküls wirken und vice versa. Ich nenne diesen Vorgang, während dessen beide Moleküle so nahe sind, dass sie auf einander eine bemerkbare Wirkung ausüben, einen Zusammenstoss, und die Kräfte, welche dabei die Atome des einen Moleküls auf die des andern und umgekehrt ausüben, sollen die Kräfte des Zusammenstosses heissen. Von ihnen setze ich wieder blos voraus, dass sie Functionen der Entfernung sind, und längs der Verbindungslinie wirken, sowie dass sie so beschaffen sind, dass sich die Atome der beiden Moleküle nicht austauschen, sondern dass nach dem Stosse jedes Molekül wieder aus denselben Atomen besteht, wie vor demselben. Um den Moment des Beginnes eines Zusammenstosses scharf definiren zu können, will ich voraussetzen, die Wechselwirkung zweier Moleküle beginne jedesmal, wenn die Distanz der Schwerpunkte beider Moleküle gleich einer gewissen Grösse l wird. Diese Distanz wird dann kleiner als l, wächst dann wieder, und wenn sie wieder gleich l geworden ist, so hört die Wechselwirkung, also der Zusammenstoss wieder auf. Der Moment des Beginns des Zusammenstosses ist freilich in der Natur wahrscheinlich nicht so scharf markirt. Unsere Schlüsse würden nicht alterirt, wenn ich denselben so charakterisiren würde, wie ich es in der Abhandlung „Über d. Wärmegleichgewicht zw. mehratom. Gasmol.“ S. 11 that. Ich will jedoch hier der Einfachheit halber die oben ausgesprochene Voraussetzung beibehalten, welche übrigens jener andern an Allgemeinheit nicht einmal nachsteht, da wir ja blos angenommen haben, dass, so lange die Distanz der Schwerpunkte $>l$ ist, keine Wechselwirkung stattfindet. Ist dieselbe $=l$ geworden, so kann in manchen Fällen anfangs die Wechselwirkung noch immer gleich Null sein und erst später beginnen. Um den Zustand eines Moleküls zu einer gewissen Zeit t zu definiren, denken wir uns ein für alle Mal drei auf einander senkrechte Richtungen fix im Raume angenommen. Wir ziehen durch den Punkt, an dem sich der Schwerpunkt unseres Moleküls zur Zeit t befindet, drei rechtwinklige Coordinatenaxen parallel jenen drei Richtungen, und bezeichnen die Coordinaten der materiellen Punkte unseres Moleküls bezüglich jener Axen

zur Zeit t mit ξ_1, η_1, ζ_1, $\xi_2 \ldots \zeta_r$. Ferner sei c_1 die Geschwindigkeit des ersten Atoms, u_1, v_1, w_1 ihre Componenten in den Richtungen der Coordinatenaxen; dieselben Grössen seien für das zweite Atom c_2, u_2, v_2, w_2; für das dritte c_3, u_3, v_3, w_3 u. s. w. Dann ist der Zustand unseres Moleküls zur Zeit t vollständig bestimmt, wenn wir die Werthe der $6r$—3 Grössen

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2 \ldots \xi_{r-1}, \eta_{r-1}, \zeta_{r-1}, u_1, v_1, w_1, u_2 \ldots w_r \qquad \text{A)}$$

zur Zeit t kennen. ξ_r, η_r, ζ_r sind Functionen der übrigen ξ, η, ζ, weil der Schwerpunkt Coordinatenanfangspunkt ist. Die Coordinaten des Schwerpunktes unseres Moleküls bezüglich der fixen Coordinatenaxen bestimmen nicht den Zustand, sondern blos die Lage unseres Moleküls. Wenn nun unser Molekül nicht gerade mit einem andern im Zusammenstosse begriffen ist, so sind zwischen den Atomen desselben blos die inneren Kräfte thätig. Wir können also, wenn dieselben gegeben sind, zwischen der Zeit und den $6r$—3 Grössen A) eben so viele Differentialgleichungen aufstellen, welche wir die Bewegungsgleichungen des Moleküls nennen wollen. Dieselben werden $6r$—3 Integrale haben, durch welche die Werthe der Variabeln A) als Functionen der Zeit und der Werthe dieser Grössen zu Anfang der Zeit ausgedrückt werden können. Eliminiren wir aus denselben die Zeit, so bleiben noch $6r$—4 Gleichungen mit eben so viel willkürlichen Integrationsconstanten übrig. Dieselben seien

$$\varphi_1 = a_1, \ \varphi_2 = a_2, \ldots \varphi_\rho = a_\rho,$$

wobei die a die Integrationsconstanten, die φ aber Functionen der Variabeln A) sind. ρ ist gleich $6r$—4. Aus diesen Gleichungen können daher alle Variabeln A) bis auf eine als Functionen dieser einen und der $6r$—4 Integrationsconstanten ausgedrückt werden. Ich will diese eine Variable ein für allemal mit x bezeichnen; sie kann sowohl eine der ξ, η, ζ, als auch der u, v, w sein. So lange das Molekül nicht mit einem andern zusammenstösst, erfüllen die Variabeln A) die Bewegungsgleichungen des Moleküls, bleiben daher die a constant und die Werthe jeder der Variabeln A) hängen blos von dem Werthe von x ab. Ich will daher a_1, $a_2, \ldots a_\rho$ als die die Bewegungs-

art des Moleküls bestimmenden Constanten, x aber als die die Bewegungsphase bestimmende Variable bezeichnen. So lange also das Molekül nicht mit anderen zusammenstösst, ändert sich blos die die Phase bestimmende Variable x. Wenn dagegen das Molekül mit einem andern zusammenstösst, so ändern auch die mit a bezeichneten Grössen ihre Werthe; dann ändert sich auch die Bewegungsart des Moleküls. Wir wollen nun annehmen, wir hätten wieder einen Raum $\mathfrak{R}$, in welchem sich sehr viele Moleküle befinden. Alle diese Moleküle seien gleichartig, d. h. alle bestehen aus gleichviel materiellen Punkten und die zwischen ihnen wirksamen Kräfte seien für alle identische Functionen ihrer relativen Lage. Beschreiben wir im Raume $\mathfrak{R}$ irgendwo einen kleineren, aber doch gegen die Distanz zweier Moleküle grossen Raum vom Volumen R, so mögen sich in demselben, wo er sich immer befinden mag, RN Moleküle befinden, von denen

$$Rf(t, a_1, a_2 \ldots a_\varrho) da_1 da_2 \ldots da_\varrho$$

zu einer gewissen Zeit t so beschaffen sein sollen, dass für dieselben

$$\begin{aligned} &\varphi_1 \text{ zwischen } a_1 \text{ und } a_1 + da_1, \\ &\varphi_2 \text{ zwischen } a_2 \text{ und } a_2 + da_2 \ldots \end{aligned} \qquad \text{B)}$$

liegt. Die Constanten a bestimmen die Bewegungsart eines Moleküls; ist demnach die Function f gegeben, so ist damit bestimmt, wie viele Moleküle von jeder der verschiedenen Bewegungsarten sich zur Zeit t im Raume R befinden. Wir sagen daher, die Function f bestimmt die Vertheilung der verschiedenen Bewegungsarten zur Zeit t unter den Molekülen. Ich nehme wieder an, dieselbe sei schon zu Anfang, daher auch für alle folgenden Zeiten eine gleichförmige, d. h. die Function f sei unabhängig von der Lage des Raumes R, sobald derselbe nur sehr gross gegen die durchschnittliche Distanz zweier Nachbarmoleküle ist. Ich sage Kürze halber immer, ein Molekül befindet sich in einem Raume, wenn sich der Schwerpunkt desselben in jenem Raume befindet. Wir nehmen nun an, der Werth der Function f für $t =$ Null, also $f(o, a_1, a_2 \ldots)$ sei gegeben; es



soll daraus der Werth der Function f für irgend eine andere Zeit berechnet werden. Die Constanten a ändern ihre Werthe blos in Folge der Zusammenstösse; es kann sich daher auch die Function f blos in Folge der Zusammenstösse verändern, und unsere Aufgabe ist zunächst, die Gleichungen aufzustellen, durch welche die Veränderung der Function f bestimmt ist. Wir müssen da wieder berechnen, wie viele Zusammenstösse während einer gewissen Zeit Δt so geschehen, dass vor denselben die Grössen a für eines der zusammenstossenden Moleküle zwischen den Grenzen B) liegen, ferner, wie viele so, dass nach denselben die Grössen a für eines der Moleküle zwischen den Grenzen B) liegen. Addiren wir die erstere Zahl zu $f(t, a_1\, a_2 \ldots) da_1 da_2 \ldots$ und subtrahiren die letztere davon, so erhalten wir die Zahl der Moleküle, für welche nach der Zeit Δt die Grössen a zwischen den Grenzen B) liegen, also die Grösse $f(t+\Delta t, a_1, a_2 \ldots) da_1 da_2 \ldots$.

Betrachten wir nun irgend einen Zusammenstoss zweier Moleküle; für das erste der stossenden Moleküle mögen die Constanten a vor dem Stosse zwischen den Grenzen B) liegen. Für das zweite mag

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \text{ zwischen } a_1' \text{ und } a_1'+da_1', \\ \varphi_2 \text{ zwischen } a_2' \text{ und } a_2'+da_2' \text{ u. s. f.} \end{array} \qquad \text{C)}$$

liegen. Dadurch ist der Zusammenstoss noch keineswegs vollständig bestimmt; es muss auch noch die Phase der beiden zusammenstossenden Moleküle, sowie ihre relative Lage im Momente des Beginnes des Zusammenstosses gegeben sein. Sei die Phase des ersten Moleküls dadurch gegeben, dass für dasselbe

$$x \text{ zwischen } x \text{ und } x+dx \qquad \text{D)}$$

liegt, während für das zweite der zusammenstossenden Moleküle

$$x \text{ zwischen } x' \text{ und } x'+dx' \qquad \text{E)}$$

liege. Um die relative Lage beider Moleküle im Momente des Beginnes des Zusammenstosses zu bestimmen, bezeichnen wir den Winkel zwischen der Verbindungslinie der Schwerpunkte

derselben und der x-Axe mit ϑ, den zwischen der xy-Ebene und einer parallel jener Verbindungslinie durch die x-Axe gelegten Ebene mit ω und es mag im Momente des Beginnes des Zusammenstosses

$$\begin{aligned} &\vartheta \text{ zwischen } \vartheta \text{ und } \vartheta + d\vartheta, \\ &\omega \text{ zwischen } \omega \text{ und } \omega + d\omega \end{aligned} \qquad \text{F)}$$

liegen. Alle Zusammenstösse, welche so geschehen, dass dabei die Bedingungen B), C), D), E) und F) erfüllt sind, will ich als Zusammenstösse von der Gattung G) bezeichnen. Es fragt sich jetzt zunächst, wie viele Zusammenstösse von der Gattung G) geschehen in der Volumeinheit während einer gewissen Zeit Δt? Wir wollen da die Annahme machen, die innere Bewegung der Moleküle sei sehr rasch, die Stösse dagegen geschehen so selten, dass ein Molekül von einem Zusammenstosse bis zum nächsten oftmal alle möglichen Bewegungsphasen durchläuft. Wir können dann Δt so gross wählen, dass während Δt jedes Molekül öfter alle möglichen Bewegungsphasen durchläuft, aber doch wieder so klein, dass während Δt nur wenige Zusammenstösse stattfinden, dass sich also f nur sehr wenig verändert. Betrachten wir irgend eines der Moleküle, deren Bewegungsart zwischen den Grenzen B) liegt; wir wollen es kurz das Molekül B) nennen. Wir nahmen an, dass es während der Zeit Δt alle möglichen Phasen oftmals durchläuft; daraus lässt sich beweisen, dass sich die Summe aller jener Zeitmomente, während welcher es im Verlaufe der Zeit Δt die Phase D) hat, zur ganzen Zeit Δt, wie sdx zu $\int sdx$ verhält, dass also die Summe aller dieser Zeitmomente

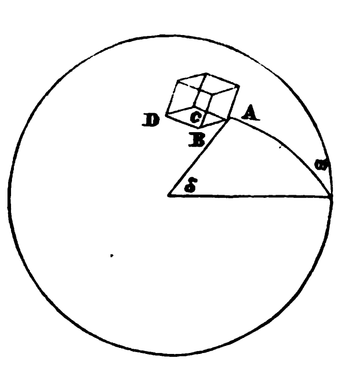
$$\tau = \Delta t \frac{sdx}{\int sdx} \qquad 48)$$

ist, wobei s durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\frac{1}{s} = \Sigma \pm \frac{\partial a_1}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial \eta_1} \cdot \cdot \frac{\partial a_\varrho}{\partial w_r} \cdot$$

Die Integration ist über alle möglichen x, also über alle möglichen Phasen zu erstrecken. Das Product $s dx$ ist immer mit positiven Zeichen zu nehmen.

In der Functionaldeterminante kommen die Differentialquotienten, nach allen Variabeln $\xi_1, \eta_1 \ldots \zeta_{r-1}, u_1, v_1, \ldots w_r$ bis auf x vor; sie kann also als Function von x und den Integrationsconstanten a ausgedrückt werden. Der eben ausgesprochene Satz lässt sich ganz ähnlich wie Jacobi's Princip des letzten Multiplicators beweisen; da ich jedoch den Beweis bereits in der Abhandlung: „Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht" (Sitzungsb. Bd. 63) geführt habe (siehe daselbst die Anmerkung auf S. 15), so will ich ihn hier nicht noch einmal wiederholen. Ich habe daselbst gezeigt, dass sich die Sache nicht verändert, wenn zur Bestimmung der Phase eine Variable nicht ausreicht. Die Summe aller Wege, welche während der ganzen oben mit τ bezeichneten Zeit der Schwerpunkt des Moleküls B) relativ gegen den Schwerpunkt eines Moleküls von der Beschaffenheit C) zurücklegt, ist gleich $\gamma\tau$, wobei γ die relative Geschwindigkeit der Schwerpunkte beider Moleküle ist. Beschreiben wir nun um den Schwerpunkt des Moleküls B) eine Kugel vom Radius l, so bildet der Inbegriff aller Punkte dieser Kugel, für welche die Winkel ϑ und ω zwischen den Grenzen F liegen, ein unendlich kleines Rechteck $ABCD$ (siehe nebenstehende Figur) vom Flächeninhalte $l^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega$. Denken wir uns dieses Rechteck fest mit dem Schwerpunkte des Moleküls B) verbunden, so ist also die Summe der Wege, welche es während τ relativ gegen die Moleküle von der Beschaffenheit C) zurücklegt, ebenfalls $\gamma\tau$. Alle diese Wege bilden mit Vernachlässigung von Unendlichkleinem gleiche Winkel mit den Coordinatenaxen; sie bilden daher auch denselben Winkel (ε) mit der Ebene des Rechtecks $ABCD$, da ja die Geschwindigkeiten sämmtlicher Atome des Moleküls B durch die Bedingungen B) und D) zwischen unendlich nahe Grenzen eingeschlossen sind.



Das ganze Volumen, welches daher unser Rechteck während der Summe aller Zeitmomente τ durchwandern würde, wenn es sich blos mit seiner relativen Geschwindigkeit gegen die Moleküle von der Beschaffenheit C) bewegte, ist

$$V = l^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\omega \, . \sin \varepsilon \, . \, \gamma \tau , \tag{49}$$

und es ist leicht einzusehen, dass alle Moleküle, welche sich innerhalb dieses Volumens befinden, mit dem Moleküle B) so zusammenstossen, dass dabei die Bedingungen F) erfüllt sind. Es fragt sich daher nur noch, wie viele Moleküle von der Bewegungsart C) und der Phase E) in diesem Volumen liegen werden. Wir wissen, dass in der Volumeinheit $f(ta'_1 a'_2 \ldots) da'_1 da'_2 \ldots$ Moleküle von der Bewegungsart C), daher, weil die Vertheilung der Bewegungsarten eine gleichförmige ist, $Vf(ta'_1 a'_2 \ldots) da'_1 da'_2 \ldots$ im Volumen V liegen. Alle diese Moleküle werden jedoch nicht die Phase E) haben. Vielmehr wird sich die Zahl derjenigen, welche diese Phase haben, zu ihrer Gesammtzahl verhalten wie die Zeit, während welcher ein Molekül die Phase E) besitzt, zur Zeit, während welcher es alle möglichen Phasen durchläuft, also entsprechend der Gleichung 48) wie $s' dx'$ zu $\int s' dx'$; wobei

$$\frac{1}{s'} = \Sigma \pm \frac{\partial a'_1}{\partial \xi'_1} \cdot \frac{\partial a'_2}{\partial \eta'_1} \cdots$$

ist. Diese Zahl ist also

$$\nu = Vf(ta'_1 a'_2 \ldots) \, da'_1 \, da'_2 \ldots \frac{s' dx'}{\int s' dx'} . \tag{50}$$

Hiebei wurde vorausgesetzt, dass unter den Molekülen von der Beschaffenheit C) die verschiedenen Phasen während der Zeit τ gerade so vertheilt sind, wie während der Zeit Δt, dass also nicht immer die Phase D) gerade mit der Phase E) coïncidirt oder eben so wenig die Phase E) niemals oder besonders selten mit der D) gleichzeitig stattfindet. Wenn die Schwingungsdauer der Moleküle von der Beschaffenheit C) nicht commensurabel ist mit der der Moleküle von der Beschaffenheit B), so ist dies selbstverständlich. Wären jedoch diese beiden Schwingungsdauern für alle oder eine endliche Zahl von

Molekülpaaren commensurabel, so müsste dies als eine Eigenschaft der zu Anfang hergestellten Zustandsvertheilung vorausgesetzt werden, welche sich dann für alle folgenden Zeiten erhalten würde. Der Ausdruck 50) gibt uns die Zahl der Moleküle im Volumen V, für welche die Bedingungen C) und E) erfüllt sind, und wir wissen, dass alle diese und nur diese während Δt mit dem betrachteten Moleküle von der Beschaffenheit B), das wir immer das Molekül B) nannten, so zusammenstossen, dass dabei die Bedingungen C), D), E) und F) erfüllt sind. Nun sind aber $f(t, a_1, a_2 \ldots) da_1 da_2 \ldots$ Moleküle von der Beschaffenheit B) in der Volumeinheit; multipliciren wir daher noch mit dieser Zahl, so erhalten wir $dn = \nu f(t, a_1, a_2 \ldots) da_1 da_2 \ldots$ für die Zahl der Molekülpaare, welche in der Volumeinheit während der Zeit Δt so zusammenstossen, dass alle 5 Bedingungen B), C), D), E) und F) erfüllt sind, also für die Zahl der Zusammenstösse von der Gattung G) während dieser Zeit. Unter Berücksichtigung der Gleichungen 48), 49) und 50) erhalten wir für diese Zahl den Werth:

$$dn = \frac{f(t, a_1, a_2 \ldots) f(t\, a'_1 a'_2 \ldots)}{\int s dx \int s' dx'} l^2 \gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon \, d\vartheta \, d\omega \, \Delta t \times$$
$$\times s dx \, da_1 da_2 \ldots s' dx' da'_1 da'_2 \ldots \qquad 51)$$

Wenn die Werthe der Grössen

$$a_1, a_2 \ldots a'_1, a'_2 \ldots x, x', \vartheta, \omega \qquad J)$$

im Momente des Beginnes des Zusammenstosses gegeben sind, so ist damit die Natur des Zusammenstosses vollkommen charakterisirt; es können also die Werthe derselben Grössen im Momente des Endes jenes Zusammenstosses berechnet werden. Es sollen diese Werthe im Momente des Endes mit den entsprechenden grossen Buchstaben bezeichnet werden. Es können also dann die Grössen

$$A_1, A_2 \ldots A'_1, A'_2 \ldots X, X', \Theta, \Omega \qquad K)$$

als Functionen der Variabeln J) ausgedrückt werden. Ich will den Inbegriff der Bedingungen B), C), D), E) und F) kurz als

die Bedingungen G) bezeichnen. Alle Zusammenstösse, für welche die Werthe der Variabeln im Momente ihres Beginnes den Bedingungen G) genügten, verlaufen in sehr ähnlicher Weise. Für dieselben werden daher auch im Momente des Endes die Werthe der Variabeln zwischen gewissen unendlich nahen Grenzen liegen. Wir wollen annehmen, für alle diese und nur diese Zusammenstösse sollen die Variabeln im Momente des Endes zwischen

$$\begin{gathered} A_1 \text{ und } A_1+dA_1,\ A_2 \text{ und } A_2+dA_2 \ldots A_1' \text{ und } A_1'+dA_1', \\ A_2' \text{ und } A_2'+dA_2' \ldots X \text{ und } X+dX,\ X' \text{ und } X'+dX', \\ \Theta \text{ und } \Theta+d\Theta,\ \Omega \text{ und } \Omega+d\Omega \end{gathered} \tag{H}$$

liegen.

Da die Grössen K) Functionen der Variabeln J) sind, so können wir im Ausdrucke 51) statt einiger Differentiale der Grössen J) auch Differentiale der Grössen K) einführen; wir wollen z. B. statt der vier Differentiale dx, dx', $d\vartheta$ und $d\omega$ die Differentiale von A_1, A_2, A_1' und A_2' einführen, wobei ich übrigens bemerke, dass die vier Grössen A_1, A_2, A_1', A_2' nur beispielsweise genommen wurden; wir könnten an ihre Stelle eben so gut vier andere der Grössen K) setzen. Wir erhalten dann

$$\begin{gathered} dn = \frac{f(a_1, a_2 \ldots) f(a_1', a_2' \ldots)}{\int s dx \,.\, \int s' dx'} s s' s_1 l^2 \gamma \sin\vartheta \sin\varepsilon \Delta t\, da_1 da_2 \ldots \\ da_\rho da_1' \ldots da_\rho' dA_1 dA_2 dA_3 dA_4, \end{gathered} \tag{52}$$

wobei

$$\frac{1}{s_1} = \Sigma \pm \frac{\partial A_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x'} \cdot \frac{\partial A_1'}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial A_2'}{\partial \omega}$$

ist.

Dies ist die Zahl der Zusammenstösse, welche in der Volumeinheit während Δt so geschehen, dass vor denselben die Grössen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_\rho'$ zwischen den Grenzen B) und C) und ausserdem nach denselben A_1, A_2, A_1', und A_2' zwischen

$$A_1 \text{ und } A_1+dA_1 \ldots A_2' \text{ und } A_2'+dA_2'$$

liegen. Lassen wir in diesem Ausdrucke $a_1, a_2 \ldots a_\rho$ constant und integriren bezüglich $a_1', a_2' \ldots a_\rho'$, A_1, A_2, A_1' und A_2' über alle

möglichen Werthe dieser Grössen, so erhalten wir alle Zusammenstösse, welche in der Volumeinheit während Δt so geschehen, dass vor denselben die a für eines der zusammenstossenden Moleküle zwischen den Grenzen B) lagen, ohne dass hiezu noch irgend eine andere Bedingung hinzukäme. Diese Zahl ist also:

$$dn' = da_1 da_2 \ldots da_\rho \Delta t \iint \ldots \frac{f(t a_1 a_2 \ldots) f(t, a'_1, a'_2 \ldots)}{\int s dx \;.\; \int s' dx} s s' s_1 l^2 \gamma \times \qquad 53)$$
$$\times \sin \vartheta \sin \varepsilon \, da'_1 da'_2 \ldots dA'_1 dA'_2.$$

Durch jeden dieser Zusammenstösse wird die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, für welche die a zwischen den Grenzen B) liegen, also die Zahl $f(t a_1 a_2 \ldots) da_1 da_2 \ldots da_\rho$ um eins vermindert; es ist also die Zahl dn' von $f(t a_1 a_2 \ldots) da_1 da_2 \ldots$ zu subtrahiren; dann bleibt die Zahl der Moleküle übrig, für welche während Δt die Grössen a nicht aufgehört haben, zwischen den Grenzen B) zu liegen. Hiezu muss noch die Zahl der Zusammenstösse addirt werden, welche so geschehen, dass nicht vor, wohl aber nach denselben die Grössen a zwischen den Grenzen B) liegen. Sie heisse dN'. Dann ist also

$$f(t, a_1, a_2 \ldots) da_1 da_2 \ldots da_\rho - dn' + dN'$$

die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, für welche zur Zeit $t + \Delta t$ die a zwischen den Grenzen B) liegen. Es ist also

$$f(t, a_1, a_2 \ldots) da_1 da_2 \ldots da_\rho - dn' + dN'$$
$$= f(t + \Delta t, a_1, a_2 \ldots) da_1 da_2 \ldots da_\rho. \qquad 54)$$

Die Zahl dN' kann in folgender Weise gefunden werden. Für die Anzahl der Zusammenstösse, welche in der Volumeinheit während Δt so geschehen, dass bei Beginn derselben die Bedingungen G) erfüllt sind, fanden wir oben den Ausdruck 51). Für alle diese erfüllen die Variabeln im Momente des Endes die Bedingungen H). Wir brauchen in diesem Ausdrucke blos die kleinen Buchstaben mit den grossen zu vertauschen, um die Zahl der Zusammenstösse zu finden, für welche die Werthe der Variabeln im Momente des Beginnes Bedingungen erfüllen, die

sonst ganz identisch mit den Bedingungen H) sind, nur dass die Plätze der Schwerpunkte beider Moleküle vertauscht erscheinen, deren Verbindungslinie also gleiche Richtung, aber den entgegengesetzten Sinn hat. Letztere Zahl ist also

$$dN = \frac{f(t, A_1, A_2 \ldots) f(t, A'_1, A'_2 \ldots)}{\int S dX \int S' dX'} S S' l^2 \Gamma \sin \Theta \sin \mathrm{E} \times$$
$$\times d\Theta \, d\Omega \, \Delta t \, dX \, dA_1 dA_2 \ldots dA_\rho dX' \, dA'_1 dA'_2 \ldots dA'_\rho, \qquad 55)$$

wobei S, S', $\mathrm{E} \ldots$ aus s, s', $\varepsilon \ldots$ gebildet werden, indem man darin die Variabeln J) mit den Variabeln K) vertauscht. Für alle diese Zusammenstösse aber werden umgekehrt die Werthe der Variabeln im Momente des Endes zwischen den Grenzen G) liegen. Denn es ist klar, dass ein Zusammenstoss, für den im Momente des Beginnes die Bedingungen G) erfüllt sind, gerade umgekehrt verläuft, wie einer, bei dem im Momente des Beginnes jene mit H) analogen Bedingungen erfüllt sind. Während also für den ersteren Zusammenstoss im Momente des Endes die Bedingungen H) erfüllt sind, so sind für den letzteren umgekehrt im Momente des Endes ähnliche wie die Bedingungen G) erfüllt. Die Formel 55) gibt uns also die Zahl der Zusammenstösse, welche in der Volumeinheit während Δt so geschehen, dass im Momente des Endes derselben die Werthe der Variabeln den Bedingungen G) genügen. Wir wollen zunächst wieder statt der Differentiale von X, X', Θ und Ω die von a_1, a_2, a'_1, a'_2 einführen, so erhalten wir

$$dN = \frac{f(t, A_1, A_2 \ldots) f(t, A'_1, A'_2 \ldots)}{\int S dX \int S' dX'} S S' S_1 l^2 \Gamma \sin \Theta \sin \mathrm{E} \times$$
$$\times \Delta t \, dA_1 dA_2 \ldots dA_\rho dA'_1 \ldots dA'_\rho da_1 da_2 da'_1 da'_2.$$

In dieser Formel ist

$$\frac{1}{S_1} = \Sigma \pm \frac{\partial a_1}{\partial X} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial X'} \cdot \frac{\partial a'_1}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial a'_2}{\partial \Omega},$$

wobei man sich bei Bildung der partiellen Differentialquotienten in der Functionaldeterminante die a als Functionen der als independent zu denkenden Grössen G) ausgedrückt denken

muss. Führen wir ausserdem noch statt der Differentiale von A_3, $A_4 .. A_\rho$, $A'_3 ... A'_\rho$ die von a_3, $a_4 .. a_\rho$ $a'_3 ... a'_\rho$ ein, so erhalten wir:

$$dN = \frac{f(t, A_1, A_2 ..)\, f(t, A'_1, A'_2 ..)}{\int S dX \quad \int S' dX'} SS'S_1 \sigma l^2 \Gamma \sin \Theta \sin E \times \\ \times \Delta t\, da_1 da_2 .. da'_\rho dA_1 dA_2 dA'_1 dA'_2, \qquad 56)$$

wobei

$$\sigma = \Sigma \pm \frac{\partial A_3}{\partial a_3} \cdot \frac{\partial A_4}{\partial a_4} \cdots \frac{\partial A'_\rho}{\partial a'_\rho},$$

in welcher Functionaldeterminante A_3, $A_4 ... A'_\rho$ als Functionen der als independent zu betrachtenden Variabeln a_1, $a_2 ... a'_\rho$, A_1, A_2, A'_1, A'_2 anzusehen sind. In dem Ausdrucke 56) wollen wir uns alle Grössen als Functionen von

$$a_1, a_2 .. a_\rho, a'_1 ... a'_\rho, \; A_1, A_2, A'_1, A'_2$$

ausgedrückt denken. Ferner betrachten wir a_1, $a_2 ... a_\rho$ als constant und integriren bezüglich a'_1, $a'_2 ... A'_2$ über alle möglichen Werthe dieser Grössen. Dadurch erhalten wir die Anzahl der Zusammenstösse, nach denen für eines der stossenden Moleküle die Grössen a zwischen den Grenzen B) liegen, während sonst alles beliebig ist; also genau die mit dN' bezeichnete Grösse. Es ist also

$$dN' = da_1 da_2 .. da_\rho \Delta t \iint .. \frac{f(t, A_1 ..)\, f(t, A'_1 ..)}{\int S dX \quad \int S' dX'} SS'S_1 \sigma l^2 \times \\ \times \Gamma \sin \Theta \sin E\, da'_1 da'_2 .. da'_\rho dA_1 dA_2 dA'_1 dA'_2. \qquad 57)$$

Wir wollen nun die rechte Seite der Gleichung 54) nach Potenzen von Δt entwickeln und bei der ersten Potenz stehen bleiben, was für sehr kleine Δt gestattet ist. Sie geht dann über in

$$\frac{\partial f(t, a_1, a_2 ..)}{\partial t} da_1 da_2 .. da_\rho \Delta t = -dn' + dN'. \qquad 58)$$

Bevor ich hier die Werthe von dn' und dN' substituire, will ich noch an eine Relation erinnern, welche ich bereits in meiner Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht mehratomiger Gasmoleküle" (Sitzungsb. d. Wiener Akad. Bd. 63) bewiesen habe. Die in jener Abhandlung entwickelte Gleichung 19) lautet nämlich nach Einführung unserer Bezeichnungsweise:

$$\gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon \, d\xi_1 \, d\eta_1 \ldots d\zeta_{r-1} \, du_1 \, dv_1 \ldots dw_r \, d\vartheta \, d\omega$$

$$= \Gamma \sin \Theta \sin \mathrm{E} \, d\Xi_1 \, d\mathrm{H}_1 \ldots d\Omega,$$

wenn Ξ_1, $\mathrm{H}_1 \ldots$ die Werthe von ξ_1, $\eta_1 \ldots$ im Momente des Endes des Zusammenstosses bezeichnen. Führen wir in diese Gleichung zunächst a_1, $a_2 \ldots a'_\rho$, x, x' statt ξ_1, $\eta_1 \ldots w_r$ ein, so geht sie über in

$$ss'\gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon \, da_1 \, da_2 \ldots da'_\rho \, dx \, dx' \, d\vartheta \, d\omega$$

$$= SS'\Gamma \sin \Theta \sin \mathrm{E} \, dA_1 \, dA_2 \ldots dA'_\rho \, dX \, dX' \, d\Theta \, d\Omega,$$

wobei s und S dieselben Bedeutungen wie früher haben. Führen wir ferner links dA_1, dA_2, dA'_1, dA'_2 statt dx, dx', $d\vartheta$, $d\omega$ ein, und ähnlich rechts, so erhalten wir

$$ss's_1\gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon \, da_1 \, da_2 \ldots da'_\rho \, dA_1 \, dA_2 \, dA'_1 \, dA'_2$$

$$= SS'S_1\Gamma \sin \Theta \sin \mathrm{E} \, dA_1 \, dA_2 \ldots dA'_\rho \, da_1 \, da_2 \, da'_1 \, da'_2.$$

Führen wir auf der rechten Seite dieser Gleichung statt der Differentiale von A_3, $A_4 \ldots A_\rho$, $A'_3 \ldots A'_\rho$ wieder die von a_3, $a_4 \ldots a_\rho$, $a'_3 \ldots a'_\rho$ ein, so können wir durch alle Differentiale wegdividiren, und es bleibt uns nur noch:

$$ss's_1 \gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon = SS'S_1 \Gamma \sigma \sin \Theta \sin \mathrm{E}. \quad 59)$$

Nun wollen wir die Werthe 53) und 57) für dn' und dN' in die Gleichung 58) substituiren. Dividiren wir dabei durch $da_1 \, da_2 \ldots da_\rho \, \Delta t$ weg, ziehen die beiden Integrale rechts in ein einziges zusammen, und beachten endlich noch die Gleichung 59), so ergibt sich

$$\frac{\partial f(t, a_1, a_2 \ldots a_\rho)}{\partial t} =$$

$$\iint \cdots \left[\frac{f(t, A_1, A_2 \ldots)\, f(t, A'_1, A'_2 \ldots)}{\int S dX \quad \int S' dX'} - \frac{f(t, a_1, a_2 \ldots)\, f(t, a'_1, a'_2 \ldots)}{\int s dx \quad \int s' dx'}\right] \quad 60)$$

$$\times s s' s_1 \, \ell^2 \gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon \, da'_1 da'_2 \ldots da'_\rho dA_1 dA_2 dA'_1 dA'_2 ,$$

und dies ist als die Grundgleichung anzusehen, welche die Veränderung der Function $f(t, a_1, a_2 \ldots)$ mit wachsender Zeit bestimmt. Alle Grössen hat man sich hier als Functionen der $2\rho + 4$ den Zusammenstoss (ausser seiner absoluten Lage im Raume) vollkommen bestimmenden Grössen $a_1\, a_2 \ldots a_\rho\, a'_1 \ldots a'_\rho\, A_1\, A_2\, A'_1\, A'_2$ ausgedrückt zu denken. $\int S dX$ ist die Grösse, welche man erhält, wenn man $\int s dx$ als Function dieser $2\rho + 4$ Variabeln ausdrückt; dann die kleinen und grossen Buchstaben vertauscht, und schliesslich wieder die $A_3\, A_4 \ldots$ als Functionen der $2\rho + 4$ Variabeln ausdrückt, ebenso $\int S dX'$. Man sieht sofort, dass diese Veränderung gleich Null ist, sobald der Ausdruck in der eckigen Klammer für alle Werthe der Variabeln verschwindet; denn dann verschwindet nothwendig auch das Integral, und dies ist nichts anderes, als was ich schon in der bereits citirten Abhandlung über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen in einer etwas anderen Form gefunden. Allein hiemit ist noch nicht bewiesen, dass das Integral der linken Seite der Formel 60) nur verschwinden kann, wenn der Ausdruck unter dem Integralzeichen für alle Werthe der Variabeln verschwindet. Es könnte vielmehr das Integrale auch verschwinden, wenn der Ausdruck unter dem Integralzeichen bald positiv, bald negativ würde. Um diesen letzteren Beweis zu liefern, verfahren wir ganz in derselben Weise, wie wir dies früher in der Theorie des Verhaltens einatomiger Gasmoleküle thaten. Da die Functionaldeterminante s nur eine Function von $x, a_1\, a_2 \ldots a_\rho$ ist, und die Grenzen des Integrals $\int s dx$ nur von den a abhängen, so folgt, dass letzteres Integral eine Function von $a_1, a_2 \ldots a_\rho$ ist. Es ist daher $\frac{f(t\, a_1\, a_2 \ldots)}{\int s dx}$ eine Function von $t, a_1, a_2 \ldots a_\rho$, und wir wollen setzen:

$$\frac{f(t, a_1, a_2 \ldots a_\rho)}{\int s dx} = \varphi(t, a_1, a_2 \ldots a_\rho) \quad 61)$$

Ferner werde zur Abkürzung

$$ss's_1 l^2 \gamma \sin \vartheta \sin \varepsilon = p$$

gesetzt. Dann können wir die Gleichung 13) etwas kürzer so schreiben:

$$\frac{\partial \varphi(t\, a_1\, a_2 \ldots)}{\partial t} \int s\, dx = \int\int \ldots [\varphi(t\, A_1\, A_2 \ldots) \varphi(t\, A'_1\, A'_2 \ldots) - \\ - \varphi(t\, a_1\, a_2 \ldots) \varphi(t\, a'_1\, a'_2 \ldots)]\, p\, da'_1\, da'_2 \ldots da'_\rho dA_1 dA_2 dA'_1 dA'_2. \quad 62)$$

Die Grösse p besitzt zwei Eigenschaften, die wir später benützen werden. Erstlich, sie ist symmetrisch bezüglich der Variabeln $a_1, a_2 \ldots a_\rho\, A_1\, A_2$ und $a'_1, a'_2 \ldots a'_\rho, A'_1, A'_2$, d. h. sie ändert ihren Werth nicht, wenn man gleichzeitig a'_1 mit a_1 und umgekehrt; a'_2 mit a_2 und umgekehrt u. s. w. vertauscht. Denn hierdurch schreibt man blos dem zweiten der zusammenstossenden Moleküle den Zustand zu, den vor der Vertauschung das erste hatte, und umgekehrt, und es ist klar, dass sich hiedurch relative Geschwindigkeit etc. beider Moleküle nicht ändert. Dass aber das Product ss' und die Grösse s_1 ebenfalls in dieser Weise symmetrisch sind, lehrt der blosse Anblick der Ausdrücke für diese Grössen. Zweitens, p ist nothwendig positiv; denn die durch die Formel 52) dargestellte Zahl dn kann nicht anders als positiv sein; dieselbe enthält aber nebst p lauter positive Factoren (die Differentiale setzen wir ebenfalls durchweg positiv voraus), folglich muss p ebenfalls positiv sein. Setzen wir jetzt

$$E = \int\int \ldots \varphi(t\, a_1 a_2 \ldots) . \int s dx . \log \varphi(t, a_1, a_2 \ldots) da_1 da_2 \ldots da_\rho, \quad 63)$$

wobei log wieder den natürlichen Logarithmus bezeichnet und die Integrationen über alle möglichen Werthe der a zu erstrecken sind, so dass also E nur mehr eine Function der Zeit ist, und suchen den Differentialquotienten von E nach der Zeit t. Da die Grenzen der Integrale, durch welche E bestimmt ist, t nicht enthalten, so finden wir $\frac{dE}{dt}$, indem wir unter dem Integralzeichen nach t differentiiren, und zwar blos insoferne die Grössen unter dem Integralzeichen t explicit enthalten, denn die a sind nichts anderes als die Variabeln, nach denen integrirt wer-

den soll. Wir wissen, dass $\int s dx$ die Zeit auch nicht enthält dieselbe ist also nur in $\varphi(t, a_1\, a_2 \ldots)$ enthalten. Berücksichtigen wir noch, dass

$$\int\int \ldots \varphi(t, a_1, a_2 \ldots) . \int s dx . da_1\, da_2 \ldots da_\rho$$

die Gesammtzahl der Moleküle in der Volumeinheit, also sein Differentialquotient nach t gleich Null ist, so erhalten wir

$$\frac{dE}{dt} = \int\int \ldots \frac{\partial \varphi(t\, a_1\, a_2 \ldots)}{\partial t} \log \varphi(t a_1, a_2 \ldots) . \int s dx . da_1 da_2 \ldots da_\rho .$$

Substituiren wir hier für $\frac{\partial \varphi(t\, a_1\, a_2 \ldots)}{\partial t}$ seinen Werth aus Gleichung 62) und setzen Kürze halber

$$\varphi(t, a_1\, a_2 \ldots) = \varphi ; \; \varphi(t\, a_1' a_2' \ldots) = \varphi' ; \; \varphi(t, A_1, A_2 \ldots) = \Phi ;$$
$$\varphi(t, A_1', A_2' \ldots) = \Phi' ,$$

so ergibt sich

$$\frac{dE}{dt} = \int\int\int \ldots \log \varphi . [\Phi\Phi' - \varphi\varphi'] p\, da_1\, da_2 \ldots da_\rho\, da_1' \ldots \quad 64)$$
$$da_\rho' dA_1\, dA_2\, dA_1'\, dA_2' .$$

In dem bestimmten Integrale, welches die rechte Seite der Gleichung 64) bildet, können wir wieder die Variabeln, nach denen zu integriren ist, bezeichnen, wie wir wollen. Wir können also z. B. $a_1\, a_2 \ldots A_2$ mit $a_1'\, a_2' \ldots A_2'$ und umgekehrt vertauschen. Dadurch ändert sich weder p, noch die Grösse in der eckigen Klammer, nur $\log \varphi$ verwandelt sich in $\log \varphi'$, und wir erhalten also, wenn wir zum Schlusse auch noch die Integrationsordnung umkehren, so dass wieder in der alten Reihenfolge integrirt wird:

$$\frac{dE}{dt} = \int\int \ldots \log \varphi' [\Phi\Phi' - \varphi\varphi'] p da_1 da_2 \ldots da_\rho' dA_1 dA_2 dA_1' dA_2' . \quad 65)$$

Nun wollen wir diejenigen a, welche in Formel 64) mit den kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet wurden, mit den grossen und umgekehrt bezeichnen, so erhalten wir:

$$\frac{dE}{dt} = \int\int..\log\Phi[\varphi\varphi' - \Phi\Phi'] P dA_1 dA_2 \ldots dA'_\rho da_1 da_2 da'_1 da'_2, \qquad 66)$$

wobei $P = SS'S_1 l^2 \Gamma \sin\Theta \sin E$ ist. Man erhält also P, indem man p als Function der $2\rho+4$ Grössen $a_1 a_2 .. a'_\rho A_1 .. A'_2$ ausdrückt und dann die grossen und kleinen Buchstaben vertauscht. Nun wissen wir aber, dass $A_3 A_4 .. A_\rho A_3 .. A'_\rho$ als Functionen von $a_1 a_2 .. a'_\rho A_1 A_2 A'_1$ und A'_2 ausgedrückt werden können. Wir können also in der Formel 66) statt der Differentiale von $A_3 A_4 .. A_\rho A'_3 A'_4 .. A'_\rho$ wieder die von $a_3 a_4 .. a_\rho a'_3 .. a'_\rho$ einführen, was natürlich wieder blos eine rein formelle Veränderung ist. Wir können ja unter dem Integralzeichen statt der Variabeln, nach denen die Integration zu geschehen hat, beliebige andere Functionen derselben einführen, folglich auch, wenn wir wollen, diejenigen, welche uns früher $a_3 a_4 ..$ durch $A_3 A_4 ..$ ausdrückten. Dadurch geht die Gleichung 66) über in

$$\frac{dE}{dt} = \int\int..\log\Phi[\varphi\varphi' - \Phi\Phi'] P\sigma\, da_1 da_2 \ldots da'_\rho dA_1 dA_2 dA'_1 dA'_2,$$

oder wegen der Gleichung 59) in

$$\frac{dE}{dt} = \int\int..\log\Phi[\varphi\varphi' - \Phi\Phi'] p\, da_1 da_2 \ldots da'_\rho dA_1 dA_2 dA'_1 dA'_2. \qquad 67)$$

Die Integrationen sind in allen diesen Formeln über alle möglichen Werthe der Variabeln zu erstrecken. Vertauschen wir hier endlich wieder $a_1 a_2 \ldots A_2$ mit $a'_1 a'_2 \ldots A'_2$, so ergibt sich

$$\frac{dE}{dt} = \int\int..\log\Phi' . [\varphi\varphi' - \Phi\Phi'] p\, da_1 da_2 \ldots da'_\rho dA_1 dA_2 dA'_1 dA'_2. \qquad 68)$$

Addiren wir nun die Gleichungen 64), 65), 67) und 68) und dividiren durch 4, so bekommen wir

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{4}\int\int..\log\left(\frac{\varphi\varphi'}{\Phi\Phi'}\right) . [\Phi\Phi' - \varphi\varphi'] p\, da_1 da_2 \ldots dA'_2.$$

Da nun p immer positiv ist, so folgt aus diesem Ausdrucke sofort wieder, dass $\frac{dE}{dt}$ niemals positiv sein kann, also E selbst

nur abnehmen oder constant bleiben kann. Letzteres kann nur der Fall sein, wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer also

$$\varphi(t, a_1, a_2 \ldots a_\rho) \cdot \varphi(t\, a_1' a_2' \ldots a_\rho') - \varphi(t\, A_1 A_2 \ldots A_\rho) \cdot \varphi(t\, A_1' A_2' \ldots A_\rho') \quad 69)$$

für alle Werthe der Variabeln verschwindet. Es kann daher die Zustandsvertheilung nicht periodisch zwischen gewissen Grenzen hin und her schwanken, und für die Grenze, der sie sich mit wachsender Zeit nähert, muss der Ausdruck 69) allgemein verschwinden.

Die Bedeutung der eben vorgenommenen Transformation der Gleichung 64) kann wie im Falle einatomiger Gasmoleküle durch Zerlegung des Integrals in eine Summe veranschaulicht werden. Setzen wir etwa

$$a_1 = b_1 \varepsilon,\ a_2 = b_2 \varepsilon \ \ldots\ a_\rho' = b_\rho' \varepsilon,\ A_1 = B_1 \varepsilon \quad \ldots,$$

wobei ε eine beliebige sehr kleine Grösse, die b aber ganze Zahlen sind; ferner

$$\varphi(t, a_1, a_2 \ldots) = w_{b_1 b_2 \ldots},\ \int s\,dx = v_{b_1 b_2 \ldots},\ \varepsilon^{\rho+4} p = D^{b_1 b_2 \ldots b_1' b_2' \ldots}_{B_1 B_2 \ldots B_1' B_2' \ldots}.$$

Da p von allen Variabeln abhängt, so müssen ihm $2\rho + 4$ Indices gegeben werden; die übrigen Indices wurden ihm der Symmetrie wegen beigefügt. Die v sind Constanten, deren Werth im Allgemeinen von den Indices abhängt; die w sind Functionen der Zeit. Das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche dann an die Stelle der Gleichung 64) treten, ist dann folgendes:

$$v_{b_1 b_2 \ldots} \frac{dw_{b_1 b_2 \ldots}}{dt} = \Sigma D^{b_1 b_2 \ldots b_1' b_2' \ldots}_{B_1 B_2 \ldots B_1' B_2' \ldots} \left[w_{B_1 B_2 \ldots} w_{B_1' B_2' \ldots} - w_{b_1 b_2 \ldots} w_{b_1' b_2' \ldots} \right]. \quad 70)$$

Die Summation ist über alle möglichen Werthe der $b_1' b_2' \ldots B_1 B_2 \ldots$ zu erstrecken. In der Gleichung 70) selbst können $b_1 b_2 \ldots b_\rho$ die verschiedensten Werthe haben; sie repräsentirt uns daher ein System vieler Differentialgleichungen. Die Gleichung 59) lautet in unserer gegenwärtigen Bezeichnungsweise

$$D^{b_1 b_2 \ldots b_1' b_2' \ldots}_{B_1 B_2 \ldots B_1' B_2' \ldots} = D^{b_1' b_2' \ldots b_1 b_2 \ldots}_{B_1' B_2' \ldots B_1 B_2 \ldots} = D^{B_1 B_2 \ldots B_1' B_2' \ldots}_{b_1 b_2 \ldots b_1' b_2' \ldots}$$

und man findet aus derselben und dem Gleichungssystem 70) leicht, dass der Differentialquotient von

$$\sum r_{b_1 b_2 ..} w_{b_1 b_2 ..} \log w_{b_1 b_2 ..}$$

niemals positiv sein kann. Die Summation in diesem letzten Ausdrucke ist über alle möglichen Werthe von $b_1 b_2 \ldots b'_\rho$ zu erstrecken. Diese Grösse nimmt also beständig ab, bis

$$w_{b_1 b_2 \ldots} w_{b_1' b_2' \ldots} = w_{B_1 B_2 \ldots} w_{B_1' B_2' \ldots}$$

ist für alle möglichen Werthe von $b_1 b_2 .. b'_\rho$ und für alle mit diesen vereinbaren Werthe von $B_1 B_2 B'_1 B'_2$. Denn D kann für keine Gruppe von Indices, der mögliche Zustände der Moleküle entsprechen, gleich Null werden. Es müsste ja sonst ein Zusammenstoss die Wahrscheinlichkeit Null haben. Die durch die Gleichung 63) gegebene Grösse E können wir noch etwas anders schreiben. Wir sahen, dass

$$f(t\, a_1 a_2 ..) da_1 da_2 .. da_\rho \frac{s dx}{\int s dx} = \varphi(t\, a_1 a_2 .. a_\rho)\, da_1 da_2 .. da_\rho . s dx$$

zur Zeit t die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit ist, für welche die Bedingungen B) und D) erfüllt sind. Führen wir statt der Differentiale von $a_1 a_2 \ldots a_\rho$ die von $\xi_1 \eta_1 \ldots \zeta_{r-1} u_1 v_2 .. w_r$ ein, so geht dieser Ausdruck über in

$$\varphi(t\, a_1 a_2 .. a_\rho)\, d\xi_1 d\eta_1 .. d\zeta_{r-1} du_1 .. dw_r.$$

Denken wir uns jetzt wieder $a_1 a_2 \ldots a_\rho$ durch $\xi_1 \eta_1 \ldots w_r$ ausgedrückt, so wird φ eine Function der letzten Variabeln. Es gehe $\varphi(t\, a_1 a_2 .. a_\rho)$ in $F(t, \xi_1, \eta_2 .. w_r)$ über, so dass also

$$F . d\xi_1 d\eta_1 . , . d\zeta_{r-1} du_1 \ldots dw_r$$

die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit ist, für welche

ξ_1 zwischen ξ_1 und $\xi_1 + d\xi \ldots w_r$ zwischen w_r und $w_r + dw_r$

liegt. Den Ausdruck für E können wir dann schreiben

$$E = \iint \ldots F \log F s dx\, da_1 da_2 \ldots da_\rho,$$

oder wenn wir auch die Differentiale von $\xi_1, \eta_1 \ldots w_r$ einführen

$$E = \int\int \ldots F \log F d\xi_1 d\eta_1 \ldots d\zeta_{r-1} du_1 \ldots dw_r. \qquad 71)$$

Ich bemerke noch, dass die Rechnung in derselben Weise geführt werden kann, wenn im Raume R mehrere Gattungen von Molekülen vorhanden sind. Bezeichnen wir die entsprechenden Grössen für die zweite Gattung von Molekülen durch Beifügung eines Sternes u. s. w., so kann dann die Grösse

$$E = \int\int \ldots F \log F d\xi_1 d\eta_1 \ldots dw_r + \int\int \ldots F^* \log F^* d\xi_1^* d\eta_1^* \ldots dw_r^* +$$

u. s. w. niemals zunehmen.

V. Die Moleküle machen von einem Zusammenstosse bis zum nächsten nicht sehr viele Schwingungen.

Im vorigen Abschnitte machte ich die Annahme, dass jedes Molekül von einem Zusammenstosse bis zum nächsten sehr viele Schwingungen macht. Es lässt sich jedoch auch, wenn dies nicht der Fall ist, mit Leichtigkeit beweisen, dass die durch die Gleichung 71) definirte Grösse E nicht zunehmen kann. Es ist ist hier bequemer, wenn wir die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, für welche zur Zeit t die Variabeln $\xi_1, \eta_1 \ldots w_r$ zwischen den Grenzen

$$\xi_1 \text{ und } \xi_1 + d\xi_1 \ \ldots \ w_r \text{ und } w_r + dw_r \qquad L)$$

liegen, mit $f(t, \xi_1, \eta_1 \ldots w_r) d\xi_1 d\eta_1 \ldots dw_r$ bezeichnen; f sei also jetzt dieselbe Function, welche im vorigen Abschnitte F hiess. Es kann zunächst bewiesen werden, dass die Grösse E durch die innere Bewegung der Atome in den Molekülen nicht verändert wird, dass sie also constant bliebe, wenn die Moleküle nicht unter einander zusammenstiessen. Es wären dann die Variabeln $\xi_1, \eta_1 \ldots w_r$ durch die Differentialgleichungen bestimmt, welche wir die Bewegungsgleichungen eines Moleküls genannt haben. In Folge dieser Gleichungen sollen zur Zeit $t + \delta t$ die Variabeln für diese und nur diese Moleküle, für die sie zur Zeit t zwischen den Grenzen L) lagen, zwischen folgenden Grenzen liegen:

$$\xi_1' \text{ und } \xi_1' + d\xi_1' \ \ldots \ w_r' \text{ und } w_r' + dw_r'. \qquad M)$$

Ich habe bereits in der Abhandlung über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen gezeigt, dass man dann hat

$$d\xi_1' d\eta_1' \ldots dw_r' = d\xi_1 d\eta_1 \ldots dw_r\ ^1.$$

Fänden keine Zusammenstösse statt, so lägen zur Zeit $t+\delta t$ genau für jene Moleküle die Variabeln zwischen den Grenzen M), für welche sie zur Zeit t zwischen den Grenzen L) lagen. Die Zahl der ersteren und letzteren Moleküle wäre daher gleich, weil beides ganz dieselben Moleküle wären. Nun ist aber die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit, für welche zur Zeit $t+\delta t$ die Variabeln zwischen den Grenzen M) liegen

$$f(t+\delta t,\ \xi_1' \ldots w_r') d\xi_1' \ldots dw_r';$$

die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit aber, für welche zur Zeit t die Variabeln zwischen den Grenzen L) liegen, ist

$$f(t, \xi_1 \ldots w_r) d\xi_1 \ldots dw_r.$$

Es wäre also

$$f(t+\delta t, \xi_1' \ldots w_r') d\xi_1' \ldots dw_r' = f(t, \xi_1 \ldots w_r) d\xi_1 \ldots dw_r.$$

(Wir setzen hier wieder voraus, dass die Zustandsvertheilung eine gleichförmige an allen Stellen des Gases sei.) Mit Rücksicht auf die Gleichung 72) erhalten wir

$$f(t+\delta t, \xi_1' \ldots w_r') = f(t, \xi_1 \ldots w_r),$$

also auch

$$f' \log f' d\xi_1' d\eta_1' \ldots dw_r' = f \log f d\xi_1 \ldots dw_r, \qquad 73)$$

wenn wir f für $f(t\, \xi_1 \ldots w_r)$; f' für $f(t+\delta t, \xi_1' \ldots w_r')$ schreiben. Da die Gleichung 73) für jedes System von Differentialen besteht, so erhalten wir auch gleiche Ausdrücke, wenn wir beiderseits

---

[1] Wenn man mit endlichen Grössen rechnen will, lautet diese Gleichung

$$\lim \frac{d\xi_1' d\eta_1' \ldots dw_r'}{\delta t\, d\xi_1 d\eta_1 \ldots dw_r} = 1.$$

über alle möglichen Werthe der Variabeln integriren. Es ist also

$$\int\int \ldots f' \log f' d\xi_1' \ldots dw_r' = \int\int \ldots f \log f d\xi_1 \ldots dw_r,$$

wobei beiderseits über alle möglichen Werthe der Variabeln zu integriren ist, weshalb es gleichgiltig ist, wie die Integrationsvariabeln bezeichnet werden. Man könnte daher auch schreiben:

$$\int\int \ldots f(t+\delta t, \xi_1 \ldots w_r) \log f(t+\delta t, \xi_1 \ldots w_r)\, d\xi_1 \ldots dw_r = \int\int \ldots f \log f d\xi_1 \ldots dw_r.$$

Hier ist die Grösse rechts der Werth des E zur Zeit $t+\delta t$, die links der Werth des E zur Zeit t. Beide sind also gleich. Die Grösse E würde also ihren Werth gar nicht ändern, wenn sich die Atome der Moleküle ihren Bewegungsgleichungen gemäss bewegten, ohne dass die Moleküle unter einander zusammenstiessen. Es handelt sich noch darum, zu finden, um wie viel sich die Grösse E in Folge der Zusammenstösse verändert. Wenn dann δt sehr klein genommen wird, so ist die Gesammtveränderung der Grösse E die Summe der Einzelveränderungen. Bezeichnen wir den Zuwachs, welchen E durch die Zusammenstösse erfährt, mit δE, so ist zunächst

$$\delta E = \int\int \ldots \log f \delta f d\xi_1 \ldots dw_r, \qquad 74)$$

wobei δf der Zuwachs ist, den f während der Zeit δt durch die Zusammenstösse erfährt, so dass die Zahl (δN) der Moleküle, welche während der Zeit δt in der Volumeinheit den Zustand L) durch die Zusammenstösse gewinnen, um $\delta f d\xi_1 d\eta_1 \ldots dw_r$ grösser ist, als die Zahl (δn) der Moleküle, welche während derselben Zeit durch die Zusammenstösse diesen Zustand verlieren, dass also

$$\delta N - \delta n = \delta f d\xi_1 d\eta_1 \ldots dw_r \qquad 75)$$

ist. Ein Molekül hat den Zustand L), ist dabei ein abgekürzter Ausdruck statt des längeren: Die den Zustand bestimmenden Variabeln $\xi_1 \eta_1 \ldots w_r$ liegen für dieses Molekül zwischen den Grenzen L). Ich nehme wieder an, der Zusammenstoss zweier

Moleküle beginne, wenn die Schwerpunkte derselben in die Distanz l gelangen. Der Winkel zwischen der Verbindungslinie beider Schwerpunkte und der x-Axe heisse wieder ϑ, der zwischen der xy-Ebene und einer parallel jener Verbindungslinie durch die x-Axe gelegten Ebene ω. Dann ist die Zahl der Zusammenstösse in der Volumeinheit während der Zeit δt, für welche im Momente des Beginnes die Variabeln ϑ und ω

$$\text{zwischen } \vartheta \text{ und } \vartheta + d\vartheta, \ \omega \text{ und } \omega + d\omega, \qquad \text{N)}$$

ferner die Variabeln $\xi_1 \eta_1 \ldots w_r$ für das eine stossende Molekül zwischen den Grenzen L), für das andere aber zwischen irgend welchen anderen Grenzen z. B.

$$\xi_1' \text{ und } \xi_1' + d\xi_1' \ \ldots \ w_r' \text{ und } w_r' + dw_r' \qquad \text{P)}$$

liegen,

$$f d\xi_1 \ldots dw_r f' \, d\xi_1' \ldots dw_r' g l^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\omega \, \delta t,$$

wobei g die relative Geschwindigkeit der Schwerpunkte der Moleküle ist. Für alle diese und nur diese Moleküle sollen im Momente des Endes des Stosses ϑ und ω zwischen den Grenzen

$$\Theta \text{ und } \Theta + d\Theta, \ \Omega \text{ und } \Omega + d\Omega, \qquad \text{N*)}$$

ferner die Variabeln $\xi_1, \eta_1 \ldots w_r$ für das erste Molekül zwischen den Grenzen

$$\Xi_1 \text{ und } \Xi_1 + d\Xi_1 \ \ldots \ W_r \text{ und } W_r + dW_r, \qquad \text{L*)}$$

für das andere aber zwischen den Grenzen

$$\Xi_1' \text{ und } \Xi_1' + d\Xi_1' \ \ldots \ W_r' \text{ und } W_r' + dW_r' \qquad \text{P*)}$$

liegen. Durch jeden dieser Zusammenstösse verliert ein Molekül den Zustand L). Im Ganzen verlieren daher in der Volumeinheit während der Zeit δt

$$\delta n = f d\xi_1 \ldots dw_r \delta t \int\int \ldots f' \, d\xi_1' \ldots dw_r' g l^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\omega$$

Moleküle den Zustand L), wobei wieder die Integrationen über alle möglichen Werthe der Differentiale zu erstrecken sind. Die Anzahl der Zusammenstösse, welche während der Zeit δt in der

Volumeinheit so geschehen, dass im Momente ihres Beginnes die Variabeln zwischen den Grenzen L*), N*) und P*) liegen, ist

$$\delta\nu = F d\Xi_1 \ldots dW_r F' d\Xi_1' \ldots dW_r' G l^2 \sin\Theta \, d\Theta \, d\Omega \, \delta t. \qquad 76)$$

Für alle diese Zusammenstösse liegen die Variabeln im Momente des Endes zwischen den Grenzen L), N) und P), weil diese Zusammenstösse gerade umgekehrt wie die früher betrachteten verlaufen [1]. Da die Variabeln

$$\Xi_1 \ldots W_r, \ \Xi_1' \ldots W_r', \ \Theta, \ \Omega \qquad R)$$

Functionen von

$$\xi_1 \ldots w_r, \ \xi_1' \ldots w_r', \ \vartheta, \ \omega \qquad Q)$$

sind, so kann man in den Ausdruck 76) statt der ersteren auch die letztern Variabeln einführen. Es wird dann

$$G \sin\Theta d\Xi_1 \ldots dW_r' d\Theta d\Omega = g \sin\vartheta d\xi_1 \ldots dw_r' d\vartheta d\omega,$$

wie aus dem allgemeinen Theoreme folgt, das ich im 2. Abschnitte meiner Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen" bewiesen habe. In Folge dessen wird

$$\delta\nu = F F' d\xi_1 \ldots dw_r' \sin\vartheta \, g l^2 d\vartheta \, d\omega \, \delta t. \qquad 77)$$

Im Obigen wurde F, F', f' für $f(t, \Xi_1 \ldots W)$, $f(t, \Xi_1' \ldots W_r')$, $f(t, \xi_1' \ldots w_r')$ geschrieben. G ist die Grösse, die man erhält, wenn man in g die Variabeln Q) mit den Variabeln R) vertauscht. Im Ausdrucke 77) hat man sich überall die Variabeln R) als Functionen der Variabeln Q) ausgedrückt zu denken. Integriren wir denselben bezüglich $\xi_1' \ldots w_r'$, ϑ, ω über alle möglichen Werthe, so erhalten wir die Zahl aller Moleküle, welche in der Volumeinheit während der Zeiteinheit durch die Zusammenstösse den

[1] Natürlich sind beim Vergleich des Endzustandes eines Zusammenstosses mit dem Anfangszustande eines anderen die Plätze der Schwerpunkte beider Moleküle zu vertauschen, weil sich dieselben zu Anfang gegen einander, zu Ende aber von einander bewegen.

Zustand L) gewinnen, also die Zahl, die schon früher mit ∂N bezeichnet wurde. Es ist also

$$\partial N = d\xi_1 \ldots dw_r \, \partial t \int\int \ldots FF' g l^2 \sin \vartheta \, d\xi_1' \ldots dw_r' \, d\vartheta \, d\omega.$$

Setzen wir diese Werthe für ∂n und ∂N in die Gleichung 75) ein, so erhalten wir

$$\partial f = \partial t \int\int \ldots (FF' - ff') g l^2 \sin \vartheta \, d\xi_1' \ldots dw_r' \, d\vartheta \, d\omega,$$

und wenn wir dies in die Gleichung 74) substituiren,

$$\partial E = \partial t \int\int \ldots \log f (FF' - ff') g l^2 \sin \vartheta \, d\xi_1 \ldots dw_r \, d\xi' \ldots dw_r' \, d\vartheta \, d\omega.$$

Die Verwechslung des ersten und zweiten der zusammenstossenden Moleküle liefert, wie früher

$$\partial E = \partial t \int\int \ldots \log f' (FF' - ff') g l^2 \sin \vartheta \, d\xi_1 \ldots dw_r \, d\xi_1' \ldots dw_r' \, d\vartheta \, d\omega.$$

Führen wir in den beiden letzten Gleichungen statt der Integrationsvariabeln Q) die Variabeln R) ein, was immer möglich ist, da man in einem bestimmten Integrale statt der Integrationsvariabeln beliebige Functionen derselben einführen kann, und vertauschen dann die grossen und kleinen Buchstaben, was wieder erlaubt ist, da man in einem bestimmten Integrale die Variabeln bezeichnen kann wie man will, so erhält man die beiden Gleichungen

$$\partial E = -\partial t \int\int \ldots \log F (FF' - ff') g l^2 \sin \vartheta \, d\xi_1 \ldots dw_r' \, d\vartheta \, d\omega$$

$$\partial E = -\partial t \int\int \ldots \log F' (FF' - ff') g l^2 \sin \vartheta \, d\xi_1 \ldots dw_r \, d\vartheta \, d\omega.$$

(Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Variabeln R) dieselben Functionen der Q), wie umgekehrt die Q) von den R) sind.) Die Addition aller dieser vier Gleichungen aber liefert

$$\partial E = \frac{1}{4} \partial t \int\int \ldots \log \left(\frac{ff'}{FF'} \right) . (FF' - ff') g l^2 \sin \vartheta \, d\xi_1 \ldots dw_r \, d\vartheta \, d\omega,$$

woraus wieder ersichtlich ist, dass die Grösse E durch die Zusammenstösse nur abnehmen kann, und da sie durch die Bewegung der Atome in den Molekülen nicht verändert wird, so folgt, dass sie auch im Ganzen nur abnehmen kann.

Wenn die Zustandsvertheilung zu Anfang der Zeit keine gleichförmige war, so enthält die Function f auch die Coordinaten x, y, z derjenigen Stelle des Gases, für welche sie die Geschwindigkeitsvertheilung darstellt. Alsdann tritt an die Stelle von E ein etwas allgemeinerer Ausdruck. Wenn

$$f(t, x, y, z, \xi_1, \eta_1 \ldots w_r)\, dx\, dy\, dz\, d\xi_1 \ldots dw_r$$

die Zahl der Moleküle ist, welche sich zur Zeit t im Volumelemente $dx\,dy\,dz$ mit den Coordinaten x, y, z befinden, und für welche die den Zustand bestimmenden Variabeln zwischen den Grenzen L) liegen, so kann die Grösse

$$E = \int\int \ldots f \log f . dx\, dy\, dz\, d\xi_1 \ldots dw_r \tag{78)}$$

nicht zunehmen. Um hiefür den Beweis zu liefern, wollen wir das Problem noch etwas allgemeiner auffassen. Gesetzt, wir hätten sehr viele Systeme materieller Punkte (Moleküle). Jedes derselben bestehe aus r materiellen Punkten $m_1 m_2 \ldots m_r$ (die m sollen zugleich die Massen derselben sein). Die Masse m_1 sei für alle Systeme gleich; ebenso die Masse m_2 u. s. w. x_1, y_1, z_1 seien die Coordinaten, u_1, v_1, w_1 die Geschwindigkeitscomponenten von m_1. Analoge Bedeutung haben $x_2 y_2 \ldots$; und zwar ist es gleichgiltig, ob der Coordinatenanfangspunkt für die verschiedenen Systeme derselbe oder verschieden ist. Die Kräfte, welche auf irgend einen der materiellen Punkte wirken, seien solche Functionen der Coordinaten $x_1 y_1 z_1 x_2 \ldots z_r$, dass eine Kraftfunction existirt, und zwar sei diese Kraftfunction für alle Systeme dieselbe Function von $x_1 y_1 \ldots z_r$. Bezeichnen wir dann wieder mit $f(t x_1 y_1 z_1 \ldots w_r) dx_1 dy_1 \ldots dw_r$ die Anzahl der Systeme, für welche die Variabeln $x_1 y_1 z_1 x_2 \ldots z_r u_1 \ldots w_r$ zwischen den Grenzen

$$x_1 \text{ und } x_1 + dx_1 \ldots w_r \text{ und } w_r + dw_r \tag{S)}$$

liegen und setzen

$$E = \int\int \ldots f \log f dx_1 dy_1 \ldots dw_r, \tag{79)}$$

so kann genau wie früher bewiesen werden, dass sich die Grösse E durch die Bewegung der materiellen Punkte der

Systeme nicht ändert, so lange zwischen denselben nur die inneren Kräfte des betreffenden Systems thätig sind. Es soll nun auch zwischen den materiellen Punkten verschiedener Systeme Wechselwirkung stattfinden, und zwar soll die zwischen je zwei Punkten thätige Kraft Function ihrer Entfernung sein und in der Richtung ihrer Verbindungslinie wirken. Die Bedingungen, wann die Wechselwirkung zweier verschiedener Systeme beginnt, sollen so sein, dass niemals (oder doch nur höchst selten) drei Systeme gleichzeitig in Wechselwirkung kommen. Sonst aber können sie beliebig sein. (Es kann, um ein Beispiel zu geben, die Wechselwirkung zweier Systeme eintreten, so oft ein materieller Punkt des einen irgend einem des andern ungewöhnlich nahe kommt.) Die Anzahl der Paare von Systemen, welche während der Zeit δt so in Wechselwirkung kommen, dass im Momente des Beginnes der Wechselwirkung die den Zustand bestimmenden Variabeln für das eine System zwischen den Grenzen S), für das andere aber zwischen den Grenzen

$$x_1' \text{ und } x_1'+dx_1' \; . \; . \; . \; w_r' \text{ und } w_r'+dw_r'$$

liegen, ist dann wieder

$$f(t, x_1 \ldots w_r)\, f(t, z_1' \ldots w_r')\, dx_1 \ldots dw_r\, dx_1' \ldots dw_r'\, \delta t \,.\, \varphi. \qquad 80)$$

φ ist eine Function der relativen Lage und der Geschwindigkeiten der Atome beider Systeme. Berücksichtigt man, dass diese Function wieder die allgemeine durch die Gleichung 19) meiner Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht mehratomiger Gasmoleküle“ ausgedrückte Eigenschaft besitzen muss, so kann man ganz wie früher beweisen, dass die Grösse E durch die Wechselwirkung der verschiedenen Systeme nur abnehmen kann. Der Beweis kann auch geführt werden, wenn nicht alle Systeme gleich beschaffen sind, sondern wenn sie zwei oder mehreren Gattungen angehören, aber von jeder Gattung sehr viele Individuen vorhanden sind. (Man übersieht sofort, dass ein Gemisch von Gasmolekülen mit ungleichförmiger Geschwindigkeitsvertheilung nur ein specieller Fall hievon ist.) Wenn die Kraftfunction den Werth gz hat, findet man für einatomige Gasmoleküle $f = Ae^{-h\left(gz+\frac{mc^2}{2}\right)}$. Die bekannten Formeln für das

barometrische Höhenmesser, sowie alle aerostatischen erweisen sich also ebenfalls als specielle Fälle der Formeln für das Wärmegleichgewicht.

VI. Auflösung der Gleichung 81) und Berechnung der Entropie.

Wir haben bewiesen, dass für mehratomige Gasmoleküle im Falle des Gleichgewichts der lebendigen Kraft der Ausdruck 69) verschwinden muss, dass also für dasselbe

$$\varphi(a_1, a_2 \ldots)\,\varphi(a'_1, a'_2 \ldots) - \varphi(A_1 A_2 \ldots)\,\varphi(A'_1 A'_2 \ldots) = 0 \qquad 81)$$

sein muss für alle möglichen Werthe der Variabeln

$$a_1 a_2 \ldots a'_1 a'_2 \ldots A_1 A_2 \ldots A'_1 A'_2 \ldots A'_\rho \qquad 82)$$

Es handelt sich noch darum, eine Function φ zu finden, welche diese Gleichung erfüllt. Es ist klar, dass, wenn λ die gesammte in einem Moleküle enthaltene lebendige Kraft und Arbeit, A und h Constanten sind, der Werth $\varphi = Ae^{-h\lambda}$ nothwendig die Gleichung 81) erfüllt. Es ist dies die Lösung des Problems, welche ich schon in der Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht mehratomiger Gasmoleküle" fand. Allein es wäre noch der Beweis zu liefern, dass dies die einzig mögliche Lösung der Gleichung 81) ist. Während dieser Beweis für einatomige Gasmoleküle der allerleichteste Schritt ist, so ist er hier unstreitig der schwierigste, da es hier nicht möglich ist, die verschiedenen Gleichungen, welche die Werthe der Variabeln vor und nach dem Stosse mit einander verbinden, wirklich allgemein anzugeben. Doch lässt sich wenigstens für zweiatomige Moleküle unter Voraussetzung einer bestimmten Art der Wechselwirkung der Moleküle während des Zusammenstosses beweisen, dass es die einzig mögliche Lösung ist. Nehmen wir an, jedes Molekül bestehe aus zwei Atomen. r sei ihre Distanz, $\frac{m}{2}\chi'(r)$ die Kraft, mit der sie sich anziehen, wenn das Molekül mit keinem anderen im Zusammenstosse begriffen ist, so dass

$\frac{m}{2}\chi(r)$ die Kraftfunction ist. Damit die Formeln nicht zu weitläufig werden, nehme ich an, dass alle Atome gleiche Massen haben (der allgemeinere Fall kann dann sofort in ganz analoger Weise berechnet werden). Die Summe des Werthes der Kraftfunction und der lebendigen Kraft beider Atome eines Moleküls bleibt von einem Zusammenstosse bis zum nächsten constant. Bezeichnen wir die Grösse, welche man erhält, wenn man diese Summe mit der halben Masse eines Atoms dividirt, mit a, das vierfache Geschwindigkeitsquadrat des Schwerpunktes des Moleküles mit b, und den vierfachen Flächenraum, den der vom Schwerpunkte zu einem Atome gezogene Radiusvector in der Zeiteinheit zurücklegt, mit c, so sind a, b, c die einzigen die Natur der Atombahn bestimmenden Integrationsconstanten. Die übrigen bestimmen blos deren Lage im Raume. Man kann durch die Verbindungslinie der beiden Moleküle eine Ebene so legen, dass die Geschwindigkeitscomponente w senkrecht zu dieser Ebene für beide Atome gleich ist. Diese Ebene soll die Bahnebene heissen. α sei ihr Winkel mit irgend einer fixen Ebene, β der Winkel zwischen ihrer Durchschnittslinie mit der fixen Ebene und einer in der fixen Ebene gezogenen fixen Geraden. γ sei der Winkel, welchen diejenige Geschwindigkeitscomponente des Schwerpunktes des Moleküls, welche parallel der Bahnebene ist, δ der Winkel, welchen die Apsidenlinie der Bahncurve der Atome bei ihrer Bewegung um den Schwerpunkt mit der Durchschnittslinie der Bahnebene und der fixen Ebene einschliessen. Das Gas sei nach allen Richtungen gleich beschaffen; von einem Zusammenstosse eines Moleküls bis zum nächsten sollen sehr viele Maxima und Minima der Entfernung seiner Atome (Apsidenstellungen) eintreten. Endlich soll der Winkel zweier sich folgender Apsidenlinien in keinem rationalen Verhältnisse zu π stehen (mit Ausnahme unendlich weniger specieller Bahnformen). Dann sind a, b, c, w, α, β, γ, δ die im vorigen Abschnitte mit $a_1\, a_2 \ldots a_\rho$ bezeichneten Integrationsconstanten, r ist gleich 2, $\rho = 6r - 4 = 8$, die Grösse $\varphi(a_1, a_2 \ldots a_\rho)\, da_1 \ldots da_\rho$ muss dann die Form

$$\varphi(a, b, c, w) \sin\alpha\, da\, db\, dc\, dw\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\delta$$

haben. In Folge der Gleichberechtigung aller Richtungen im Raume kann φ die Winkel α, β, γ nicht enthalten. In Folge unserer Annahme über die Apsidenlinien sind auch alle Werthe des δ gleichberechtigt. Wir wollen jetzt blos solche Zusammenstösse der Betrachtung unterziehen, bei denen w und die Bahnebene für beide zusammenstossende Moleküle identisch sind. Die Gleichung 81) muss für alle Zusammenstösse, also auch für diese gelten. Nun wird aber α durch die Zusammenstösse nicht verändert, die Gleichung 81) verwandelt sich daher in

$$\varphi(a, b, c, w) . \varphi(a', b', c', w') = \varphi(A, B, C, w) . \varphi(A', B', C', w') \qquad 83)$$

Wir wollen noch eine specielle Annahme über die Wechselwirkung zweier Moleküle während des Zusammenstosses machen. Der Stoss zweier Moleküle soll darin bestehen, dass ein Atom des einen Moleküls sich mit einem des andern wie elastische Kugeln stösst. (Wir bezeichnen die zusammenstossenden Atome als die ersten der betreffenden Moleküle.) Legen wir jetzt parallel der Verbindungslinie der Centra der stossenden Atome im Momente des Stosses eine fixe x-Axe (jene Verbindungslinie soll in die Bahnebene fallen) und senkrecht darauf aber parallel der Bahnebene eine fixe y-Axe. Im Momente des Beginnes des Zusammenstosses seien u, v die Geschwindigkeitscomponenten des ersten Atoms des ersten der beiden stossenden Moleküle in der Richtung dieser beiden Coordinatenaxen; ξ, η die Coordinaten desselben bezüglich eines Systems, das seinen Ursprung im Schwerpunkte des Moleküls hat, und dessen Axen parallel unseren fixen sind. u_1, v_1 seien die Geschwindigkeitscomponenten des zweiten Atoms des ersten Moleküls. Die Bezeichnung der auf das andere Molekül und auf den Moment des Endes des Zusammenstosses bezüglichen Grössen leiten wir hieraus in der immer gebrauchten Weise ab. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} a &= u^2+v^2+u_1^2+v_1^2+2w^2+\chi \\ b &= (u+u_1)^2+(v+v_1)^2+4w^2 \\ a' &= u'^2+v'^2+u_1'^2+v_1'^2+2w'^2+\chi' \\ b' &= (u'+u_1')^2+(v'+v_1')^2+4w'^2 \end{aligned}\right\} \qquad 84)$$

Durch den Zusammenstoss kehren sich blos die x-Componenten der Geschwindigkeit der stossenden Atome um; es ist also $U=u'$, $U'=u$; alle anderen grossen Buchstaben haben denselben Werth wie die entsprechenden kleinen. Es ist also

$$\begin{aligned} A &= u'^2+v^2+u_1^2+v_1^2+2w+\chi \\ B &= (u'+u_1)^2+(v+v_1)^2+4w^2 \\ A' &= u^2+v'^2+u_1'^2+v_1'^2+2w'^2+\chi' \\ B' &= (u+u_1')^2+(v'+v_1')^2+4w'^2 \end{aligned} \tag{85}$$

Wir wollen nun zeigen, dass, wenn beliebige Werthe der Grössen

$$a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c',\ w,\ w' \tag{86}$$

gegeben sind, diejenigen von den den Zustand des Systems im Momente des Beginnes des Zusammenstosses definirenden Grössen u, v, ξ . . . , welche hiedurch noch nicht bestimmt sind, immer so gewählt werden können, dass gegebene Werthe von

$$A,\ B,\ C,\ A',\ B',\ C' \tag{87}$$

nach dem Stosse zum Vorschein kommen, wenn nur die Grössen 86) und 87) die einzige Bedingung

$$a+a'=A+A', \tag{88}$$

also die Gleichung der lebendigen Kraft erfüllen, dass also zwischen den Grössen 86) und 87) keine andere als diese Gleichung besteht.

Setzen wir zur Abkürzung

$$b-a-B+A=g,\ b'-a'-B'+A'=g',$$

so sind g und g' ebenfalls gegebene Grössen.

Wir finden

$$g=2u_1(u-u'),\ g'=2u_1'(u'-u),$$

daraus

$$u' = u - \frac{g}{2u_1}, \quad u_1' = -\frac{g'}{g} u_1 \tag{89}$$

und folglich

$$\begin{aligned} b - B &= (u + u_1)^2 - (u - \frac{g}{2u_1} + u_1)^2 \\ b' - B' &= (u - \frac{g}{2u_1} - \frac{g'}{g} u_1)^2 - (u - \frac{g'}{g} u_1)^2. \end{aligned} \tag{90}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$b - B + b' - B' = g + g',$$

also die Gleichung der lebendigen Kraft. Diese muss erfüllt sein. Man kann dann u_1 willkürlich wählen. Die andere Gleichung 90) bestimmt u quadratisch, die Gleichungen 89) aber bestimmen u' und u_1'. Die Gleichungen 89) und 90) aber ersetzen vier der Gleichungen 84) und 85) vollkommen. Es bleiben noch die vier anderen übrig. Dazu kommen aber die Gleichungen für die c. Sie lauten:

$$\begin{aligned} c &= \xi(v - v_1) - \eta(u - u_1), \quad c' = \xi'(v' - v_1') - \eta'(u' - u_1') \\ C &= \xi(v - v_1) - \eta(u' - u_1), \quad C' = \xi'(v' - v_1') - \eta'(u - u_1'), \end{aligned} \tag{91}$$

woraus folgt

$$\eta = \frac{c - C}{u' - u}, \quad \eta' = -\frac{c' - C'}{u' - u},$$

was wieder zwei der Gleichungen 91) ersetzt, und η und η' bestimmt. Es bleiben noch vier der Gleichungen 84) und 85) und zwei der Gleichungen 91) zu erfüllen, also z. B.

$$\begin{aligned} v^2 + v_1^2 &= a - u^2 - u_1^2 - 2w^2 - \chi \\ (v + v_1)^2 &= b - (u + u_1)^2 - 4w^2 \\ v - v_1 &= \frac{1}{\xi}[c + \eta(u - u_1)] \end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned} v'^2+v_1'^2 &= a'-u'^2-u_1'^2-2w'^2-\chi' \\ (v'+v_1')^2 &= b'-(u'+u_1')^2-4w'^2 \\ v'-v^1 &= \frac{1}{\xi'}[c'+\eta(u-u_1)] \end{aligned} \qquad 93)$$

in welchen Gleichungen auch die u und η als gegeben zu betrachten sind, weil wir sie durch gegebene Grössen ausdrückten. Elimirt man aus den Gleichungen 92) die v, so bleibt eine einzige Gleichung für ξ, welche dann auch die v zu bestimmen gestattet; ebenso bestimmt man aus den Gleichungen 93) ξ', v' und v_1'. Wenn also nun die Gleichung 88) erfüllt ist, so können wir jede der Variabeln ξ, η, u, v... gesondert durch die gegebenen Grössen

$$a,\ b,\ c,\ w,\ a',\ b',\ c',\ w',\ A,\ B,\ C,\ A',\ B',\ C \qquad \text{T)}$$

ausdrücken; zwischen den letzteren kann also nur die Gleichung 88) bestehen. Die Gleichung 85) muss also für alle Werthe der Variabeln T), welche die Gleichung 88) befriedigen, erfüllt sein. Es muss also φ die Form $Ae^{-h\lambda}$ haben. Dass auch w in φ nicht vorkommen darf, beweist man leicht aus den übrigen Zusammenstössen. Da schon bei den eben betrachteten Zusammenstössen u_1 völlig willkürlich war, und bei Betrachtung aller Zusammenstösse natürlich noch mehr willkürliche Grössen hineinkommen, so ist es nicht wahrscheinlich, dass für andere Wirkungsgesetze während des Zusammenstosses andere Lösungen möglich werden. Doch weiss ich vorläufig kein anderes Mittel des Beweises, als dass man jedes Wirkungsgesetz speciell behandelt.

Indem wir als sehr wahrscheinlich annehmen, dass für den Fall des Wärmegleichgewichts die Function φ immer die Form $Ae^{-h\lambda}$ haben muss, können wir jetzt die Grösse E für Körper berechnen, zwischen deren Atomen sich bereits das Wärmegleichgewicht hergestellt hat. Als den allgemein giltigen Werth für E (aus dem nicht gewisse, wegen der speciellen Natur des Problems constante Grössen weggelassen wurden) bezeichneten wir den Werth 79).

Würden wir denselben als Entropie bezeichnen, so hätte dies jedoch den Ubelstand, dass die Gesammtentropie zweier Körper durch eine Constante von der Summe der Entropie beider einzelnen verschieden wäre. Wir betrachten daher lieber folgenden, nur durch eine Constante vom Ausdrucke 79) verschiedenen:

$$E^* = \int\int \ldots f \log\left(\frac{f}{N}\right) dx_1 \ldots dw_r.$$

Hiebei ist N die gesammte Zahl der Moleküle des Gases, $f dx_1 \ldots dw_r$ die Zahl derjenigen, für welche $x_1, y_1 \ldots w_r$ zwischen den Grenzen

$$x_1 \text{ und } x_1 + dx_1 \ldots w_r \text{ und } w_r + dw_r \qquad \text{S)}$$

liegen. Setzen wir

$$dx_1 dy_1 \ldots dz_r = d\sigma, \; du_1 dv_1 \ldots dw_r = ds, \; \frac{f}{N} = f^*,$$

so hat f^* auch eine einfache Bedeutung. Es ist $f^* ds\, d\sigma$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül den Zustand S) hat (die Zeit, während der es ihn hat, dividirt durch die ganze Zeit, während der es sich bewegte).

Es wird dann

$$E^* = N \int\int f^* \log f^* \, ds\, d\sigma. \qquad 94)$$

Für einatomige Gase ist, wenn N die Gesammtzahl der Moleküle des Gases, V der von ihnen eingenommene Raum, m die Masse, T die mittlere lebendige Kraft eines Atoms ist,

$$f^* = \frac{1}{V\left(\frac{4\pi T}{3m}\right)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{3m}{4T}(u^2+v^2+w^2)},$$

daher

$$E^* = N \int\int \ldots f^* \log f^* \, dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw =$$

$$= -N \log\left[V\left(\frac{4\pi T}{3m}\right)^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{3}{2} N,$$

was, da m und N constant sind, bis auf einen constanten Factor und Addenden mit dem Ausdrucke für die Entropie einatomiger Gase übereinstimmt. Für Gase mit r-atomigen Molekülen ist

$$f^* = Ae^{-h\left(\chi + \Sigma \frac{mc^2}{2}\right)},$$

wobei χ die Kraftfunction, $\Sigma \frac{mc^2}{2}$ die gesammte lebendige Kraft eines Moleküls ist. Dabei ist wegen $\int\int f^* ds\, d\sigma = 1$

$$T = \frac{3}{2h}, \quad A = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{mh}\right)^{\frac{3r}{2}} \int e^{-h\chi}\, d\sigma}.$$

Man findet also

$$E^* = N \log A - hN \frac{\int \chi e^{-h\chi} d\sigma}{\int e^{-h\chi}\, d\sigma} - \frac{3}{2} rN. \qquad 95)$$

Um die Beziehung der Grösse E^* zum zweiten Hauptsatze in der Form $\int \frac{dQ}{T} < 0$ zu erkennen, wollen wir uns unter einem System von r materiellen Punkten, wie wir es bis jetzt betrachteten, nicht ein Gasmolekül, sondern einen ganzen Körper vorstellen. (Wir wollen ihn das System A nennen.) Mit ihm sei während einer gewissen Zeit ein zweites System (B) materieller Punkte, also ein zweiter Körper in Wechselwirkung. Die beiden Körper können von gleicher oder verschiedener Beschaffenheit sein. Theoretisch wird der Effect der Wechselwirkung nicht blos von der Art und Weise der Einwirkung, sondern auch von den Phasen abhängen, in denen sich beide Körper im Momente des Beginnes der Wechselwirkung befinden. Hievon ist nun erfahrungsmässig nichts zu merken, was zweifellos daher rührt, dass der Effect der Phase durch die grosse Anzahl der in Wechselwirkung tretenden Moleküle compensirt wird. (Eine ähnliche Ansicht hat bereits Clausius unlängst ausgesprochen.) Um den Effect der Phase zu eliminiren, wollen wir statt eines Systems A) sehr viele (N), gleichbeschaffene, aber in verschiedenen Phasen befindliche, betrachten, die übrigens unter einander in gar keiner Wechselwirkung stehen sollen. $f(t, x_1 .. w_r) ds\, d\sigma$ sei wieder

die Zahl der Systeme mit dem Zustande S, und wir setzen $\frac{f}{N}$ gleich f^*. Auch von der Gattung (B) seien sehr viele Systeme vorhanden. Eine der Function f analoge Bedeutung für dieselben habe die Function $f'(t x_1' \ldots w_r')$. Die Functionen f^* und f' können auch discontinuirlich sein, so dass sie nur, wenn die Variabeln sehr nahe gewissen durch eine oder mehrere Gleichungen verbundenen Werthen liegen, gross, sonst aber verschwindend sind. Als diese Gleichungen können diejenigen gewählt werden, die den äusseren sichtbaren Bewegungszustand des Körpers und die in ihm enthaltene lebendige Kraft charakterisiren, wobei zu beachten ist, dass lebendige Kraft sichtbarer Bewegung in ihrer Vertheilung an die Atome so weit von der schliesslich sich bildenden stationären Vertheilung abweicht, dass sie Unendliches in E^* liefert; weshalb sie auch beim zweiten Hauptsatze als Wärme von unendlicher Temperatur zählt. Auf jedes der Systeme A) soll eines der Systeme B) wirken, und zwar soll der Beginn der Wechselwirkung mit den verschiedensten Phasen zusammenfallen. Alle Effecte, welche nicht von der Phase abhängen, müssen dann gerade so ausfallen, als ob nur ein System A) auf ein System B) in einer beliebigen Phase wirkte, und wir wissen, dass die Wärmeerscheinungen in der That nicht von der Phase abhängen. Die Function f kann dabei, sofern sie nicht durch die gesammte lebendige Kraft oder sichtbare Bewegung der Körper bedingt ist, beliebig gewählt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein System A) mit dem Zustande S) mit einem Systeme B), dessen Zustand durch ganz analoge Bedingungen gegeben ist, in Wechselwirkung tritt, ist wieder durch einen der Formel 52) ganz analogen Ausdruck gegeben, woraus wie früher bewiesen werden kann, dass die Grösse E^* nur abnehmen kann. Nach lange fortgesetzter Wechselwirkung (für das Temperaturgleichgewicht) erlangt E^* sein Minimum, was eintritt, wenn allgemein $ff' = FF'$ ist. Wenn der Körper ruht, so ist die Lösung dieser Gleichung $f^* = Ae^{-h\left(\chi + \Sigma \frac{mc^2}{2}\right)}$, wobei $f^*\,ds\,d\sigma$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein System A) den Zustand S) hat. Die der Entropie aller N Systeme A) proportionale Grösse E ist wieder durch die Glei-

chung 95) gegeben. Die Entropie eines einzigen Systems A) ist daher dem Nte Theil davon, also der Grösse

$$E^* = \int\int f^* \log f^* \, ds \, d\sigma = \log A - h \frac{\int \chi e^{-h\chi} d\sigma}{\int e^{-h\chi} d\sigma} - \frac{3r}{2}, \qquad 96)$$

proportional, was bis auf einen constanten Factor und Addenden mit dem von mir schon in der Abhandlung „Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes aus den Sätzen über Wärmegleichgewicht" (s. dort Gleichung 18) gefundenen Ausdrucke übereinstimmt.

XXIII. SITZUNG VOM 24. OCTOBER 1872.

Herr Geheimrath Dr. Hermann Helmholtz zu Berlin dankt, mit Schreiben vom 16. October, für seine Wahl zum ausländischen Ehrenmitgliede der Classe.

Herr Prof. L. Gegenbauer in Krems übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Integralausdrücke für die Functionen Y_n^m."

Herr Dr. Peyritsch legt eine Abhandlung: „Über Pelorienbildungen" vor.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. Mai und Juni 1872. Berlin; 8°.

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrgang, Nr. 30. Wien, 1872; 8°.

Blanford, W. T., Observations on the Geology and Zoology of Abyssinia. Made during the Progress of the British Expedition to that Country in 1867—68. London, 1870; 8°.

California Academy of Sciences: Memoirs. Vol. I, Part 1. San Francisco, 1868; 4°. — Proceedings. Vol. III, Parts 1 & 5. (1863 & 1867.); Vol. IV, Parts 2—4. (1870 & 1871). San Francisco; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXV, Nr. 15. Paris, 1872; 4°.

Dudley Observatory: Annals. Vol. II. Albany, 1871; 8°.

Gesellschaft, Naturforschende, in Emden: LVII. Jahresbericht. 1871. Emden, 1872; 8°.

— allgemeine Schweizerische, für die gesammten Naturwissenschaften: Neue Denkschriften. Band XXIV. (Dritte Dekade. Bd. IV.) Zürich, 1871; 4°. — Verhandlungen. 54. Jahresversammlung. Jahresbericht 1871. Frauenfeld, 1872; 8°.

Gesellschaft, Physikal.-medicin., in Würzburg: Verhandlungen. N. F. III. Band, 1. & 2. Heft. Würzburg, 1872; 8⁰.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 42. Wien, 1872; 4⁰.

Göttingen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1869—1871. 4⁰ & 8⁰.

Henwood, William Jory, Observations on Metalliferous Deposits, and on Subterranean Temperature etc. Parts I & II. Penzance, 1871; 8⁰.

Isis: Sitzungsberichte. Jahrgang 1872, Nr. 1—3. Dresden; 8⁰.

Museum, The Geological, of Calcutta: Memoirs. *(Palaeontologia Indica.)* Ser. VI & VII. Calcutta, 1871; 4⁰. — Records. Vol. VI, Parts 3 & 4. (1871.) Calcutta; kl. 4⁰.

Nature. Nr. 155, Vol. VI. London, 1872; 4⁰.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1872, Nr. 13. Wien; 4⁰.

„Revue politique et littéraire" et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger". IIme Année. 2e série. Nr. 16. Paris & Bruxelles, 1872; 4⁰.

Societas, Regia, scientiarum Upsalensis: Nova acta. Seriei IIItiae, Vol, VIII, Fasc. I. 1871. Upsaliae; in 4⁰. — Bulletin météorologique mensuel de l'Observatoire de l'Université d'Upsal. Vol. I, Nrs. 1—12; Vol. II, Nrs. 7—12; Vol. III, Nrs. 1—12. Upsal, 1871; 4⁰.

Société Impériale des naturalistes de Moscou: Bulletin. Année 1872. Tome XLV, 1re Partie. Moscou, 1872; 8⁰.

— Linnéenne du Nord de la France: Mémoires: Années 1868 & 1869. Amiens, 1870; 8⁰. — Bulletin mensuel. Nrs. 1—4. Juillet—Octobre 1872. Amiens; 8⁰.

Society, The American Philosophical: Transactions. Vol. XIV. N. S. Part III. Philadelphia, 1871; 4⁰. — Proceedings, Vol. XII. 2. Nr. 87. Philadelphia, 1871; 8⁰.

— The Royal, of Edinburgh: Transactions. Vol. XXVI, Parts II—III. For the Session 1870—71. 4⁰. — Proceedings. Session 1870—71. Vol. VII, Nrs. 82—83; 8⁰.

Upsala, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1871/2. 4⁰ & 8⁰.

V e r e i n, naturhistorischer, der preuss. Rheinlande und Westphalens: Verhandlungen. XXVIII. Jahrgang. (Dritte Folge: 8. Jahrgang) I. & II. Hälfte. 1871; XXIX. Jahrgang. (Dritte Folge: 9. Jahrg.) I. Hälfte. 1872. Bonn; 8⁰.

— für Erdkunde zu Dresden: VIII. und IX. Jahresbericht. Dresden, 1872; 8⁰.

W i e n e r Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 42. Wien, 1872; 4⁰.

Integralausdrücke für die Functionen Y_n^m.

Von **Leopold Gegenbauer** in Krems.

Transformirt man die Differentialgleichung:

1.) $(1-x^2)y''-(m+1)xy'+n(n+m)y=0$

durch die Substitution:

2.) $2x=\xi+\xi^{-1}$,

3.) $2\sqrt{x^2-1}=\xi-\xi^{-1}$,

so verwandelt sie sich in:

4.) $\xi^2(1-\xi^2)y''-[(m+1)\xi^2+m-1]\xi y'-n(n+m)(1-\xi^2)y=0$.

Integrirt man diese Gleichung durch eine nach ξ absteigende Reihe:

5.) $y=\xi^r+\alpha_2\xi^{r-2}+\alpha_4\xi^{r-4}+\ldots$,

so liefern die bekannten Methoden die beiden particulären Integrale:

6.) $y_1=\xi^n.F\left(\frac{m}{2}, -n, -\frac{2n+m-2}{2}, \xi^{-2}\right)$,

7.) $y_2=\xi^{-(n+m)}.F\left(\frac{m}{2}, n+m, \frac{2n+m+2}{2}, \xi^{-2}\right)$,

wo mit F die hypergeometrische Reihe bezeichnet wird. Da bei einer Entwicklung nach absteigendem ξ die Function X_n^m nur die $n$te, $(n-2)$te, $(n-4)$te ..., die Function Y_n^m hingegen nur die $-(n+m)$te, $-(n+m+2)$te, $-(n+m+4)$te... Potenz von ξ enthalten kann, so müssen diese zwei particulären Integrale

bis auf constante Factoren bezüglich mit den Functionen X_n^m und Y_n^m übereinstimmen. Man hat daher die zwei Gleichungen:

$$8.)\quad X_n^m = C_1 \, . \, \xi^n . F\left(\frac{m}{2}, -n, -\frac{2n+m-2}{2}, \xi^{-2}\right),$$

$$9.)\quad Y_n^m = C_2 . \xi^{-(n+m)} . F\left(\frac{m}{2}, n+m, \frac{2n+m+2}{2}, \xi^{-2}\right),$$

Multiplicirt man die Gleichung 8) mit x^{-n}, die Gleichung 9) mit x^{n+m} und setzt dann $x=\infty$, so erhält man, da:

$$10.)\quad x^{-n} . X_n^m = \frac{m(m+2)\,.\,.(m+2n-2)}{\Pi(n)}, \; [x=\infty],$$

$$11.)\quad x^{n+m} . Y_n^m = \frac{\Pi(m+n-1)}{m(m+2)\,.\,.(m+2n)}, \; [x=\infty]$$

ist, für die Constanten C_1 und C_2 folgende Werthe:

$$12.)\quad C_1 = \frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{2^n \Pi(n)},$$

$$13.)\quad C_2 = \frac{2^{m+n}\Pi(m+n-1)}{m(m+2)\,.\,.(m+2n)}.$$

Es ist also:

$$14.)\quad X_n^m = \frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{2^n \Pi(n)} . \xi^n . F\left(\frac{m}{2}, -n, -\frac{2n+m-2}{2}, \xi^{-2}\right),$$

$$15.)\quad Y_n^m = \frac{2^{m+n}\Pi(m+n-1)}{m(m+2)\ldots(m+2n)} . \xi^{-(n+m)} . F\left(\frac{m}{2}, n+m, \frac{2n+m+2}{2}, \xi^{-2}\right).$$

Die Gleichung 15.) benützen wir nun zur Ableitung eines Integralausdruckes für die Function Y_n^m.

Sind α und β zwei positive Zahlen, so ist bekanntlich:

$$16.)\ \int_0^1 z^{\alpha-1}.(1-z)^{\beta-1}.(1-z\xi^{-2})^{-(n+m)}.\,dz=$$

$$\frac{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)}\,.\,F(m+n,\alpha,\alpha+\beta,\xi^{-2}).$$

Setzt man in dieser Gleichung:

$$17.)\ \alpha=\frac{m}{2};\ \beta=n+1,$$

so verwandelt sie sich in:

$$18.)\ \int_0^1 z^{\frac{m}{2}-1}.(1-z)^n.(1-z\xi^{-2})^{-(n+m)}.\,dz=$$

$$\frac{2^{n+1}\Pi(n)}{m(m+2)\ldots(m+2n)}.F\left(\frac{m}{2},m+n,\frac{2n+m+2}{2},\xi^{-2}\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dem Ausdrucke:

$$\frac{2^{m-1}.\Pi(m+n-1)}{\Pi(n)}\,.\,\xi^{-(n+m)},$$

so verwandelt sich die rechte Seite in Y_n^m und man hat daher:

$$19.\ Y_n^m=\frac{2^{m-1}\Pi(m+n-1)}{\Pi(n)}\int_0^1 z^{\frac{m}{2}-1}(1-z)^n\left(\xi-\frac{z}{\xi}\right)^{-(n+m)}.dz.$$

Durch die Substitution:

$$20.)\ z=\frac{u-1}{u+1}$$

geht diese Gleichung über in:

$$21.)\ Y_n^m=\frac{2^{n+m}\Pi(m+n-1)}{\Pi(n)}\int_1^\infty\frac{(u^2-1)^{\frac{m}{2}-1}.du}{[\xi+\xi^{-1}+u(\xi-\xi^{-1})]^{n+m}},$$

oder

$$22.)\quad Y_n^m = \frac{\Pi(m+n-1)}{\Pi(n)} \int_1^\infty \frac{(u^2-1)^{\frac{m}{2}-1} . du}{[x+u\sqrt{x^2-1}]^{n+m}}.$$

Setzt man endlich:

$$23.)\quad u = \cos it,$$

so erhält man schliesslich:

$$24.)\quad Y_n^m = (-i)^{m-1} \frac{\Pi(m+n-1)}{\Pi(n)} \int_0^\infty \frac{(\sin it)^{m-1} . dt}{[x+\cos it\sqrt{x^2-1}]^{m+n}}.$$

Um ein neues Integral für Y_n^m zu finden, setzen wir:

$$\cos iv = \frac{x\cos it + \sqrt{x^2-1}}{x+\cos it\sqrt{x^2-1}}$$

$$-i\sin iv = \frac{-i\sin it}{x+\cos it\sqrt{x^2-1}}$$

$$x-\cos iv\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x+\cos it\sqrt{x^2-1}}$$

$$dv = \frac{dt}{x+\cos it\sqrt{x^2-1}}$$

$$\left[\frac{\sin iv}{x-\cos iv\sqrt{x^2-1}}\right]^{m-1} = (\sin it)^{m-1}.$$

Es ist alsdann:

$$25.)\quad Y_n^m = (-i)^{m-1} \frac{\Pi(m+n-1)}{\Pi(n)}$$

$$\int_0^{\log\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} (x-\cos iv\sqrt{x^2-1})^n . (\sin iv)^{m-1} dv,$$

wo die obere Grenze den Logarithmus der mit positivem reellen Theile genommenen Wurzelgrösse bezeichnet, dessen lateraler Theil $< \frac{1}{2}\pi$ ist.

Ist x rein lateral, so kann man dem Integrale 25.) eine andere Gestalt geben. Setzt man nämlich in diesem Falle:

$$x = iy$$

$$\cos v = \frac{y \cos it + \sqrt{y^2+1}}{y + \cos it \sqrt{y^2+1}}$$

$$\sin v = \frac{\sin it}{i(y + \cos it \sqrt{y^2+1})}$$

$$y - \cos v \sqrt{y^2+1} = \frac{-1}{y + \cos it \sqrt{y^2+1}}$$

$$dv = \frac{dt}{y + \cos it \sqrt{y^2+1}}$$

$$\left(\frac{\sin v}{y - \cos v \sqrt{y^2+1}}\right)^{m-1} = (i \sin it)^{m-1},$$

so verwandelt sich die Gleichung 24.) in:

$$26.)\quad Y_n^m(iy) = (-1)^m . i^{m+n} \frac{\Pi(m+n-1)}{\Pi(n)} \int_0^{arc\ cotang\ y} (y - \cos v \sqrt{y^2+1})^n . (\sin v)^{m-1} . dv.$$

Schliesslich mag noch erwähnt werden, dass wir in unseren obigen Entwicklungen voraussetzten, dass x und $\sqrt{x^2-1}$ mit demselben Zeichen genommen werden.

Setzt man in der Gleichung 24.), 25.) und 26.) $m = 1$, so erhält man die bekannten Formeln:

$$27.)\quad Q^n = \int_0^\infty \frac{dt}{[x + \cos it \sqrt{x^2-1}]^{n+1}},$$

28.) $$Q^n = \int_0^{\log\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} (x - \cos iv \sqrt{x^2-1})^n . dv,$$

29.) $$Q^n(iy) = -i^{n+1} \int_0^{arc\,cotang\,y} (y - \cos v \sqrt{y^2+1})^n . dv.$$

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXVI. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

9.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.



XXIV. SITZUNG VOM 7. NOVEMBER 1872.

Herr Prof. Dr. Eduard Linnemann in Brünn dankt, mit Schreiben vom 1. November, für seine Wahl zum correspondirenden Mitgliede der Akademie.

Herr Prof. Dr. Th. Ritter v. Oppolzer legt eine Abhandlung vor, betitelt: „Nachweis für die im Berliner Jahrbuche für 1875 enthaltenen Ephemeriden der Planeten (58) Concordia, (59) Elpis, (62) Erato, (64) Angelina und (113) Amalthea".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg: Mémoires. VIIe Série. Tome XVI, Nrs. 9—14 (1871); Tome XVII, Nrs. 1—12 (1872); Tome XVIII, Nrs. 1—7 (1872). St. Pétersbourg; 4°. — Bulletin. Tome XVI, Nrs. 2—6 (1871); Tome XVII, Nrs. 1—3 (1871—72). St. Pétersbourg; 4°.

Accademia, Reale, dei Lincei: Atti. Tomo XXV., Anno XXV., Sessione 1ª—3ª. Roma, 1871—72; 4°.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Schwedische: Handlingar. Ny Följd. VII. Bd. 2. Hft. (1868); VIII. Bd. (1869); IX. Bd. (1870). Stockholm, 1869—1871; 4°. — Öfversigt. XXVI. & XXVII. Årgången. Stockholm, 1870 & 1871; 8°. — Lefnadsteckningar. Bd. I, Hft. 2. Stockholm, 1870; 8°. — Meteorologiska Jakttagelser i Sverige. IX—XI. Bd. 1867—1869. Stockholm, 1869—1871; Quer-4°. — Carlson, F.F., Minnesteckning öfver Erik Gustaf Geijer. Stockholm, 1870; 8°.

Academy, The Wisconsin, of Sciences, Arts, and Letters: Bulletin. Nrs. 2—5. Madison. 1871; 8°. — Act of Incorporation. 8°.

Apotheker-Verein, Allgem, österr.: Zeitschrift. 10. Jahrg., Nr. 31. Wien, 1872; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1908—1909. (Bd. 80. 12—13.) Altona, 1872; 4⁰.

Bericht über den Handel, die Industrie und die Verkehrsverhältnisse in Nieder-Österreich während des Jahres 1871. Erstattet von der Handels- und Gewerbekammer in Wien. Wien, 1872; 8⁰.

Gesellschaft, physikalische, zu Berlin: Die Fortschritte der Physik im Jahre 1868. XXIV. Jahrgang, 1. & 2. Abtheilung. Berlin, 1872; 8⁰. — Namen- und Sach-Register zu den Fortschritten der Physik. Band I bis XX. Berlin, 1872; 8⁰.

— naturforschende, in Bern: Mittheilungen aus den Jahren 1870 und 1871. Nr. 711—791. Bern, 1871 & 1872; 8⁰.

— der Wissenschaften, k. dänische: Skrifter. 5 Raekke, naturvidensk. og mathem. Afd. IX. Bd. 5. Kjøbenhavn, 1871; 4⁰. — Oversigt i Aaret 1871, Nr. 2. Kjøbenhavn; 8⁰.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang. Nr. 43—44. Wien, 1872; 4⁰.

Hayden, F. V., Preliminary Report of the United States Geological Survey of Montana and Portions of adjacent Territories etc. Washington, 1872; 8⁰. — On the Yellowstone Park. 8⁰.

Institut Egyptien: Mémoires ou travaux originaux. Tome Ier. Paris, 1862; 4⁰. — Bulletin. Années 1859—1871, Nrs. 1—11. Alexandrie, 1859—1872; 8⁰.

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie und verwandte Fächer, von F. Vorwerk. Band XXXVIII, Heft 2. Speyer, 1872; 8⁰.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band VI, 3. Heft. Leipzig, 1872; 8⁰.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrg, Nr. 22. Graz, 1872; 4⁰.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k.; in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 20—21. Wien; 8⁰.

Lüttich, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1868—1869. 8⁰ & 4⁰.

Nature. Nrs. 156—157, Vol. VI. London, 1872; 4⁰.

Report, Annual, of the Board of Supervisors of the Louisiana State University, for the Year ending December 31, 1870. Session of 1871. New Orleans, 1871; 8⁰.

„Revue politique et littéraire" et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger. II[e] Année, 2[e] Série, Nrs. 17—18. Paris & Bruxelles, 1872; 4°.

Riccardi, P., Biblioteca matematica Italiana. Fasc. 4°. Modena. 1872; 4°.

Society, The Wisconsin State Agricultural: Transactions. Vol. VIII & IX. (1869 & 1870.) Madison, 1870—71; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 43—44. Wien, 1872; 4°.

Young, Edward, Special Report on Immigration; accompanying Information for Immigrants etc. Washington, 1872; 8°.

Nachweis für die im Berliner Jahrbuche für 1875 enthaltenen Ephemeriden der Planeten (58) Concordia, (59) Elpis, (62) Erato, (64) Angelina und (113) Amalthea.

Von dem c. M. Prof. **Theodor R. v. Oppolzer.**

Ich habe im LXIV. Bande, October-Heft der Sitzungsberichte die Grundlagen veröffentlicht, die mir zur Ableitung der von mir im Berliner Jahrbuche für 1874 veröffentlichten Planeten-Ephemeriden dienten und gebe nun die Fortsetzung der in dieser Richtung unternommenen Arbeiten. Vorerst will ich vorausschicken, dass ich die Bearbeitung des Planeten (91) Ägina nicht weiter geführt habe, indem für diesen verlorenen Planeten nur seine Wiederauffindung erstrebt werden sollte, und nachdem dieses Ziel erreicht wurde, meine Rechnungen ihren Abschluss gefunden haben; es erübrigte daher nur für die fünf oben genannten Planeten das seitdem gewonnene Rechnungsmaterial hier übersichtlich zusammenzustellen.

I. (58) Concordia.

Für die weiteren Rechnungen dienten mir die folgenden, fünf beobachteten Oppositionen zwischen den Jahren 1860 und 1867 angeschlossenen, Elemente.

(58) Concordia.

Epoche, Oscul. und mittl. Äquinoct. 1865 Jän. 7·0 Berl. Zeit.

$$
\left.\begin{aligned}
L &= 210°34'\ 9''2 \\
M &= 21\ 24\ \ 4·2 \\
\pi &= 189\ 10\ \ 5·0 \\
\Omega &= 161\ 19\ 50·3 \\
i &= 5\ \ 1\ 50·5 \\
\varphi &= 2\ 26\ 21·8 \\
\mu &= 799''59642 \\
\log a &= 0·4314238.
\end{aligned}\right\}
$$

Vgl. Oppolzer LVII. Bd. der Sitzungsber. II. Abth. Märzheft 1868.

Die Darstellung der Oppositionen durch dieses System gestaltet sich wie folgt:

	$d\alpha$	$d\delta$	
1860 April 19·5	—0''3	+0''2	
1864 Febr. 6·5	+0·4	—0·2	
1865 Mai 23·5	—0·1	—0·6	
1866 Sept. 16·5	+0·2	0·0	
1867 Dec. 15·5	—0·3	—0·6	
1869 April 5·5	—2''2	—0''2	(vorausberechnet).
1870 Juli 24·5	—2''9	—0''1	(vorausberechnet).

Eine Beobachtung aus dem Jahre 1871 ist mir bisher nicht bekannt geworden.

Um die Ephemeriden für das Jahr 1873 herzustellen, konnten die Störungswerthe, die ich in der oben citirten Abhandlung (Nachweis für das Jahrbuch 1874) mitgetheilt habe, benützt werden. Es finden sich zunächst die Störungswerthe für 1873 Febr. 14·0.

	♃	♄
dL	+0'17''0	+ 33''5
$d\pi$	—3°41'35''0	— 2' 3''0
$d\Omega$	—9 7·2	— 12·2
di	+29·3	+ 0·1
$d\varphi$	+8 16·2	— 3·9
$d\mu$	—0''470	+0''012

und hiemit die folgenden Zahlen:

Angewandte Elemente.

Epoche und Osculation 1873 Febr. 14·0 Berl. Zeit
mittl. Äq. 1870·0.

$$L = 148° \ 5' 55''3$$
$$M = 322 \ 35 \ 18·0$$
$$\pi = 185 \ 30 \ 37·3$$
$$\Omega = 161 \ 14 \ 35·5$$
$$i = 5 \ 2 \ 17·5$$
$$\varphi = 2 \ 34 \ 34·1$$
$$\mu = 799''138$$
$$\log a = 0·431590$$

$$x = [0·431412] \sin (E + 275° 34' 19''7) + 0·120797$$
$$y = [0·407662] \sin (E + 186 \ 7 \ 51·8) + 0·012273$$
$$z = [9·938287] \sin (E + 180 \ 48 \ 19·0) + 0·000548.$$

(58) Concordia 1873.

Jahresephemeride.

0ʰ Berl. Zeit	A. R.	Decl.	log Δ	log r
Jän. 5	10ʰ 8ᵐ0	+ 8°10'	0·265	0·418
„ 25	9 59·3	+ 9 17	0·225	0·417
Febr. 14	9 43·4	+11 16	0·209	0·416
März 6	9 27·9	+13 18	0·223	0·415
„ 26	9 20·0	+14 41	0·260	0·414
April 15	9 22·8	+15 8	0·308	0·413
Mai 5	9 34·9	+14 41	0·357	0·413
„ 25	9 54·1	+13 29	0·402	0·412
Juni 14	10 18·2	+11 39	0·442	0·412
Juli 4	10 45·5	+ 9 17	0·476	0·412
„ 24	11 14·9	+ 6 31	0·503	0·412
Aug. 13	11 45·7	+ 3 28	0·525	0·412
Sept. 2	12 17·7	+ 0 14	0·540	0·412
„ 22	12 50·6	— 3 3	0·550	0·412
Oct. 12	13 24·2	— 6 16	0·554	0·413
Nov. 1	13 58·5	— 9 17	0·552	0·413
„ 21	14 33·2	—12 0	0·544	0·414
Dec. 11	15 8·1	—14 17	0·530	0·414
„ 31	15 42·3	—16 4	0·510	0·415

(58) Concordia 1873.

Oppositionsephemeride.

12h m. Berl. Zeit		α	δ	log Δ	Abrrzt.
1873 Jänn.	25	9h 58m 59s·60	+ 9° 19' 49"·7	0·224149	13m 55s
	26	9 58 18·74	+ 9 24 53·8	0·223035	13 52
	27	9 57 36·80	+ 9 30 5·7	0·221685	13 49
	28	9 56 53·83	+ 9 35 25·1	0·220399	13 47
	29	9 56 9·89	+ 9 40 51·5	0·219179	13 45
	30	9 55 25·03	+ 9 46 24·6	0·218026	13 42
	31	9 54 39·30	+ 9 52 4·1	0·216942	13 40
Febr.	1	9 53 52·77	+ 9 57 49·6	0·215928	13 38
	2	9 53 5·49	+10 3 40·6	0·214985	13 37
	3	9 52 17·53	+10 9 36·9	0·214114	13 35
	4	9 51 28·94	+10 15 38·1	0·213316	13 34
	5	9 50 39·79	+10 21 43·8	0·212591	13 32
	6	9 49 50·15	+10 27 53·6	0·211940	13 31
	7	9 49 0·06	+10 34 6·9	0·211364	13 30
	8	9 48 9·60	+10 40 23·3	0·210862	13 29
	9	9 47 18·83	+10 46 42·6	0·210436	13 28
	10	9 46 27·80	+10 53 4·3	0·210086	13 27
	11	9 45 36·58	+10 59 28·1	0·209812	13 27
	12	9 44 45·23	+11 5 53·6	0·209614	13 27
☍	13	9 43 53·83	+11 12 20·2	0·209492	13 26
	14	9 43 2·44	+11 18 47·6	0·209447	13 26
	15	9 42 11·13	+11 25 15·3	0·209479	13 26
	16	9 41 19·97	+11 31 42·9	0·209587	13 27
	17	9 40 29·01	+11 38 10·2	0·209771	13 27
	18	9 39 38·33	+11 44 36·6	0·210031	13 27
	19	9 38 47·97	+11 51 1·8	0·210367	13 28
	20	9 37 58·00	+11 57 25·4	0·210777	13 29
	21	9 37 8·50	+12 3 47·1	0·211262	13 30
	22	9 36 19·54	+12 10 6·4	0·211821	13 31
	23	9 35 31·19	+12 16 22·9	0·212453	13 32
	24	9 34 43·51	+12 22 36·3	0·213158	13 33
	25	9 33 56·55	+12 28 46·1	0·213934	13 35
	26	9 33 10·38	+12 34 52·1	0·214780	13 36
	27	9 32 25·07	+12 40 53·8	0·215696	13 38
	28	9 31 40·67	+12 46 50·8	0·216681	13 40
März	1	9 30 57·24	+12 52 42·9	0·217733	13 42
	2	9 30 14·84	+12 58 29·6	0·218852	13 44

(58) ☍ ☉ Febr. 12; 18h

Lichtstärke = 1·21

Grösse = 11·4

II. (59) Elpis.

Über die Elemente dieses Planeten wurden die folgenden Annahmen gemacht.

(59) Elpis.

Epoche, Osculation und mittl. Äquinoct. 1865 Jän. 7·0 m. Berl. Zeit.

$$L = 352°37'40"7$$
$$M = 334\ 18\ 57·1$$
$$\pi = 18\ 18\ 43·6$$
$$\Omega = 170\ 20\ 26·9$$
$$i = 8\ 37\ 14·6$$
$$\varphi = 6\ 44\ 2·7$$
$$\mu = 793"97881$$
$$\log a = 0·4334651.$$

Vgl. Oppolzer LXI. Bd. der Sitzungsber. II. Abth. Mai-Heft 1870.

Diese Elemente lassen in den bisher beobachteten Oppositionen als Fehler finden:

		$d\alpha$	$d\delta$	
1860	Sept. 27·5	+1"7	+1"2	
1862	Febr. 20·5	−1·5	+1·6	
1863	Mai 9·5	+0·9	+0·2	
1864	Juli 24·5	−2·6	−0·6	
1865	Dec. 12·5	−1·3	−0·4	
1867	März 15·5	+1·7	−0·9	
1868	Juni 9·5	+0·3	+0·9	
1869	Oct. 3·5	+0·6	+0·6	
1871	Febr. 7·5	+7"8	−0"3	vorausberechnet.
1872	April 25·5	+5"2	+0"7	vorausberechnet.

Die Störungswerthe finden sich nach der bei der Anführung der Elemente citirten Abhandlung für 1873 August 3·0 Berl. Zeit.

	♃	♄
ΔL	− 2'24"86	−18·85
$\Delta\pi$	−49 37·25	−38·46
$\Delta\Omega$	− 6 29·02	−18·68
Δi	− 2·48	− 0·31
$d\varphi$	+ 6 35·08	− 9·70
$\Delta\mu$	+ 0" 0428	−0"0140

und hiemit zur Berechnung der Ephemeriden:

Angewandte Elemente.

Epoche und Osculation 1873 August 3·0 m. Berl. Zeit.
mittl. Äquinoct.: 1870·0

$$L = 322°58'20"9$$
$$M = 305\ 25\ 42·8$$
$$\pi = 17\ 32\ 38·1$$
$$\Omega = 170\ 17\ 48·5$$
$$i = 8\ 37\ 9·4$$
$$\varphi = 6\ 50\ 28·1$$
$$\mu = 794"0076$$
$$\log a = 0·433455.$$

$$x = [0·433032] \sin (E + 107°32'\ 0"6) - 0·307855$$
$$y = [0·415688] \sin (E + 18\ 9\ 32·4) - 0·096680$$
$$z = [9·844240] \sin (E + 12\ 20\ 8·5) - 0·017778.$$

(59) Elpis 1873.

Jahresephemeride.

0h Berl. Zeit		A. R.	Decl.	log Δ	log r
1873 Jän.	5	17h57m4	−17° 0'	0·572	0·449
„	25	18 31·6	−16 40	0·557	0·445
Febr.	14	19 4·9	−15 48	0·536	0·441
März	6	19 36·2	−14 29	0·508	0·437
„	26	20 4·8	−12 50	0·473	0·433
April	15	20 29·7	−10 59	0·431	0·429
Mai	5	20 49·7	− 9 10	0·383	0·425
„	25	21 3·4	− 7 36	0·331	0·421
Juni	14	21 9·3	− 6 39	0·277	0·417
Juli	4	21 5·6	− 6 38	0·229	0·413
„	24	20 53·2	− 7 45	0·196	0·410
Aug.	13	20 37·2	− 9 47	0·190	0·405
Sept.	2	20 25·1	−12 2	0·211	0·401
„	22	20 22·6	−13 51	0·252	0·398
Oct.	12	20 30·9	−14 53	0·300	0·395
Nov.	1	20 48·7	−15 4	0·349	0·391
„	21	21 13·2	−14 24	0·392	0·388
Dec.	11	21 42·4	−12 59	0·431	0·386
„	31	22 14·8	−10 53	0·462	0·383

(59) Elpis 1873.

Oppositionsephemeride.

12ʰ m. Berl. Zeit			α	δ	log Δ	Abrrzt.
1873	Juli	16	20ʰ 58ᵐ 40ˢ·13	— 7° 12′ 1″·9	0·205891	13ᵐ 20ˢ
		17	20 57 59·58	— 7 15 55·4	0·204414	13 17
		18	20 57 18·09	— 7 19 58·7	0·202997	13 14
		19	20 56 35·71	— 7 24 11·6	0·201642	13 12
		20	20 55 52·49	— 7 28 34·0	0·200349	13 10
		21	20 55 8·46	— 7 33 5·8	0·199121	13 8
		22	20 54 23·68	— 7 37 46·8	0·197957	13 5
		23	20 53 38·21	— 7 42 36·7	0·196859	13 3
		24	20 52 52·11	— 7 47 35·4	0·195828	13 1
		25	20 52 5·42	— 7 52 42·6	0·194866	13 0
		26	20 51 18·21	— 7 57 58·1	0·193974	12 58
		27	20 50 30·54	— 8 3 21·6	0·193151	12 57
		28	20 49 42·47	— 8 8 52·7	0·192398	12 55
		29	20 48 54·05	— 8 14 31·1	0·191717	12 54
		30	20 48 5·36	— 8 20 16·6	0·191108	12 53
		31	20 47 16·46	— 8 26 8·8	0·190571	12 52
	August	1	20 46 27·41	— 8 32 7·4	0·190107	12 51
	☍	2	20 45 38·28	— 8 38 12·1	0·189717	12 50
		3	20 44 49·12	— 8 44 22·5	0·189401	12 50
		4	20 44 0·00	— 8 50 38·3	0·189158	12 50
		5	20 43 10·97	— 8 56 59·1	0·188989	12 49
		6	20 42 22·11	— 9 3 24·6	0·188893	12 49
		7	20 41 33·46	— 9 9 54·4	0·188870	12 49
		8	20 40 45·09	— 9 16 28·2	0·188920	12 49
		9	20 39 57·06	— 9 23 5·6	0·189043	12 49
		10	20 39 9·42	— 9 29 46·4	0·189239	12 50
		11	20 38 22·24	— 9 30 30·1	0·189508	12 50
		12	20 37 35·58	— 9 43 16·4	0·189849	12 50
		13	20 36 49·49	— 9 50 5·0	0·190261	12 51
		14	20 36 4·04	— 9 56 55·5	0·190745	12 52
		15	20 35 19·28	—10 3 47·6	0·191300	12 53
		16	20 34 35·27	—10 10 40·8	0·191925	12 54
		17	20 33 52·06	—10 17 34·9	0·192619	12 56
		18	20 33 9·73	—10 24 29·4	0·193382	12 57
		19	20 32 28·31	—10 31 24·0	0·194213	12 59
		20	20 31 47·86	—10 38 18·3	0·195110	13 0
		21	20 31 8·43	—10 45 12·1	0·196073	13 2

(59) ☍ ⊙ August 3; 5ʰ

Lichtstärke = 1·38

Grösse = 10·5

III. (62) Erato.

Über diesen Planeten enthält der oben citirte Nachweis für die im Berliner Jahrbuche 1874 etc. etc. die für das Jahr 1873 berechneten Ephemeriden.

IV. (64) Angelina.

Die zur Rechnung dienenden Elemente sind:

(64) Angelina.

Epoche, Osculation und mittl. Äquin. 1865 Jän. 7·0 m. Berl. Zeit.

$L = 119°24'25"8$
$M = 335\ 46\ 58·1$
$\pi = 123\ 37\ 27·7$
$\Omega = 311\ 10\ 13·3$
$i = 1\ 19\ 54·3$
$\varphi = 7\ 21\ 54·7$
$\mu = 808"31196$
$\log. a = 0·4282850.$

Vgl. Oppolzer LX. Bd. der Sitzungsber. II. Abth. Oct.-Heft 1869.

Der Anschluss an die bisher beobachteten Oppositionen stellt sich wie folgt:

			$d\alpha$	$d\delta$	
1861	März	28·5	+0"8	+0"6	
1863	Sept.	26·5	—2·5	+0·3	
1865	Jän.	28·5	+1·2	+0·2	
1866	Mai	26·5	—2·2	+0·1	
1867	Aug.	24·5	+3·6	+1·6	
1868	Dec.	2·5	—1·0	—0·8	
1870	April	17·5	—1·2	+0·1	(vorausberechnet).
1871	Juli	16·5	+4·2	—1·0	

Die Störungswerthe finden sich nach der bei der Anführung der Elemente citirten Abhandlung bis 1874·0 fortgeführt, da aber eine Opposition in dem Jahre 1873 für Angelina nicht eintritt, so habe ich die folgende Jahresephemeride nur mit beiläufiger Rücksicht auf die Störungen abgeleitet und gefunden:

(64) Angelina 1873.

Jahresephemeride.

0ʰ Berl. Zeit		A. R.	Decl.	log Δ	log r
Jän.	5	1ʰ 4ᵐ6	+ 8°28'	0·375	0·417
„	25	1 23·5	+10 12	0·417	0·413
Febr.	14	1 48·2	+12 25	0·453	0·408
März	6	2 17·1	+14 52	0·483	0·404
„	26	2 49·5	+17 21	0·505	0·400
April	15	3 24·9	+19 38	0·522	0·395
Mai	5	4 2·6	+21 34	0·532	0·391
„	25	4 42·3	+23 2	0·537	0·388
Juni	14	5 23·2	+23 54	0·536	0·384
Juli	4	6 4·9	+24 7	0·530	0·381
„	24	6 46·6	+23 38	0·520	0·378
Aug.	13	7 27·4	+22 29	0·504	0·376
Sept.	2	8 6·7	+20 46	0·482	0·373
„	22	8 43·8	+18 34	0·455	0·372
Oct.	12	9 18·0	+16 5	0·422	0·371
Nov.	1	9 48·6	+13 31	0·382	0·370
„	21	10 13·9	+11 6	0·335	0·370
Dec.	11	10 32·8	+ 9 7	0·282	0·370
„	31	10 42·9	+ 7 54	0·228	0·371

V. (113) Amalthea.

Meine aus den Beobachtungen der ersten Opposition abgeleiteten Elemente liessen den Planeten Amalthea sehr leicht in der zweiten Opposition auffinden, da der Fehler der Vorausberechnung ein sehr geringer war; indem ich die im Nachweis fürs Berl. Jahrb. 1874 veröffentlichte Ephemeride benützte, finde ich die folgenden Unterschiede zwischen der Beobachtung und Rechnung:

				$d\alpha$	$d\delta$
1872	Aug.	4	Pola	—4ˢ25	—30"1
	„	5	„	—4·82	—30·0
	„	6	„	—3·85	—21·3
	„	13	Bilk	—3·93	—33·0
	„	14	„	—4·18	—27·5
	Im Mittel....			—4ˢ21	—28·4

Ich bildete nun mir mit Hilfe dieser Zahlen und den Ephemeridenorten einen neuen Normalort für die zweite Opposition und benützte für die weitere Bahnbestimmung diesen Ort nebst den vier Normalorten, die ich mir aus den Beobachtungen der ersten Opposition gebildet hatte; bezieht man alles auf das mittlere Äquinoctium und die Ekliptik 1870·0, befreit jedoch die Orte nicht vom Einflusse der Störungen, so erhält man als Grundlage für die weitere Rechnung

			λ	β
1871	März	15·5	176°23'51"7	+7°20'56"4
	April	24·5	169 21 8·9	+7 25 4·7
	Juni	3·5	173 57 43·0	+6 10 52·5
	Juli	13·5	187 8 57·2	+5 1 36·0
1872	Aug.	8·5	331 23 30·6	—3 12 1·1.

Die rechtwinkeligen Ekliptikalstörungen in Einheiten der sechsten Decimale, bewirkt durch Jupiter und Saturn, entlehne ich meiner ersten Abhandlung über diesen Planeten und setze sofort neben dieselben die Sonnencoordinaten, für welche $Z = o$ gesetzt werden durfte, da ich die kleinen Sonnenbreiten auf die bekannte Weise durch entsprechende Correction in den Breiten der Normalorte streng eliminirt habe; das Äquinoctium ist wieder 1870·0.

			dx	dy	dz	X	Y
1871	März	15·5	+ 1	0	0	+0·991318	—0·087913
	April	24·5	+ 1	0	0	+0·831575	+0·566980
	Juni	3·5	+ 6	— 4	0	+0·299209	+0·969576
	Juli	13·5	+ 17	— 13	—1	—0·364614	+0·948832
1872	Aug.	8·5	+374	—761	—2	—0·736271	+0·696479

Meine in der ersten Abhandlung zuletzt angeführten Elemente lassen zufolge sechsstelliger Rechnung in den obigen Orten die folgenden Fehler im Sinne Beobachtung—Rechnung übrig:

			$d\lambda \cos\beta$	$d\beta$
1871	März	15·5	0"0	+0"1
	April	24·5	— 0"3	—2·5
	Juni	3·5	0"0	—2·2
	Juli	13·5	— 0"3	0·0
1872	Aug.	8·5	—66"7	—3·8.

Um diese Fehler möglichst wegzuschaffen, habe ich die Bedingungsgleichungen gesucht, die sich zwischen den Elementen und den geocentrischen Orten aufstellen lassen, und indem ich statt der Elemente: die Länge des Perihels (π) und der Excentritätswinkel (φ), die zwei anderen

$$\Phi = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''} \sin\pi$$

$$\Psi = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''} \cos\pi$$

einführte und überdies, um die Coëfficienten homogener zu machen, die folgenden Relationen (logarithmisch) aufstellte,

$$a = [9\cdot1310]d\Omega \qquad d = [0\cdot6074]d\Phi$$
$$b = [0\cdot1653]di \qquad e = [0\cdot2468]d\Psi$$
$$c = [0\cdot3321]dL \qquad f = [2\cdot8783]d\mu$$

erhielt ich die folgenden logarithmisch angesetzten Bedingungsgleichungen, in welchen die Fehlereinheit 100″ verstanden ist.

Für die Längen.

8_n1611a	$+8_n7177b$	$+0\cdot0000c$	$+0\cdot0000d$	$+8_n9903e$	$+8_n7567f$	$= -\infty$
8_n2339	8_n7852	$9\cdot9234$	$9\cdot9297$	$8\cdot1335$	8_n7403	$= 7_n4771$
8_n3547	8_n6667	$9\cdot7900$	$9\cdot7980$	9_n2542	7_n7106	$= -\infty$
8_n4134	8_n4179	$9\cdot6949$	$9\cdot6790$	9_n5860	8_n7313	$= 7_n4771$
$8\cdot4790$	8_n5262	$9\cdot8415$	9_n8022	0_n0000	$0\cdot0000$	$= 9_n8241$

Für die Breiten.

9_n8571a	$+9\cdot9962b$	$+8\cdot7295c$	$+8\cdot7316d$	$+8_n7751e$	$+8\cdot2229f$	$= 7\cdot0000$
9_n6406	$0\cdot0000$	$8\cdot8509$	$8\cdot8232$	8_n8302	$8\cdot2192$	$= 8_n3979$
9_n2221	$9\cdot9219$	$8\cdot6697$	$8\cdot6256$	8_n6603	$8\cdot0023$	$= 8_n3424$
$8\cdot0625$	$9\cdot8329$	$8\cdot3241$	$8\cdot2785$	8_n3302	$7\cdot6101$	$= -\infty$
$0\cdot0000$	9_n6360	8_n7171	$8\cdot7113$	$8\cdot8172$	8_n9005	$= 8_n5798$.

Gibt man allen Gleichungen das gleiche Gewicht, so resultiren hieraus die Normalgleichungen:

$+1\cdot7395a$	$-1\cdot7114b$	$-0\cdot1641c$	$-0\cdot0981d$	$+0\cdot1279e$	$-0\cdot0699f$	$= -0\cdot0440$
$-1\cdot7114$	$+3\cdot3412$	$+0\cdot0317$	$+0\cdot0215$	$-0\cdot1617$	$+0\cdot0504$	$= -0\cdot0033$
$-0\cdot1641$	$+0\cdot0317$	$+2\cdot8235$	$+1\cdot9040$	$-0\cdot9007$	$+0\cdot6213$	$= -0\cdot4677$
$-0\cdot0981$	$+0\cdot0215$	$+1\cdot9040$	$+2\cdot7604$	$+0\cdot4400$	$-0\cdot7171$	$= +0\cdot4145$
$+0\cdot1279$	$-0\cdot1617$	$-0\cdot9007$	$+0\cdot4400$	$+1\cdot2056$	$-1\cdot0341$	$= +0\cdot6683$
$-0\cdot0699$	$+0\cdot0504$	$+0\cdot6213$	$-0\cdot7171$	$-1\cdot0341$	$+1\cdot0162$	$= -0\cdot6646$.

Da die Bestimmung der Unbekannten aus diesen sechs Gleichungen voraussichtlich einer besonderen Unsicherheit unterliegen wird, so dass sich wohl die Elemente als Functionen eines nicht mit völliger Sicherheit bestimmbaren Elementes darstellen werden, so habe ich absichtlich f, welches die Correction der täglichen mittleren siderischen Bewegung (μ) enthält, als letzte Unbekannte gesetzt und bin bei der folgenden Elimination, die die gehegte Befürchtung rechtfertigte, nur bis zur Bestimmungsgleichung dieser letzten Unbekannten vorgeschritten; das Eliminationsresultat ist in den folgenden Gleichungen enthalten (logarithmisch).

$$0\cdot24042a + 0_n23335b + 9_n21511c + 8_n99167d + 9\cdot10687e + 8_n84448f = 8_n64345$$
$$0\cdot21943b + 9_n11310c + 8_n87518d + 8_n55473e + 8_n26411f = 8_n66829$$
$$0\cdot44683c + 0\cdot27620d + 9_n95009e + 9\cdot78765f = 9_n67715$$
$$0\cdot16917d + 0\cdot02011e + 0_n05534f = 9_n86387$$
$$9\cdot22608e + 8_n44809f = 6\cdot66276$$

Daraus finden sich als Bestimmung der Unbekannten mit Ausschluss von f, die nachstehenden ebenfalls logarithmisch angesetzten Relationen.

$$a = [8_n95106] + [7\cdot63522]f$$
$$b = [8_n65348] + [7_n51135]f$$
$$c = [9_n70073] + [9_n78222]f$$
$$d = [9\cdot69300] + [9\cdot81367]f$$
$$e = [7\cdot43668] + [9\cdot22201]f.$$

In der folgenden Zusammenstellung sind links vom Gleichheitszeichen die in den Beobachtungen übrigbleibenden Fehler angesetzt, die für $f = 0$ gelten; rechts vom Gleichheitszeichen sind die Coëfficienten angeführt, die die Abhängigkeit des Fehlers von f mit Benützung der eben hingestellten Relationen zu den übrigen Elementen darstellen und so die Bestimmung von f selbst vermitteln; es ist

Längen	Breiten
$+0''48 = +0\cdot0049f$	$-1''82 = +0\cdot0031f$
$-0''59 = -0\cdot0064f$	$-1\cdot61 = +0\cdot0005f$
$-0\cdot38 = +0\cdot0007f$	$+0\cdot35 = -0\cdot0017f$
$+0\cdot77 = +0\cdot0005f$	$+3''29 = -0\cdot0021f$
$-0\cdot18 = +0\cdot0001f$	$-2'00 = +0\cdot0022f$

Daraus findet sich f und hiemit $\Delta\mu$ wie folgt:

$$\Delta\mu = -0''1828$$

und demnach die übrigen Verbesserungen der Elemente

$$dL = +15\text{"}6$$
$$d\Phi = -10\text{"}03$$
$$d\Psi = -12\cdot 89$$
$$d\Omega = -1'10\text{"}5$$
$$dc = -2\text{"}8.$$

Bringt man diese Verbesserungen an die Elemente an, und berechnet sofort π und φ aus den ermittelten Werthen von Φ und Ψ, so erhält man die folgenden Elemente, für welche ich auch die durch eine willkürliche Wahl von $\Delta\mu$, für welches die Bogensecunde als Einheit gilt, bewirkten Änderungen hinzugefügt habe, und welche Elemente in die wahrscheinlichsten übergehen, sobald man $\Delta\mu = 0$ setzt.

(118) Amalthea.

mittl. Äq. 1870·0.

Osculation und Epoche 1871, April 6·0 m. Berl. Zeit.

$$L = 185°18'39\text{"}3 \quad - \ 213\text{"}0\,\Delta\mu$$
$$M = 346 \quad 3 \quad 18\cdot 4 \quad + \ 848\text{"}5\,\Delta\mu$$
$$\pi = 199 \quad 15 \quad 20\cdot 9 \quad -1061\text{"}5\,\Delta\mu$$
$$\Omega = 123 \quad 3 \quad 27\cdot 8 \quad + \ 24\text{"}1\,\Delta\mu$$
$$i = 5 \quad 2 \quad 29\cdot 0 \quad - \ 1\text{"}7\,\Delta\mu$$
$$\varphi = 4 \quad 55 \quad 38\cdot 4 \quad - \ 107\text{"}8\,\Delta\mu$$
$$\mu = 968\text{"}3902 + \Delta\mu$$
$$\log a = 0\cdot 375971 - 0\cdot 000299\,\Delta\mu$$

und die Darstellung der Orte

	$d\lambda \cos\beta$	$d\beta$
1871 März 15·5	+1"2 —3"7 Δμ	—1"4 —2"3 Δμ
April 24·5	—1·5 +4·8 Δμ	—1·5 —0·4 Δμ
Juni 3·5	—0·3 —0·5 Δμ	+0·1 +1"3 Δμ
Juli 13·5	+0·9 —0·4 Δμ	+3·0 +1·6 Δμ
1872 Aug. 8·5	—0·2 —0·1 Δμ	—1·7 —1·7 Δμ.

Man sieht hieraus, dass die Elemente noch mit einer beträchtlichen Unsicherheit behaftet sind, denn selbst eine Änderung von einer Bogensekunde in der täglichen mittleren siderischen Bewegung lässt noch einen erträglichen Anschluss an die Beobachtungen erzielen.

Zur Berechnung der Ephemeride für das Jahr 1873 aus den obigen Elementen war es nöthig, die Jupiter- und Saturnstörungen zu ermitteln, und im Anschluss an die bereits in der früheren Abhandlung gefundenen Zahlen habe ich die folgenden Störungswerthe der rechtwinkeligen Ekliptikal-Coordinaten in Einheiten der siebenten Decimale gefunden.

$$♃ = \frac{1}{1047 \cdot 9} \qquad ♄ = \frac{1}{3501 \cdot 6}$$

	Δx	Δy	Δz
1873 Jän. 25	+14892	−16228	− 416
März 6	+19408	−17552	− 673
April 15	+24586	−18156	−1008
Mai 25	+30288	−17817	−1424
Juli 4	+36304	−16328	−1914
Aug. 3	+42356	−13529	−2468
Sept. 22	+48098	− 9320	−3064
Nov. 1	+53134	− 3695	−3675
Dec. 11	+57033	+ 3239	−4266
1874 Jän. 20	+59368	+11237	−4794.

Hiemit erhält man

(113) Amalthea.

Jahresephemeride.

0h Berl. Zeit	A. R.	Decl.	log Δ	log r
1873 Jän. 5	22h 59m·2	−10°28'	0·473	0·409
„ 25	23 28·2	− 7 21	0·503	0·410
Febr. 11	23 58·5	− 4 2	0·526	0·411
März 6	0 29·9	− 0 37	0·542	0·412
„ 26	1 1·9	+ 2 46	0·551	0·412
April 15	1 34·5	+ 6 1	0·554	0·412
Mai 5	2 7·6	+ 9 2	0·551	0·411
„ 25	2 40·9	+11 44	0·541	0·411
Juni 14	3 14·1	+14 1	0·525	0·410
Juli 4	3 46·9	+15 50	0·503	0·409
„ 24	4 18·5	+17 9	0·475	0·408
Aug. 13	4 48·1	+17 57	0·439	0·406
Sept. 2	5 14·1	+18 18	0·396	0·404
„ 22	5 34·8	+18 15	0·347	0·403
Oct. 12	5 47·7	+17 58	0·292	0·400
Nov. 1	5 49·9	+17 39	0·237	0·397
„ 21	5 39·9	+17 24	0·192	0·394
Dec. 11	5 20·2	+17 24	0·171	0·391
31	4 8·2	+17 40	0·182	0·388

(113) Amalthea 1873.

Oppositionsephemeride.

12ʰ Berl. Zeit		α	δ	log Δ	Abrrzt.
1873 Nov.	25	5ʰ 36ᵐ 6·61	+17° 22′ 34″9	0·185005	12ᵐ 42ˢ
	26	5 35 11·88	+17 22 23·6	0·183551	12 40
	27	5 34 15·91	+17 22 14·6	0·182168	12 37
	28	5 33 18·76	+17 22 7·9	0·180856	12 35
	29	5 32 20·49	+17 22 3·5	0·179617	12 33
	30	5 31 21·17	+17 22 1·4	0·178452	12 31
Dec.	1	5 30 29·88	+17 22 1·6	0·177362	12 29
	2	5 29 19·68	+17 22 4·1	0·176348	12 27
	3	5 28 17·63	+17 22 9·0	0·175411	12 26
	4	5 27 14·81	+17 22 16·2	0·174553	12 24
	5	5 26 11·30	+17 22 25·8	0·173773	12 23
	6	5 25 7·17	+17 22 37·7	0·173073	12 22
	7	5 24 2·50	+17 22 52·1	0·172454	12 21
	8	5 22 57·37	+17 23 8·9	0·171917	12 20
	9	5 21 51·83	+17 23 28·1	0·171463	12 19
☍	10	5 20 46·01	+17 23 49·9	0·171091	12 18
	11	5 19 39·98	+17 24 14·2	0·170803	12 18
	12	5 18 33·82	+17 24 41·0	0·170599	12 17
	13	5 17 27·62	+17 25 10·5	0·170478	12 17
	14	5 16 21·47	+17 25 42·6	0·170441	12 17
	15	5 15 15·46	+17 26 17·5	0·170487	12 17
	16	5 14 9·67	+17 26 55·1	0·170617	12 17
	17	5 13 4·20	+17 27 35·5	0·170832	12 18
	18	5 11 59·12	+17 28 18·8	0·171131	12 18
	19	5 10 54·53	+17 29 5·0	0·171514	12 19
	20	5 9 50·52	+17 29 54·2	0·171979	12 20
	21	5 8 47·17	+17 30 46·4	0·172524	12 21
	22	5 7 44·56	+17 31 41·6	0·173149	12 22
	23	5 6 42·78	+17 32 39·9	0·173854	12 23
	24	5 5 41·91	+17 33 41·2	0·174637	12 24
	25	5 4 42·02	+17 34 45·8	0·175498	12 26
	26	5 3 43·19	+17 35 53·6	0·176435	12 27
	27	5 2 45·50	+17 37 4·9	0·177446	12 29

(113) ☍ ☉ 1873 Dec. 11; 3ʰ

Lichtstärke = 0·81

Grösse = 11·4.

XXV. SITZUNG VOM 14. NOVEMBER 1872.

Herr Prof. Dr. J. Boehm überreicht eine Abhandlung: „Über die Bildung von Sauerstoff durch grüne, in kohlensäurehältiges Wasser getauchte Landpflanzen."

Derselbe macht ferner folgende für den Anzeiger bestimmte vorläufige Mittheilungen:

1. Grüne Landpflanzen bilden bisweilen in kohlensäurehältiger Atmosphäre dem Volumen nach mehr Sauerstoff, als von der in Verwendung gekommenen Kohlensäure zerlegt wurde.
2. Die Spiralgefässe führen den Holzzellen den zu ihrer normalen Function unentbehrlichen Sauerstoff zu. Die in ihnen enthaltene Luft ist stets sauerstoffärmer als die der Atmosphäre.
3. Die Spiralgefässe im absterbenden Holze erfüllen sich nicht nur mit Thyllen, sondern auch, und zwar viel öfter, mit einer gummi- oder harzartigen Substanz, wodurch dieselben für Luft völlig impermeabel werden. — Nur bei wenigen Pflanzen bleiben die Spiralgefässe im erkrankten Holze leer.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften und Künste, Südslavische: Rad. Knjiga XX. U Zagrebu, 1872; 8°.

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrgang, Nr. 32. Wien, 1872; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1906—1907 (Bd. 80. 10.) Altona, 1872; 4°.

Beobachtungen, Schweizerische meteorologische. Mai—Juli 1871. Zürich, 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXV, Nrs. 16—18. Paris, 1872; 4°.

Fayrer, J., The Thanotophidia of India, being a Description of the venemous Snakes of the Indian Peninsula etc. London, 1872; Folio.

Genootschap, Bataviaasch, van Kunsten en Wetenschappen: Tijdschrift voor indische taal-, land- en volkenkunde. Deel XVIII (Zesde Serie. Deel I), Aflev. 3—4; Deel XX (Zevende Serie. Deel I.) Aflev. 3. Batavia & 's Hage, 1871 & 1872; 8⁰. — Notulen. Deel IX. 1871. Batavia, 1872; 8⁰. — Eerste Vervolg Catalogus der Bibliotheek en Catalogus der Maleische, Javaansche en Kawi Handschriften. Batavia & 's Hage, 1872; 8⁰.

Gesellschaft, geographische, in Wien: Mittheilungen. Bd. XV (neuer Folge V.), Nr. 10. Wien, 1872; 8⁰.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VII. Band, Nr. 20—21. Wien, 1872; 4⁰.

— k. physikalisch-ökonomische, zu Königsberg: Schriften. XII. Jahrg. (1871), I. & II. Abtheilung; XIII. Jahrg. (1872). I. Abtheilung. Königsberg; 4⁰. — Geologische Karte der Prov. Preussen. Sect. 5. Jura. Folio.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 45. Wien, 1872; 4⁰.

Hamburg, Stadtbibliothek: Gelegenheitsschriften aus den Jahren 1871 & 1872. 4⁰.

Kasan, Universität: Denkschriften. Histor.-philolog. und polit.-juristische Abtheilung. 1864. I—II. — Physikal.-mathem. und medicin. Abtheilung 1864. I—II. 1865. Bd. I. — Sitzungsberichte. 1865. Bd. I. — Sitzungsberichte und Denkschriften. 1866. I—VI; 1868. I—VI; 1869. I—III. Kasan; 8⁰. — A. Popov, Theorie der Wellen. Kasan, 1868: 4⁰. (Sämmtlich in russischer Sprache.)

Küsten-Karten des Adriatischen Meeres. Nr. 1—15. Folio.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 23. Graz, 1872; 4⁰.

Lesehalle, Akademische, in Wien: II. Jahresbericht. Wien, 1872; 8⁰.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 18. Band, 1872. Heft X. Gotha; 4⁰.

Moniteur scientifique par Quesneville. 3e Série. Tome II. 371e Livraison. Paris, 1872; 4⁰.

Nature. Nr. 158, Vol. VII. London, 1872; 4⁰.

Observations, Astronomical, made at the Royal Observatory, Edinburgh. Vol. XIII. for 1860—1869. Edinburgh, 1871; 4⁰.

Onderzoekingen gedaan in het Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. Derde Reeks. I. Aflev. III. Utrecht, 1872; 8⁰.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1872. XXII. Band, Nr. 3. Wien; 4⁰.

Repertorium für Experimental-Physik etc. Von Ph. Carl. VIII. Band, 3. & 4. Heft. München, 1872; 8⁰.

„Revue politique et littéraire“ et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger.“ IIᵉ Année, 2ᵉ Série Nr. 19. Paris & Bruxelles, 1872; 4⁰.

Rostock, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus den Jahren 1871 & 1872. 4⁰ & 8⁰.

Société Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'Orient. XVIᵉ Année, Nr. 5. Constantinople, 1872; 4⁰.

Society, The Asiatic, of Bengal: Journal. Part I, Nr. 3 (1871); Part II, Nr. 4 (1871); Parl I, Nr. 1 (1872); Part II, Nr. 1 (1872). Calcutta; 8⁰. — Proceedings. Nr. XI. 1870; Nrs. I, XII & XIII, 1871; Nrs. I—V, 1872. Calcutta; 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 45. Wien, 1872; 4⁰.

XXVI. SITZUNG VOM 21. NOVEMBER 1872.

Herr Dr. V. Graber, Privatdocent an der Grazer Universität, übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Bemerkungen über die Gehör- und Stimmorgane der Heuschrecken und Zikaden.“

Herr Prof. Dr. L. Schmarda hält einen Vortrag über einige neue Anthozoen aus der Abtheilung der Actinien. Die betreffende Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Abetti, Antonio, Cenni storici sul successivo sviluppo della meteorologia e su alcune sue importanti applicazioni. Padova, 1872; 8°.

Akademie der Wissenschaften, k. Schwedische: *Icones selectae Hymenomycetum nondum delineatorum. Fasc. III—VI. In folio.*

American Journal of Science and Arts. Third Series. Vol. III, Nrs. 16—18. New Haven, 1872; 8°.

Annalen der Chemie & Pharmacie, von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R. Band LXXXVIII, Heft 2 & 3. Leipzig & Heidelberg, 1872; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1910. (Bd. 80. 14.) Altona, 1872; 4°.

Athen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1870—72. 8° & 4°.

Beobachtungen, Magnetische und meteorologische, auf der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1871. 32. Jahrgang. Prag, 1872; 4°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome XLV°. Nr. 178. Genève, Lausanne, Paris, 1872; 8°.

Breslau, Universität; Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1871/2. 4° & 8°.

Comitato, R., geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1872. Nr. 7 & 8. Firenze; gr. 8°.

Dittel, Leopold, Die Stricturen der Harnröhre. (Handbuch der allgem. u. speciellen Chirurgie, redigirt von Dr. v. Pitha und Dr. Billroth. III. Bd., II. Abth., 6. Lieferung.) Erlangen, 1872; gr. 8°.

Gesellschaft, Naturforschende, in Zürich: Vierteljahrsschrift. XXVI. Jahrgang, 3. & 4. Heft. Zürich, 1871; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang. Nr. 46. Wien, 1872; 4°.

Graber, V., Beitrag zur Histologie der Stachelhäuter. Graz, 1872; kl. 4°.

Grad, Charles, Propositions pour l'établissement d'observations sur la température des mers de France. Abbeville, 1872; 8°.

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie & verwandte Fächer, von Vorwerk. Band XXXVIII, Heft 3. Speyer, 1872; 8°.

Jahresberichte: Siehe Programme.

Keller, Filippo, Ricerche sull' attrazione delle montagne con applicazioni numeriche. Parte I^a^. Roma, 1872; 8°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 22. Wien; 8°.

Leyden, Universität: *Annales academici. 1866—1867 & 1867—1868. Lugduni-Batavorum, 1871; 4°.*

Lipschitz, R., Über eine Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen. Berlin, 1872; 8°.

Lotos. XXII. Jahrgang. Juli & August 1872. Prag; 8°.

Mittheilungen des k. k. techn. & administrat. Militär-Comité. Jahrgang 1872. 11. Heft. Wien; 8°.

— Mineralogische, gesammelt von G. Tschermak. Jahrgang 1872. Heft. 3. Wien, 1872; 4°.

Nature. Nr. 159, Vol. VII. London, 1872; 4°.

Programme und Jahresberichte der Gymnasien zu Brixen, Brünn, Capodistria, Eger, Essek, Fiume, Graz, Hermannstadt, Iglau, Kaschau, Kremsmünster, Kronstadt, Leoben, Marburg, Meran, Naszod, Pilsen, Presburg, Ragusa, Rudolfswert, Schässburg, Tabor, Teschen, Trient, Vinkovci, des

akad. Gymnasiums, des Gymnasiums der k. k. Theresianischen Akademie und zu den Schotten in Wien, des Gymnasiums zu Zara; dann der Oberrealschulen zu Triest und Wiener-Neustadt und der k. k. technischen Hochschule in Wien. 1870—1873. 4° & 8°.

Reden gehalten bei der feierl. Inauguration des für das Schuljahr 1872—73 gewählten Rectors der k. k. technischen Hochschule, Dr. Heinrich Hlasiwetz, am 8. October 1872. Wien; 8°.

„Revue politique et littéraire" et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger. IIe Année, 2e Série, Nr. 20. Paris & Bruxelles, 1872; 4°.

Società Italiana di antropologia e di etnologia: Archivio. II° Vol., fasc. 3°. Firenze, 1872; gr. 8°.

Société Botanique de France: Bulletin. Tome XVIIIe, 1871. Comptes rendus. 4. Paris; 8°.

Sonklar, Edler v. Innstädten, Karl, Allgemeine Orographie. Die Lehre von den Relief-Formen der Erdoberfläche. Wien, 1873; 8°.

Tarry, Harold, De la prédiction du mouvement des tempêtes, et des phénomènes qui les accompagnent. Roma, 1872; 4°. — Sur l'origine des aurores polaires. 4°.

Uzielli, Gustavo, Nota sopra un nuovo goniometro. Pisa, 1872; 8°. — Baromètre hypsométrique à soupape. Florence, 1872; 4°.

Wolf, Rudolf, Astronomische Mittheilungen. XXI—XXX. Zürich, 1872; 8°.

Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Band, 23. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

— des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIV. Jahrg., 14. Heft. Wien, 1872; 4°.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXVI. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

10.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

XXVII. SITZUNG VOM 5. DECEMBER 1872.

Herr Heinrich Schramm, Director der n.-ö. Landes-Oberrealschule in Wiener-Neustadt, übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Die allgemeine Bewegung der Materie als Grundursache aller Naturerscheinungen."

Herr Hofrath Dr. E. Ritter v. Brücke überreicht eine Abhandlung des c. M. Herrn Prof. Dr. J. Czermak in Leipzig, betitelt: „„Nachweis echter „hypnotischer" Erscheinungen bei Thieren.""

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia, Reale, dei Lincei: Atti. Tomo XXV. — Anno XXV, Sess. 4ª—6ª. Roma, 1872; 4⁰.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. Juli 1872. Berlin; 8⁰.

Annales des mines. VIIᵉ Série. Tome I. 3ᵉ Livraison de 1872. Paris; 8⁰.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 10. Jahrgang, Nr. 33—34. Wien, 1872; 8⁰.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1911—1912. (Bd. 80. 15—16.) Altona, 1872; 4⁰.

Beobachtungen, Schweizer. Meteorologische. August bis November 1871. Zürich; 4⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXV. Nrs. 19—21. Paris, 1872; 4⁰.

Freiburg i. Br., Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1871/72. 4⁰ & 8⁰.

Gesellschaft, Schlesische, für vaterländische Cultur: 49. Jahresbericht. Breslau, 1872; 8⁰. — Abhandlungen der philos.-hist. Abtheilung 1871; Abhandlungen der Abtheilung für Naturwissenschaften u. Medicin. 1869/72. Breslau, 1872; 8⁰.

Gesellschaft, Astronomische, in Leipzig: Publicationen. XI—XII. Leipzig, 1872; 4°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VII. Band, Nr. 22—23. Wien, 1872; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 47—48. Wien, 1872; 4°.

Hinrichs, Gustavus, The School Laboratory of Physical Science. Vol. II, Nr. 2. Iowa City, 1872; 8°.

Institut National Génevois: Bulletin. Nr. 36. Vol. XVII, pages 1 à 216. Genève, 1872; 8°.

Institute, The Anthropological, of Great Britain and Ireland Journal. Vol. I, Nrs. 2—3; Vol. II. Nr. 1. London, 1871—1872; 8°.

Institution, The Royal, of Great Britain: Proceedings. Vol. VI, Parts 3—4. London, 1871; 8°.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 24. Graz, 1872; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k. in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 23. Wien; 8°.

Militär-Comité, k. k. techn. und administr.: Bericht über die Thätigkeit und die Leistungen desselben im Jahre 1871. Wien. 1872; 8°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 18. Band, 1872, Heft XI. Gotha; 4°.

Nature. Nr. 161, Vol. VII. London, 1872; 4°.

Naval Observatory, Washington: Observations for 1870. Appendix II. Washington, 1872; 4°. — Papers relating to the Transit of Venus in 1874. Part I. Washington, 1872; 4°.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. VI, Nr. 7—9. Firenze, 1871; 4°.

Protocoll über die Verhandlungen der XLVIII. General-Versammlung der Actionäre der a. pr. Kaiser Ferdinands-Nordbahn. Wien, 1872; 4°.

Pulkowa, Nicolai-Hauptsternwarte: Jahresbericht. 1871. St. Petersburg; 8°. — *Tabulae quantitatum Besselianarum pro annis 1875 ad 1879 computatae. Edidit Otto Struve. Petropoli, 1871; in 8°.*

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1872, Nr. 14. Wien; 4°.

„Revue politique et littéraire“, et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger“. II[e] Année, 2[e] Série, Nrs. 21—22. Paris & Bruxelles, 1872; 4°.

Schramm, Heinrich, Die allgemeine Bewegung der Materie als Grundursache aller Naturerscheinungen. I. & II. Abtheilung. Wien, 1872 & 1873; 8°.

Société Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'Orient. XVI[e] Année, Nrs. 3 & 4. Constantinople, 1872; 4°.

— Hollandaise des Sciences à Harlem: Archivès Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles. Tome VII, 1[re]—3[e] Livraisons. La Haye, Bruxelles, Paris, Leipzig, Londres & New-York, 1872; 8°.

— Géologique de France: Mémoires. II[e] Série. Tome IX[e]. I—III. Paris, 1869, 1871, 1872; 4°. — Bulletin. 2[e] Série. Tome XXIV, 1867, Nr. 5; Tome XXV, 1868, Nr. 5; Tome XXVIII, 1871, Nrs. 1 & 5. Paris; 8°.

Society, The Royal Dublin: Journal. Nr. XL. Vol. VI, Nr. 1. Dublin, 1872; 8°.

— The Zoological, of London: Transactions. Vol. VII, Parts 7—8; Vol. VIII, Parts 1—2. London, 1871—1872; 4°. — Proceedings for the Year 1871, Parts 2—3; for the Year 1872, Parts 1—3. London; 8°. — Revised List of the Vertebrated Animals now or lately living in the Gardens. 1872. London; 8°. — Catalogue of the Library. London, 1872; 8°.

Verein, physikalischer, zu Frankfurt a. M.: Jahres-Bericht für 1870—1871. Frankfurt a. M., 1872; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 47—48. Wien, 1872; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIV. Jahrgang, 15. Heft. Wien, 1872; 4°.

XXVIII. SITZUNG VOM 12. DECEMBER 1872.

In Verhinderung des Präsidenten führt Herr Hofrath Freih. v. Burg den Vorsitz.

Herr Prof. Leopold Gegenbauer in Krems übersendet eine Abhandlung; betitelt: „Entwickelung nach den Functionen X_n^{2r+1}."

Herr Prof. Dr. V. v. Lang hält einen Vortrag über die Genauigkeit der Tiefenmessung mit dem Mikroskope.

Herr Prof. Dr. S. Stern überreicht eine Abhandlung: „Über den inneren Mechanismus der inspiratorischen Erweiterung der Lungen."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, k. k., zu Krakau: Rocznik. Tom XX & XXI. Kraków, 1872; 8°. — *Scriptores rerum Poloniacarum. Tomus I.* 8°. — Statut Akademii umiejętności w Krakowie. Kraków, 1872; 8°. — *Monumenta antiquae artis Cracoviensia. Fasc. I. 1872;* 4°.

— — Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. August 1872. Berlin; 8°.

Alpen-Verein, Deutscher und österreichischer: Zeitschrift. Heft 1 & 2. München, 1871; 8°.

Annales météorologiques de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Par A. Quetelet. IIe—Ve Années. Bruxelles, 1868—1871; 4°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1913 (Bd. 80. 17.) Altona, 1872; 4°.

Barrande, Joachim, Crustacés divers et poissons des dépôts siluriens de la Bohême. Prague & Paris, 1872; 8°.

Comitato, R., geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1872, Nr. 9 e 10. Firenze; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXV, Nr. 22. Paris, 1872; 4⁰.

Gesellschaft, Geographische, in Wien: Mittheilungen. Bd. XV (neuer Folge V.), Nr. 11. Wien, 1872; 8⁰.

— Berliner Medicinische: Verhandlungen. I. Heft. (1866); und Jahrg. 1869, 1870, 1871. Berlin; 1866 & 1872; 8⁰.

— neurussische, der Naturforscher zu Odessa; Zapiski. I. Bd., nebst Beilage I & II. Odessa, 1872; 8⁰.

— kais. russ. geographische, zu St. Petersburg: Bericht für das Jahr 1871. St. Petersburg, 1872; 8⁰. — Séances du 5 Mai 1871, 12 Janvier, 9 Février, 8 Mars, 8 Avril et 3 Mai 1872. 4⁰.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXII. Jahrgang, Nr. 49. Wien, 1872; 4⁰.

Grunert, Joh. Aug., Archiv der Mathematik & Physik. LIV. Theil, 3. Heft. Greifswald, 1872; 8⁰.

Halley's Magnetic Chart in the Year 1700. Gross-Folio.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie, von Alex. Naumann. Für 1870. 1. und 3. Heft. Giessen, 1872; 8⁰.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band VI. 4. & 5. Heft. Leipzig, 1872; 8⁰.

Kiel, Universität: Akademische Schriften aus dem Jahre 1871. Band XVIII. Kiel, 1872; 4⁰.

Landbote, Der steirische. 5. Jahrgang, Nr. 25. Graz, 1872; 4⁰.

Lotos. XXII. Jahrgang. September, October 1872. Prag; 8⁰.

Lyceum of Natural History in the City of New York: Annals, Vol. IX, Nr. 13 (1870); Vol. X, Nrs. 1—7. (1871). New-York; 8⁰. — Proceedings. Vol. I. Sign. 1—15. 8⁰.

Moniteur scientifique, par Quesneville. 3ᵉ Série, Tome II. 372ᵉ Livraison. Paris, 1872; 4⁰.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. VI, Nr. 10. Firenze, 1871; 4⁰.

Programm des k. Ober-Gymnasiums zu Zengg am Schlusse des Schuljahres 1871/72. Agram; 4⁰.

Repertorium für Experimental-Physik etc. von Ph. Carl. VIII. Band, 5. Heft. München, 1872; 8⁰.

„Revue politique et littéraire“ et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger.“ IIe Année, 2e Série, Nr. 23. Paris & Bruxelles, 1872; 4⁰.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et Compte rendu des travaux. 3e Série. 24e Année, 1er & 2e Cahiers. Paris, 1871; 8⁰. — Séances du 19 Avril au 4 Octobre 1872. 8⁰.

— Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette Médicale d'Orient, XVIe Année, Nrs. 6—7. Constantinople, 1872; 4⁰.

— des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux: Mémoires. Tome VIII, 4e Cahier. Paris & Bordeaux, 1872; 8⁰.

Verein für deutsche Nordpolfahrt zu Bremen: 17.—20., 24.—27. Versammlung. 1871—1872; 8⁰.

Vidal, Léon, Calcul des temps de pose ou tables photométriques portatives etc. Paris, 1865; kl. 8⁰. — Education et conservation du loup (Bar) à l'état de stabulation dans des viviers de la ferme aquicole de Port-de-Bouc. 8⁰. — Education du muge etc. 8⁰. — Essais de mythiliculture etc. 8⁰. — De la pisciculture par éclosion artificielle. Marseille, 1867; 8⁰. — Photographie au charbon. Paris, 1869 & 1870; kl. 8⁰. — De l'art photographique considérée au point de vue industriel. Marseille, 1870; 8⁰. — De l'action du froid sur les poissons élevés en stabulation. Marseille, 1871; 8⁰. — Monographie de la moule. Marseille, 1872; 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang. Nr. 49. Wien, 1872; 4⁰.

Entwickelung nach den Functionen X_n^{2r+1}.

Von **Leopold Gegenbauer** in Krems.

Bleibt die Function $\varphi(x)$ zwischen $x=-1$ und $x=1$ endlich und setzt man:

$$1.)\quad \varphi(x)=\Sigma A_m X_m^{2r+1},$$

so kann man die Coëfficienten A durch bestimmte Integrale ausdrücken. Multiplicirt man nämlich die Gleichung 1.) mit $(1-x^2)^r.X_m^{2r+1}.dx$, integrirt alsdann auf beiden Seiten von $x=-1$ bis $x=1$ und bedenkt, dass:

$$2.)\quad \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^r.X_m^{2r+1}.X_{m_1}^{2r+1}.dx=0,$$

$$3.)\quad \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^r.\left[X_m^{2r+1}\right]^2.dx=\left[\frac{2^r\Pi(r)}{\Pi(2r)}\right]^2.\frac{\Pi(m+2r)}{\Pi(m)}.\frac{2}{2m+2r+1}$$

ist, so hat man:

$$4.)\quad A_m=\left[\frac{\Pi(2r)}{2^r\Pi(r)}\right]^2.\frac{\Pi(m)}{\Pi(m+2r)}.\frac{2m+2r+1}{2}.\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^r.\varphi(x).X_m^{2r+1}.dx.$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass eine Function $\varphi(x)$ nur auf eine einzige Art nach den Functionen X_m^{2r+1} entwickelt werden kann. Wäre nämlich:

5.) $\varphi(x) = \Sigma\, C_m\, X_m^{2r+1}$

eine zweite Entwickelung der Function $\varphi(x)$, so müsste:

6.) $\Sigma A_m X_m^{2r+1} = \Sigma\, C_m X_m^{2r+1}$

sein. Multiplicirt man nun diese Gleichung mit $(1-x^2)^r . X_m^{2r+1} . dx$ und integrirt auf beiden Seiten von $x = -1$ bis $x = 1$, so verwandelt sich dieselbe in:

7.) $A_m = C_m$.

Die beiden Entwickelungen 1.) und 5.) sind demnach vollkommen identisch; es kann also eine Function $\varphi(x)$ nur auf eine einzige Art, nach den Functionen X_m^{2r+1} entwickelt werden.

Da sich viele Functionen in Reihen entwickeln lassen, welche nach aufsteigenden Potenzen von x fortschreiten, so wird man dieselben nach den Functionen X_m^{2r+1} entwickeln können, wenn man im Stande ist, jede Potenz von x in die Form der Reihe 1.) zu bringen.

Betrachtet man die Gleichung:

8.) $$X_n^{2r+1} = \frac{(2r+1)(2r+3)\dots(2r+2n-1)}{\Pi(n)}\Big[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2r+2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2r+2n-1)(2r+2n-3)}x^{n-4} - \dots\Big],$$

so sieht man, dass x^n linear durch X_n^{2r+1}, x^{n-2}, x^{n-4} . . . ausgedrückt werden kann. Da nun aber ebenso x^{n-2} durch X_{n-2}^{2r+1}, x^{n-4}, x^{n-6}, . . . ; x^{n-4} durch X_{n-4}^{2r+1}, x^{n-6}, x^{n-8}, . . . linear ausgedrückt werden kann, so hat man die Gleichung:

9.) $x^n = A_n X_n^{2r+1} + A_{n-2} X_{n-2}^{2r+1} + A_{n-4} X_{n-4}^{2r+1} + \dots$

Die Coëfficienten A sind durch die Gleichung:

10.) $$A_s = \left[\frac{\Pi(2r)}{2^r \Pi(r)}\right]^2 . \frac{\Pi(s)}{\Pi(s+2r)} . \frac{2s+2r+1}{2}.$$

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^r.x^n.X_s^{2r+1}.dx$$

bestimmt, wo für s der Reihe nach die Grössen: n, $n-2$, $n-4$, ... zu setzen sind.

Zunächst ist klar, dass A_s immer verschwindet, wenn $n<s$ ist; denn in diesem Falle hätte man, falls für x^n die Reihe 9.) gesetzt wird, auf der rechten Seite der Gleichung 10.) eine Summe, deren einzelne Glieder nach Gleichung 2.) sämmtlich verschwinden. Daraus folgt nun sogleich, dass auch das Integral:

$$11.)\quad \int_0^{+1}(1-x^2)^r.x^n.X_s^{2r+1}.dx=0$$

ist, wenn $n<s$ und $s-n$ eine gerade Zahl ist.

Wir wollen nun den Werth des Integrales:

$$\int_0^{+1}(1-x^2)^r.x^n.X_s^{2r+1}.dx$$

ermitteln. Setzt man:

$$12.)\quad X_s^{2r+1}=ax^s+bx^{s-2}+cx^{s-4}+\ldots,$$

so ist:

$$13.)\quad \int_0^{+1}(1-x^2)^r.x^n.X_s^{2r+2}.dx=a\int_0^{+1}x^{s+n}(1-x^2)^r.dx+b$$

$$\int_0^{+1}x^{s+n-2}(1-x^2)^r dx+c\int_0^{+1}x^{s+n-4}(1-x^2)^r dx+\ldots$$

Es ist aber:

$$14.)\quad \int_0^{+1}x^\alpha(1-x^2)^\beta dx=\frac{2^\beta\Pi(\beta)}{(\alpha+2\beta+1)(\alpha+2\beta-1)\ldots(\alpha+1)}$$

und daher:

$$15.)\int_0^{+1}(1-x^2)^r.x^n.X_s^{2r+1}.dx = 2^r\Pi(r)$$

$$\left[\frac{a}{(s+n+2r+1)(s+n+2r-1)\dots(s+n+1)}+\right.$$

$$+\frac{b}{(s+n+2r-1)(s+n+2r-3)\dots(s+n-1)}+$$

$$\left.+\frac{c}{(s+n+2r-3)(s+n+2r-5)\dots(s+n-3)}+\dots\right].$$

Bedenkt man, dass nach den obigen Auseinandersetzungen das Integral auf der linken Seite dieser Gleichung für gerade s verschwindet, wenn

$$n = s-2,\ s-4,\ s-6,\ \dots,\ 2,\ 0$$

ist, für ungerade s hingegen, wenn

$$n = s-2,\ s-4,\ s-6,\ \dots,\ 3,\ 1$$

ist, so kann man für die Gleichung 15.) folgende zwei neue Gleichungen schreiben:

$$16.)\int_0^{+1}(1-x^2)^r.x^n.X_s^{2r+1}dx =$$

$$k\frac{2^r\Pi(r)n(n-2)(n-4)\dots(n-s+2)}{(s+n+2r+1)(s+n+2r-1)\dots(n+1)},\ [s \text{ gerade}],$$

$$17.)\int_0^{+1}(1-x^2)^r.x^n.X_s^{2r+1}dx =$$

$$k\frac{2^r\Pi(r)(n-1)(n-3)(n-5)\dots(n-s+2)}{(s+n+2r+1)(s+n+2r-1)\dots(n+2)},\ [s \text{ ungerade}],$$

wo k eine von n unabhängige Grösse bezeichnet. Um die Constante k zu bestimmen, multipliciren wir eine dieser Gleichungen mit n^{r+1} und setzen $n=\infty$. Da nach Gleichung 15.):

$$18.)\quad n^{r+1}\int_0^{+1}(1-x^2)^r.x^n.X_s^{2r+1}.dx = 2^r\Pi(r)X_s^{2r+1}(1) = \frac{2^r\Pi(r)(2r+1)(2r+2)(2r+3)\ldots(2r+s)}{s!},\quad [n=\infty]$$

ist, so erhalten wir für k den Werth:

$$19.)\quad k = \frac{(2r+1)(2r+2)(2r+3)\ldots(2r+s)}{s!}.$$

Es ist also:

$$20.)\quad \int_0^{+1}(1-x^2)^r.x^n.X_s^{2r+1}.dx = \frac{2^r\Pi(r)(2r+1)(2r+2)(2r+3)\ldots(2r+s)n(n-2)(n-4)\ldots(n-s+2)}{s!(s+n+2r+1)(s+n+2r-1)\ldots\ldots\ldots(n+1)},$$

[s gerade],

$$21.)\quad \int_0^{+1}(1-x^2)^r.x^n.X_s^{2r+1}.dx = \frac{2^r\Pi(r)(2r+1)(2r+2)(2r+3)\ldots(2r+s)(n-1)(n-3)(n-5)\ldots(n-s+2)}{s!(s+n+2r+1)(s+n+2r-1)\ldots\ldots\ldots(n+2)},$$

[s ungerade].

Die Gleichung 10.) verwandelt sich nun, da in derselben n eine ganze Zahl und s so beschaffen ist, dass $n-s$ nicht negativ und gerade ist, in:

$$22.)\quad A_s = (2r+2s+1)\frac{\Pi(n)}{2.4.6\ldots(n-s)(2r+1)(2r+3)\ldots(2r+n+s+1)}.$$

Man hat daher als Entwickelung vo x^n nach den Functionen X_s^{2r+1} die Gleichung:

$$23.)\quad x^n = \frac{\Pi(n)}{(2r+1)(2r+3)\ldots(2r+2n+1)}\Big[(2r+2n+1)$$

$$X_n^{2r+1} + \frac{(2r+2n-3)(2r+2n+1)}{2}$$

$$X_{n-2}^{2r+1} + \frac{(2r+2n-7)(2r+2n+1)(2r+2n-1)}{2\,.\,4}\,.\,X_{n-4}^{2r+1} + \ldots\ldots\Big].$$

Ist nun:

$$24.)\quad \varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ .\ .\ .$$

eine nach steigenden Potenzen von x geordnete Function, so erhält man, wenn man die einzelnen Potenzen von x nach den Functionen X_n^{2r+1} entwickelt, die Gleichung:

$$25.)\quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n X_n^{2r+1},$$

wo:

$$26.)\quad A_n = \frac{\Pi(n)}{(2r+1)(2r+3)\ldots(2r+2n-4)}\Big[c_n + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2r+2n+3)}$$

$$c_{n+2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\,.\,4(2r+2n+3)(2r+2n+5)}\,c_{n+4} + \ .\ .\ .\ .\Big]$$

ist.

Durch die Gleichungen 25.) und 26.) ist uns aber die Entwickelung einer jeden nach aufsteigenden Potenzen einer Variabeln x geordneten Function nach den Functionen X_n^{2r+1} gegeben, wenn diese Function zwischen $x = -1$ und $x = 1$ endlich ist.

Bemerkt man, dass:

$$27.)\quad X_n^{2r+1} = \frac{2^r\Pi(r)}{\Pi(2r)}\,[P^{(n+r)}]^{(r)}$$

ist, so kann man auch schreiben:

$$28.)\quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n [P^{(n+r)}]^{(r)},$$

wo:

$$29.)\quad B_n = \frac{\Pi(n)}{1.3.5\,.\,.\,.\,.\,(2r+2n-1)}\left[c_n + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2r+2n+3)}\right.$$

$$\left. c_{n+2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4(2r+2n+3)(2r+2n+5)}c_{n+4} + \ldots\right]$$

ist.

XXIX. SITZUNG VOM 19. DECEMBER 1872.

Der Senat der k. Universität zu München übersendet mit Zuschrift vom 11. December l. J. ein Exemplar der Universitätschronik für das Jahr 1871/72, und dankt gleichzeitig für die Betheiligung der kais. Akademie an dem 400jährigen Stiftungsfeste dieser Hochschule.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Über die Monochloritamalsäure", vom Herrn Th. Morawski, Assistenten an der technischen Hochschule in Graz, eingesendet und empfohlen durch Herrn Prof. Dr. J. Gottlieb.

„Über ein Integrationstheorem von Abel", vom Herrn Wenzel Grünert, Assistenten am k. k. technischen Institute in Brünn.

„Über Axenbestimmung von Central-Projectionen der Flächen zweiten Grades", vom Herrn Karl Pelz, Assistenten am deutschen Polytechnikum in Prag.

Herr Regierungsrath Dr. K. v. Littrow legt eine Abhandlung: „Zur Kenntniss der kleinsten sichtbaren Mondphasen" vor.

Herr Director Dr. J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Über die mit dem Soleil'schen Doppelquarz ausgeführten Interferenzversuche."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Apotheker-Verein, allgem.-österr.: Zeitschrift. 10. Jahrgang, Nr. 35. Wien, 1872; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1914. (Bd. 80, 18.) Altona, 1872; 4°.

Bern, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1870/71. fol., 4° & 8°.

Bonn, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1871. 4⁰ & 8⁰.

Chronik der Ludwig-Maximilians-Universität München für das Jahr 1871/72. München, 1872; 4⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences Tome LXXV, Nr. 23. Paris, 1872; 4⁰.

Denza, Francesco, Intorno alle aurore polari del primo quadrimestre dell' anno 1872. Milano, 1872; 8⁰.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXII. Jahrgang, Nr. 50. Wien, 1872; 4⁰.

Institut, geodätisches: Maassvergleichungen. 1. Heft. Berlin, 1872; 4⁰. — General-Bericht über die europäische Gradmessung für das Jahr 1871. Berlin, 1872; 4⁰.

Knoblauch, Hermann, Über den Durchgang der Wärmestrahlen durch geneigte diathermane Platten. Berlin, 1872; 8⁰.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1872, Nr. 24. Wien; 8⁰.

Melsens, Note sur les plaies produites par les armes à feu etc. Bruxelles, 1872; 8⁰.

Nature. Nr. 163, Vol. VII. London, 1872; 4⁰.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1872, Nr. 15. Wien; 4⁰.

„Revue politique et littéraire" et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger." IIᵉ Année, 2ᵉ Série, Nr. 24. Paris & Bruxelles, 1872; 4⁰.

Rosetti, Francesco, Di una curiosa ed elegante esperienza elettrica. 8⁰. — Uso della macchina di Holtz in alcune ricerche elettrometriche sui condensatori elettrici. Memoria I. Padova, 1872; 8⁰.

Scacchi, Arcangelo, Contribuzioni mineralogiche per servire alla storia dell' incendio Vesuviano del mese di aprile 1872. Napoli, 1872; 4⁰. — Sulle forme cristalline di alcuni composti di toluene. Napoli, 1870; 4⁰. — Notizie preliminari di alcune specie mineralogiche rinvenute nel Vesuvio dopo l'incendio di aprile 1872. 4⁰.

Société d'Histoire naturelle de Colmar: Bulletin. 12ᵉ et 13ᵉ années. 1871 et 1872. Colmar, 1872; 8⁰.

Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève: Mémoires. Tome XXI, 2de Partie. Paris & Bâle, 1872; 4°.

Stingl, Joh., Über das Weichmachen des Wassers mittelst Kalkwasser. (Aus Dingler's polytechn. Journal, Bd. CCVI. 1872.) 8°.

Strassburg, Universität: Zur Geschichte derselben. Festschrift zur Eröffnung der Universität Strassburg am 1. Mai 1872, von August Schricker. Strassburg, 1872; kl. 4°. — Die Einweihung der Strassburger Universität am 1. Mai 1872. Officieller Festbericht. Strassburg, 1872; kl. 4°.

Vierteljahresschrift, österr., für wissenschaftliche Veterinärkunde. XXXVIII. Band, 1. Heft. Wien, 1872; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXII. Jahrgang, Nr. 50. Wien, 1872; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins. XXIV. Jahrgang, 16. Heft. Wien, 1872; 4°.

Über die mit dem Soleil'schen Doppelquarz ausgeführten Interferenzversuche.

Von dem w. M. **J. Stefan.**

(Mit 3 Holzschnitten.)

Die Versuche, um die es sich hier handelt, habe ich schon in einem früheren Aufsatze[1] beschrieben, jedoch nur im Allgemeinen, ohne in das Detail der Erscheinungen und ihrer Erklärung einzugehen. Es zeigen aber diese Interferenzphänomene mehrfache auffallende Eigenthümlichkeiten, so dass sie wohl eine ausführliche Berechnung und Discussion verdienen.

Der Apparat, mit welchem der erste Versuch ausgeführt werden kann, ist ein gewöhnlicher Spectralapparat. Vor das Collimatorobjectiv wird die Soleil'sche *double plaque*, bestehend aus zwei gleich dicken, aber die Polarisationsebene des Lichtes entgegengesetzt drehenden Quarzplatten, gebracht und zwar so, dass die Ebene, in welcher die beiden Platten sich berühren, mit der brechenden Kante des Prisma im Spectralapparate parallel steht. Die auf der Seite der brechenden Kante liegende Hälfte der Doppelplatte wird mit einem Glasplättchen bedeckt, durch welches das aus dieser Halbplatte kommende Licht gegen das aus der anderen kommende in seinem Gange bedeutend verzögert wird. Im Spectrum sieht man dann die zuerst von Talbot beobachteten Interferenzlinien, über deren Darstellung ich ebenfalls schon in früheren Aufsätzen berichtet habe.

Um in den Apparat nicht nur gewöhnliches, sondern auch linear, elliptisch oder circular polarisirtes Licht schicken zu können, ist hinter der Spalte des Spectralapparates ein Träger

[1] Sitzungsberichte LIII. 1866.

mit einem Fresnel'schen Parallelepiped und einem drehbaren Nicol'schen Prisma aufgestellt. Das Fresnel'sche Parallelepiped kann auch ersetzt werden durch ein Glimmerplättchen von solcher Dicke, dass es zwischen dem ordentlich und ausserordentlich gebrochenen Strahl einen Gangunterschied von einem oder drei Vierteln der Wellenlänge erzeugt.

Werden die Talbot'schen Linien im Spectrum ohne die Doppelplatte erzeugt, so treten sie in allen Theilen des Spectrums auf, wenn nur das verzögernde Glasplättchen zwischen den Objectivlinsen des Beobachtungsfernrohres und des Collimators aber auf der Seite der brechenden Kante des Prisma sich befindet. An allen Orten des Spectrums, für welche der durch das Glasplättchen erzeugte Gangunterschied eine ungerade Anzahl der ihnen zugehörigen Wellenlängen beträgt, befinden sich dunkle Linien. In der Lage und Schwärze dieser ändert sich nichts, wenn gewöhnliches Licht mit polarisirtem, sei es linear, elliptisch oder circular polarisirtem Lichte vertauscht wird.

Ist aber die Doppelplatte eingeschaltet, so ändert sich der Sachverhalt und zwar in den verschiedenen Theilen des Spectrums in verschiedener Weise.

Es gibt zwei Stellen im Spectrum, eine zwischen den Fraunhofer'schen Linien *D* und *E*, eine zwischen den Linien *F* und *G*, an welchen die Interferenzlinien ebenfalls unverrückt bleiben, wie auch der Polarisationszustand des Lichtes verändert werden mag. Es sind dies die Stellen jener Strahlen, deren Schwingungen durch die Doppelplatte gegen einander um 360° und 540° verdreht werden. An allen übrigen Orten treten beim Wechsel der Polarisation des Lichtes Verschiebungen und Veränderungen der Interferenzlinien ein.

Dann gibt es drei Stellen im Spectrum, eine zwischen den Linien *C* und *D*, die zweite zwischen *E* und *F*, die dritte unmittelbar vor *G*, an welchen bei gewöhnlichem und linear polarisirtem Lichte gar keine Interferenzstreifen auftreten, aber sogleich erscheinen, sobald solches Licht mit elliptisch polarisirtem vertauscht wird und zwar um so dunkler werden, je näher die elliptische Polarisation der circularen kommt. Es sind dies die Stellen jener Strahlen, deren Schwingungen durch die Doppel-

platte um drei, fünf und sieben rechte Winkel gegen einander verdreht sind. Wird also linear polarisirtes Licht angewandt, so stehen die Schwingungen des aus der einen Hälfte der Doppelplatte kommenden Lichtes senkrecht auf den Schwingungen des Lichtes, welches aus der andern Hälfte der Doppelplatte kommt. Das Ausbleiben der Interferenzlinien in diesem Falle ist ein präciser Beweis des Satzes, dass rechtwinklig gegen einander polarisirte Strahlen durch Interferenz sich nicht zu schwächen vermögen.

Aus dem Umstande, dass die Interferenzstreifen an diesen Stellen auch bei gewöhnlichem Lichte ausfallen, dieses also wie linear polarisirtes sich verhält, habe ich früher geschlossen, dass auch im gewöhnlichen Lichte nur geradlinige Schwingungen enthalten sind. Dieser Schluss ist jedoch durchaus kein nothwendiger. Die Interferenzlinien, welche an diesen Stellen bei elliptisch polarisirtem Lichte entstehen, besitzen nämlich noch eine besondere Eigenthümlichkeit. Es vertauschen beim Übergange von rechts zu links elliptisch polarisirtem Lichte die Maxima und die Minima der Lichtintensität plötzlich ihre Orte. Wird also nacheinander rechts- und linkselliptisch polarisirtes Licht in raschem Wechsel in den Apparat geschickt, so werden an derselben Stelle ebenso rasch die Maxima und Minima der Intensität wechseln. Da aber wegen der Nachdauer des Lichteindruckes auf der Netzhaut nicht die in jedem Augenblick wirklich stattfindenden Zustände, sondern, wenn diese rasch nacheinander wechseln, nur der Mittelwerth derselben zur Wahrnehmung kommt, so werden auch in dem angeführten Falle keine Interferenzlinien gesehen werden.

Man kann auch durch einen sehr einfachen Versuch die Unrichtigkeit des erwähnten Schlusses beweisen. Lässt man unpolarisirtes Licht, bevor es auf die Spalte des Spectralapparates fällt, durch ein Fresnel'sches Parallelepiped gehen, so ist es auch nach dem Austritte aus diesem noch unpolarisirt und gibt an den bezeichneten Stellen des Spectrums keine Interferenzlinien. Das aus dem Parallelepiped kommende Licht enthält aber sicher elliptische Schwingungen.

Es können also auch im gewöhnlichen Lichte elliptische Schwingungen vorhanden sein, nur müssen die rechtselliptischen

durch äquivalente linkselliptische compensirt sein. Hingegen würden elliptische Schwingungen nur einer Art auch bei fortwährend wechselnder Axenrichtung den Bedingungen, welchen dieser Versuch das unpolarisirte Licht unterwirft, nicht genügen.

Schwingungen von abwechselnd rechts- und linkselliptischer Art kommen übrigens häufig in der Natur vor. Der Art sind die Schwingungen des quadratischen oder cylindrischen Stabes im Wheatstone'schen Kaleidophon. Sie haben aber immer ihren Ursprung in der Zusammensetzung zweier einfacher Schwingungen von nicht absolut gleicher Schwingungsdauer. Nimmt man an, dass im unpolarisirten Lichte die elliptischen Schwingungen in ähnlichem Wechsel auf einander folgen, so hat man zugleich die schon von Lippich ausgesprochene Ansicht adoptirt, dass es kein homogenes unpolarisirtes Licht gibt.

Die fünf hervorgehobenen singulären Orte des Spectrums theilen dieses in Felder, in denen die Erscheinungen die continuirliche Vermittlung zwischen den Extremen in ihren Grenzen bilden. In Bezug auf die absoluten Werthe der Maxima und Minima der Lichtintensität verhalten sich die zu beiden Seiten einer solchen Stelle liegenden Felder gleich, in Bezug auf die beim Wechsel des Polarisationszustandes des Lichtes eintretenden Verschiebungen der Interferenzlinien entgegengesetzt. Es sind also die Erscheinungen auf der einen Seite gewissermassen das Spiegelbild der Erscheinungen auf der zweiten Seite. Von den Orten an, wo keine Verschiebungen stattfinden, wachsen die Verschiebungen für die Theile zu beiden Seiten successive bis zu dem grössten Werthe einer halben Streifendistanz, welche dort auftreten, wo die Drehungswinkel eine ungerade Anzahl rechter Winkel betragen. Während in diesen Orten die Verschiebung beim Übergange von rechtselliptisch zu linkselliptisch polarisirtem Lichte plötzlich stattfindet, geht sie an den übrigen Stellen successive vor sich, insofern sie um so grösser wird, je näher das Verhältniss der beiden Axen der Schwingungsellipse der Einheit kommt und ihren grössten Werth erreicht, wenn die Ellipse zum Kreis wird.

Nach den gewöhnlichen Regeln der Interferenzlehre in Verbindung mit der Fresnel'schen Theorie, welche die Drehung der Polarisationsebene durch die Auflösung der Lichtschwingun-

gen in rechts- und linkscirculare und die verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser erklärt, müsste man für den Übergang von rechts- zu linkscircularem Lichte ein ganz anderes Verhalten der Erscheinungen, als das hier beschriebene, erwarten, nämlich eine vom rothen bis zum violetten Ende des Spectrums successive wachsende, gleichsinnige Verschiebung der Interferenzlinien. Es stehen jedoch die Endresultate, welche sich aus der hier angedeuteten Betrachtungsweise ergeben, mit der Beobachtung in keinem unlöslichen Widerspruche, da die gerechneten und gefundenen Verschiebungen immer um eine ganze Anzahl von Streifendistanzen differiren.

Der zweite Versuch, eigentlich ein Beugungsversuch, kann mit demselben Apparate ausgeführt werden, wenn dieser die Wegnahme des Prisma und die Einstellung des Beobachtungsfernrohrs in die Richtung der Collimatoraxe gestattet. Die Doppelplatte wird mit einem Schirme, in welchen zwei feine parallele Spalten eingeschnitten sind, der Art bedeckt, dass die eine Spalte vor die erste Hälfte der Doppelplatte, die andere vor die zweite zu liegen kommt. Der Zwischenraum zwischen den beiden Spalten bedeckt die Berührungsstelle der beiden Hälften der Doppelplatte.

Wird dieser Versuch ohne Doppelplatte angestellt, so erhält man bekanntlich in der Mitte des Gesichtsfeldes ein Maximum der Lichtintensität, zu beiden Seiten zwei Minima u. s. w. Die ersten zwei Minima präsentiren sich nicht nur im homogenen, sondern auch im weissen Lichte als schwarze Linien. Bei Anwendung der Doppelplatte ändert sich die Erscheinung je nach der Farbe und dem Polarisationszustande des Lichtes. Es gibt nun im unpolarisirten oder linear polarisirten Zustande rothes Licht in der Mitte des Gesichtsfeldes einen dunklen Streifen, gelbes Licht und grünes einen hellen, blaues einen dunklen. Nimmt man Licht, welches aus roth und gelb gemischt ist, so erhält man statt der hellen und dunklen Linien beim gewöhnlichen Versuch gelbe Linien entsprechend den hellen, rothe entsprechend den dunklen. Nimmt man weisses Licht, so erhält man grünlich weisse und bläulich rothe Linien.

Ist das Licht circularpolarisirt, so treten auch bei gemischtfarbigem Lichte schwarze Linien auf, die Symmetrielinie der

Erscheinung liegt seitwärts von der Mitte des Gesichtsfeldes, sie geht auf die entgegengesetzte Seite desselben, wenn rechtscirculares mit linkscircularem Lichte vertauscht wird. Während die beim Übergange von der einen zur andern circularen Polarisationsart zur Beobachtung kommenden Verschiebungen auch bei diesem Versuche wie beim vorhergehenden immer kleiner sind, als die nach der Interferenzlehre zu erwartenden, jedoch auch jetzt von diesen nur um eine ganze Anzahl von Streifendistanzen sich unterscheiden, ist die Verschiebung der erwähnten schwarzen Streifen eine viel grössere. Sie findet jedoch auch ihre vollständige Erklärung in der grossen Verschiedenheit der Gangunterschiede, welche bei diesem bezeichneten Wechsel der Polarisationsart die einzelnen farbigen Strahlen durch die Doppelplatte erfahren.

Jeder dieser zwei Versuche lässt sich auch so ausführen, dass die Erscheinungen objectiv auf einem Schirme beobachtet werden können. Die Anordnung des Apparates ist dann folgende. Durch eine Spalte im Fensterladen schickt ein Spiegel Sonnenlicht. Ganz nahe an der Spalte ist das Nicol'sche Prisma, dann das Fresnel'sche Parallelepiped oder statt diesem das Glimmerplättchen aufgestellt. Das Licht aus diesem Apparat fällt auf die in nach Massgabe der Brennweite der anzuwendenden Projectionslinse gewählter grösserer Distanz aufgestellte double plaque. Diese ist entweder mit der Doppelspalte oder zur Hälfte mit einem Glasplättchen verdeckt. In ersterem Falle folgt nun unmittelbar hinter der Doppelplatte nur noch die Projectionslinse, im letzteren Falle diese mit einem Prisma.

Das Nicol'sche Prisma mit dem Parallelepiped sind deshalb so nahe an die Spalte im Fensterladen gestellt, weil etwaige Unebenheiten in den Schliffflächen ihre bildverzerrenden Wirkungen hier in geringerem Masse entfalten, als in grösserer Entfernung von der Spalte.

Es mag hier noch eine Bemerkung, einen misslungenen Versuch betreffend, Platz finden. Zwischen den Fraunhofer'schen Linien F und G gibt es eine Stelle im Spectrum, für welche die Verdrehung der Schwingungen durch die Doppelplatte 540°, also dreimal 180° beträgt. Ich erwartete, dass man, ein Spectrum durch die Doppelplatte so beobachtend, dass die Hälfte der Pupille

von der linksdrehenden, die andere Hälfte von der rechtsdrehenden Platte verdeckt wird, zwischen *F* und *G* einen dunklen Streifen sehen werde. Dieser Streifen zeigte sich jedoch nicht, auch bei einer andern Art der Beobachtung nicht, bei welcher das aus dem Collimator kommende Licht zu gleichen Theilen durch die zwei Hälften der Doppelplatte gesendet wurde. Den Grund des Ausfalls der erwarteten Erscheinung weiss ich nicht mit Bestimmtheit anzugeben, ich will nur den Umstand, dass die von mir angewendete Doppelplatte nicht vollkommen planparallel ist, anführen.

I. Intensitätsformeln.

Auf eine von zwei zur optischen Axe senkrechten Ebenen begrenzte Quarzplatte falle normal ein Strahl mit Schwingungen, welche durch die rechtwinkligen Componenten

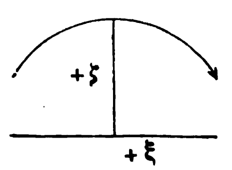
$$\xi = a \operatorname{Sin} \frac{2\pi t}{\tau}, \quad \zeta = c \operatorname{Sin} \frac{2\pi(t+\theta)}{\tau}$$

bestimmt sind. Zur Bestimmung der Veränderungen, welche diese Componenten beim Durchgange durch die Quarzplatte erfahren, kann man dieselben durch äquivalente circulare Schwingungen ersetzen. Schreibt man für ξ und ζ die den obigen gleichen Ausdrücke

$$\frac{a}{2} \operatorname{Sin} \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{a}{2} \operatorname{Sin} \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{c}{2} \operatorname{Cos} \frac{2\pi(t+\theta)}{\tau} - \frac{c}{2} \operatorname{Cos} \frac{2\pi(t+\theta)}{\tau}$$

$$\frac{a}{2} \operatorname{Cos} \frac{2\pi t}{\pi} - \frac{a}{2} \operatorname{Cos} \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{c}{2} \operatorname{Sin} \frac{2\pi(t+\theta)}{\tau} + \frac{c}{2} \operatorname{Sin} \frac{2\pi(t+\theta)}{\tau}$$

und betrachtet je zwei untereinanderstehende Glieder als ein Paar, so stellen das erste und vierte Paar je eine rechtscirculare, das zweite und dritte Paar je eine linkscirculare Schwingung dar. Die Bedeutung der Ausdrücke rechts- und linkscircular wird durch die nebenstehende Figur klar. Die Bewegung von der Richtung der positiven ζ zur Richtung der positiven ξ im



Sinne des Pfeils heisst rechts-, die entgegengesetzte linkscircular. Die Fortpflanzungsrichtung ist die aus der Ebene der Zeichnung heraustretende Senkrechte.

Wird die Dicke der Quarzplatte mit d, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der rechtscircularen Schwingungen mit r, jene der linkscircularen mit l bezeichnet, so sind die Componenten ξ und ζ beim Austritte aus der Platte bestimmt durch

$$\xi = \frac{a}{2}\operatorname{Sin}\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{d}{r}\right)+\frac{a}{2}\operatorname{Sin}\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{d}{l}\right)$$

$$+\frac{c}{2}\operatorname{Cos}\frac{2\pi}{\tau}\left(t+\theta-\frac{d}{l}\right)-\frac{c}{2}\operatorname{Cos}\frac{2\pi}{\tau}\left(t+\theta-\frac{d}{r}\right)$$

$$\zeta = \frac{a}{2}\operatorname{Cos}\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{d}{r}\right)-\frac{a}{2}\operatorname{Cos}\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{d}{l}\right)$$

$$+\frac{c}{2}\operatorname{Sin}\frac{2\pi}{\tau}\left(t+\theta-\frac{d}{l}\right)+\frac{c}{2}\operatorname{Sin}\frac{2\pi}{\tau}\left(t+\theta-\frac{d}{r}\right).$$

Diese Ausdrücke lassen sich zusammenziehen in

$$\xi = a\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{d}{2r}-\frac{d}{2l}\right)+c\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin}\frac{2\pi}{\tau}\left(t+\theta-\frac{d}{2r}-\frac{d}{2l}\right)$$

$$\zeta = -a\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin}\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{d}{2r}-\frac{d}{2l}\right)+c\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}\frac{2\pi}{\tau}\left(t+\theta-\frac{d}{2r}-\frac{d}{2l}\right)$$

worin zur Abkürzung

$$\varphi = \frac{\pi d}{\tau}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right) \tag{1}$$

gesetzt ist. φ bedeutet den Winkel, um welchen die Richtung einer linearen Schwingung in der Quarzplatte verdreht wird, im Sinne des Pfeils in der obigen Figur gezählt.

Die voranstehenden Formeln für ξ und ζ kann man übrigens auch ohne Auflösung der ursprünglichen Componenten in circulare erhalten, wenn man unmittelbar die Eigenschaft der Quarzplatte, die Schwingungsrichtungen zu drehen, in Rechnung stellt. Die Geschwindigkeit u, mit der die sich drehenden

Schwingungen in der Platte fortgepflanzt werden, hängt mit r und l zusammen durch die Gleichung

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{l}\right).$$

Nach dem Austritte aus der Quarzplatte durchlaufe der Strahl noch einen Weg δ mit der Geschwindigkeit v, so sind am Ende dieses Weges die Componenten ξ und ζ gegeben durch

$$\xi = a \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \psi + c \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin}\left(\psi + \frac{2\pi\theta}{\tau}\right)$$

$$\zeta = -a \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} \psi + c \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin}\left(\psi + \frac{2\pi\theta}{\tau}\right)$$

worin wieder zur Abkürzung

$$\psi = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{d}{2r} - \frac{d}{2l} - \frac{\delta}{v}\right) \tag{2}$$

gesetzt ist.

Auf eine zweite Quarzplatte falle ein zweiter Strahl mit den Schwingungscomponenten

$$\xi' = a' \operatorname{Sin} \frac{2\pi t}{\tau}, \quad \zeta' = c' \operatorname{Sin} \frac{2\pi(t+\theta')}{\tau}.$$

Hat die zweite Platte die Dicke d', sind r' und l' die Geschwindigkeiten, mit denen sich die rechts- und linkscircularen Schwingungen in ihr fortpflanzen, geht ferner der Strahl nach dem Austritte aus dieser Platte durch den Weg δ' mit der Geschwindigkeit v', so sind am Ende dieses Weges die Componenten ξ' und ζ' bestimmt durch

$$\xi' = a' \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} \psi' + c' \operatorname{Sin} \varphi' \operatorname{Sin}\left(\psi' + \frac{2\pi\theta'}{\tau}\right)$$

$$\zeta' = -a' \operatorname{Sin} \varphi' \operatorname{Sin} \psi' + c' \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin}\left(\psi' + \frac{2\pi\theta'}{\tau}\right)$$

worin

$$\varphi' = \frac{\pi d'}{\tau}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{l'}\right) \tag{3}$$

$$\psi' = \frac{2\pi}{\tau}\left(l - \frac{d'}{2r'} - \frac{d'}{2l'} - \frac{\delta'}{v'}\right)$$

gesetzt sind.

Werden nunmehr die Componenten ξ und ξ' zusammengesetzt, so liefern sie eine einfache Schwingung, für das Quadrat ihrer Amplitude findet man den Werth

$$J_1 = a^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi + a'^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi' + 2aa' \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Cos}(\psi' - \psi)$$
$$+ c^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi + c'^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi'$$
$$+ 2cc' \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\varphi' \operatorname{Cos}\left(\psi' - \psi - \frac{2\pi\theta}{\tau} + \frac{2\pi\theta'}{\tau}\right)$$
$$+ ac \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Cos}\frac{2\pi\theta}{\tau} + a'c' \operatorname{Sin} 2\varphi' \operatorname{Cos}\frac{2\pi\theta'}{\tau}$$
$$+ 2a'c \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Cos}\left(\psi' - \psi - \frac{2\pi\theta}{\tau}\right)$$
$$+ 2ac' \operatorname{Sin}\varphi' \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\left(\psi - \varphi + \frac{2\pi\theta'}{\tau}\right)$$

und J_1 ist zugleich das Mass der Intensität des den Componenten ξ und ξ' entsprechenden Lichtes.

Setzt man ebenso die Componenten ζ und ζ' zusammen, so ist das Quadrat der Amplitude der resultirenden Schwingung

$$J_2 = a^2 \operatorname{Sin}\varphi + a'^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi' + 2aa' \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\varphi' \operatorname{Cos}(\psi' - \psi)$$
$$+ c^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi + c'^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi' + 2cc' \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Cos}\left(\psi' - \psi + \frac{2\pi\theta}{\tau} - \frac{2\pi\theta'}{\tau}\right)$$
$$- ac \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Cos}\frac{2\pi\theta}{\tau} - a'c' \operatorname{Sin} 2\varphi' \operatorname{Cos}\frac{2\pi\theta'}{\tau}$$
$$- 2a'c \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\varphi' \operatorname{Cos}\left(\psi' - \psi - \frac{2\pi\theta}{\tau}\right)$$
$$- 2ac' \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Cos}\left(\psi' - \psi + \frac{2\pi\theta'}{\tau}\right)$$

und ist J_2 das Mass der Intensität des den Componenten ζ und ζ' entsprechenden Lichtantheils.

Das Mass für die Gesammtintensität des aus der Zusammensetzung der beiden Strahlen resultirenden Lichtes ist die Summe von J_1 und J_2, also

$$
\begin{aligned}
J = & a^2 + a'^2 + 2aa' \operatorname{Cos}(\varphi - \varphi') \operatorname{Cos}(\psi' - \psi) \\
& + c^2 + c'^2 + 2cc' \operatorname{Cos}(\varphi - \varphi') \operatorname{Cos}\left(\psi' - \psi + \frac{2\pi\theta}{\tau} - \frac{2\pi\theta'}{\tau}\right) \\
& + 2a'c \operatorname{Sin}(\varphi - \varphi') \operatorname{Cos}\left(\psi' - \psi - \frac{2\pi\theta}{\tau}\right) \\
& - 2ac' \operatorname{Sin}(\varphi - \varphi') \operatorname{Cos}\left(\psi' - \psi + \frac{2\pi\theta'}{\tau}\right).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Für den Fall, dass die beiden auf die Quarzplatte fallenden Strahlen von gleicher Intensität und einerlei Art sind, hat man

$$a = a', \; c = c', \; \theta = \theta'$$

und für den Fall, dass die beiden Quarzplatten die Hälften der Soleil'schen Doppelplatte sind, hat man

$$\varphi' = -\varphi.$$

Unter diesen Voraussetzungen vereinfachen sich die Formeln für J_1, J_2 und J zu

$$
\begin{aligned}
J_1 = & 2a^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi \, [1 + \operatorname{Cos}(\psi' - \psi)] + 2c^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi \, [1 - \operatorname{Cos}(\psi' - \psi)] \\
& + 2ac \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Sin}(\psi' - \psi) \operatorname{Sin} \frac{2\pi\theta}{\tau} \\
J_2 = & 2a^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi \, [1 - \operatorname{Cos}(\psi' - \psi)] + 2c^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi \, [1 + \operatorname{Cos}(\psi' - \psi)] \\
& + 2ac \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Sin}(\psi' - \psi) \operatorname{Sin} \frac{2\pi\theta}{\tau} \\
J = & 2(a^2 + c^2)) \, [1 + \operatorname{Cos} 2\varphi \operatorname{Cos}(\psi' - \psi)] \\
& + 4ac \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Sin}(\psi' - \psi) \operatorname{Sin} \frac{2\pi\theta}{\tau}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Die Differenz $\psi' - \psi$ ist die Verzögerung in der Phase, welche der erste Strahl gegen den zweiten erfahren hat. Bezeichnet man mit λ die Wellenlänge des Strahls in Luft, so kann man

$$\psi' - \psi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} \tag{6}$$

setzen und bedeutet dann Δ den auf einen Weg in Luft reducir-

ten Gangunterschied der beiden Strahlen. Nach Einführung dieser Bezeichnung wird die Formel für die Intensität

$$(7)\quad \begin{aligned} J &= 2(a^2+c^2)\left(1+\operatorname{Cos} 2\varphi \operatorname{Cos}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right) \\ &+ 4ac \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Sin}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\operatorname{Sin}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}. \end{aligned}$$

Bei den hier zu discutirenden Versuchen kommt bei Anwendung von polarisirtem Licht dieses immer aus einem Nicol'schen Prisma und einem Fresnel'schen Parallelepiped. Ist die Einfallsebene des letzteren parallel mit der Richtung der Componente ζ, so ist die zwischen den Componenten ξ und ζ bestehende Differenz der Phasenzeiten

$$\theta = -\frac{\tau}{4}$$

und bedeuten demnach die ursprünglich angenommenen Schwingungscomponenten

$$\xi = a \operatorname{Sin}\frac{2\pi t}{\tau},\quad \zeta = -c \operatorname{Cos}\frac{2\pi t}{\tau}$$

eine linkscirculare Schwingung.

Bildet die Richtung der aus dem Nicol'schen Prisma austretenden Schwingungen mit der Einfallsebene des Parallelepipedes den Winkel α, so wird, die Amplitude dieser Schwingungen $=1$ angenommen,

$$a = \operatorname{Sin}\alpha,\ c = \operatorname{Cos}\alpha$$

und die Formel für J verwandelt sich in

$$(8)\quad J = 2\left(1+\operatorname{Cos} 2\varphi \operatorname{Cos}\frac{2\pi\Delta}{\lambda} - \operatorname{Sin} 2\alpha \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Sin}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right).$$

Das auf die Doppelplatte fallende Licht ist linkselliptisch polarisirt, wenn Sin 2α positiv, rechtselliptisch, wenn Sin 2α negativ ist. Die Polarisation ist eine links- oder rechtscirculare, wenn Sin $2\alpha = +1$ oder $= -1$, sie ist eine lineare, wenn Sin $2\alpha = 0$.

II. Talbot'sche Linien.

Die abgeleiteten Intensitätsformeln können zur Erklärung der Erscheinungen, welche bei dem ersten im Eingange beschriebenen Versuche auftreten, angewandt werden, sobald man in den Ausdrücken für ψ und ψ' unter δ die Dicke des Glasplättchens, welches die eine Hälfte der Doppelplatte bedeckt, versteht und unter v die Geschwindigkeit des Lichtes im Glase. δ' ist $= \delta$ und v' die Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft.

Wird zuerst die Doppelplatte weggedacht, also $d = 0$ und $\varphi = 0$ gesetzt, so bleibt

$$\psi' - \psi = \frac{2\pi\delta}{\tau}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right) = \frac{2\pi\delta(\mu - 1)}{\lambda}$$

und

$$\Delta = \delta\,(\mu - 1)$$

unter μ den Brechungsquotienten des Glases für das angewandte Licht, unter λ die Wellenlänge dieses Lichtes in Luft verstanden.

Unter diesen Voraussetzungen erhält die Formel (7) folgende Gestalt:

$$J = 2\,(a^2 + c^2)\left(1 + \mathrm{Cos}\,\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right).$$

Sie gibt die Vertheilung der Lichtintensität im Spectrum unabhängig von der Art der Polarisation des angewandten Lichtes und zwar die Minima der Intensität für jene Stellen des Spectrums, deren Wellenlängen der Bedingung

$$\frac{2\pi\Delta}{\lambda} = (2n + 1)\,\pi$$

unter n eine ganze Zahl verstanden, genügen und die Maxima für jene Orte, für welche Δ einer ganzen Anzahl von λ gleich wird.

Die Einführung der Doppelplatte bringt nun in dem Verhalten der Erscheinung Veränderungen hervor, und zwar, da der Winkel 2φ für die verschiedenen Strahlen vom rothen bis zum

violetten Ende des Spectrums continuirlich wächst, in den verschiedenen Theilen des Spectrums auch in verschiedener Weise.

Die Winkel, um welche eine Quarzplatte von 1 Mm. Dicke die Polarisationsebene der den Fraunhofer'schen Hauptlinien entsprechenden Strahlen dreht, sind folgende:

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
15°55	17°22	21°76	27°46	32°96	42°37	59°98.

Da die Soleil'sche Doppelplatte 7·5 Mm. dick ist, so sind die diesen Strahlen entsprechenden Werthe von 2φ in Graden

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
233	258	325	412	490	636	745

Zwischen den Linien *D* und *E* befindet sich daher eine Stelle, für welche $2\varphi = 360°$. Für diese Stelle hat also die Intensitätsformel dieselbe Gestalt,

$$J=2\,(a^2+c^2)\left(1+\text{Cos}\,\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right)$$

wie bei abwesender Doppelplatte. An dieser Stelle ist J unabhängig vom Polarisationszustande des einfallenden Lichtes, es tritt daher an dieser Stelle keinerlei Veränderung der Intensität, keinerlei Verschiebung in den Interferenzstreifen ein, wie auch die Polarisationsarten gewechselt werden mögen. Da, wie später sich ergeben wird, die Doppelplatte keinen Einfluss auf den Werth von Δ hat, so wird an dieser Stelle des Spectrums das Interferenzphänomen sich nicht ändern, wenn man die Doppelplatte aus dem Gange der Strahlen heraushebt.

Zwischen den Linien *F* und *G* befindet sich eine Stelle, welche in einer Beziehung ganz so sich verhält, wie die eben hervorgehobene. Es ist jene Stelle, für welche $2\varphi = 540°$ also $\text{Cos}\,2\varphi = -1$, $\text{Sin}\,2\varphi = 0$ ist. Die Intensität des Lichtes an dieser Stelle ist bestimmt durch die Formel

$$J=2\,(a^2+c^2)\left(1-\text{Cos}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right)$$

also ebenfalls unabhängig von dem Polarisationszustande des Lichtes. Auch hier bleiben, wenn letzterer irgendwie verändert

wird, die Interferenzstreifen unbeweglich. Es unterscheidet sich aber diese Stelle von der früheren dadurch, dass hier ein Minimum der Intensität einem Δ entspricht, welches ein ganzes Vielfache der Wellenlänge ist, während an der früheren Stelle dem Gangunterschiede von einer ganzen Anzahl Wellenlängen ein Maximum der Intensität entspricht. Die Wegnahme der Doppelplatte würde also das Interferenzphänomen an dieser zweiten Stelle nicht ungeändert lassen, sondern eine Vertauschung der Maxima und Minima, also eine Verschiebung der Interferenzlinien um die Hälfte der Streifendistanz zur Folge haben.

Die zwei hervorgehobenen Stellen sind in aller Strenge mathematische Linien, es werden aber auch die benachbarten Orte des Spectrums, für welche die Werthe des Winkels 2φ von $360°$ oder $540°$ nur sehr wenig verschieden sind, das gleiche Verhalten zeigen, insofern sich sehr kleine Intensitätsänderungen oder sehr kleine Verschiebungen der Interferenzlinien der Beobachtung entziehen.

Ganz andere Eigenthümlichkeiten, als diese zwei Orte im Spectrum, für welche 2φ eine gerade Anzahl rechter Winkel war, bieten jene dar, für welche 2φ eine ungerade Anzahl rechter Winkel ist. Die erste solche Stelle liegt zwischen den Linien C und D, für dieselbe ist $2\varphi = 270°$, $\text{Cos}\, 2\varphi = 0$, $\text{Sin}\, 2\varphi = -1$, also

$$J = 2\,(a^2 + c^2) - 4ac\, \text{Sin}\, \frac{2\pi\Delta}{\lambda}\, \text{Sin}\, \frac{2\pi\theta}{\tau}\,.$$

Ist das auf die Doppelplatte fallende Licht linear polarisirt, somit $\theta = 0$, so wird

$$J = 2\,(a^2 + c^2)$$

unabhängig von Δ. Es ist also an dieser Stelle kein Maximum oder Minimum der Intensität möglich und auch in der Nachbarschaft dieser Stelle, wo $\text{Cos}\, 2\varphi$ zwar nicht stricte $= 0$, sondern nur sehr klein ist, entziehen sich die Maxima und Minima der Beobachtung, an dieser Stelle giebt es keine Interferenzlinien.

Ist aber das auf die Doppelplatte fallende Licht rechtselliptisch polarisirt also $\text{Sin}\, \frac{2\pi\theta}{\tau}$ positiv, so treten auch an dieser

Stelle Interferenzlinien auf und zwar wird J ein Minimum, wenn

$$\frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \pm(4n+1)\frac{\pi}{2},$$

und ein Maximum, wenn

$$\frac{2\pi\Delta}{\lambda} = (4n+3)\frac{\pi}{2}.$$

Ebenso gibt linkselliptisch polarisirtes Licht, für welches $\mathrm{Sin}\frac{2\pi\theta}{\tau}$ negativ ist, Interferenzlinien, mit dem Unterschiede jedoch, dass an die Stelle des früheren Maximums jetzt ein Minimum tritt und umgekehrt. Beim Übergange vom rechtselliptischen zu linkselliptischem Lichte vertauschen sich Maxima und Minima, die Interferenzlinien verschieben sich plötzlich um die halbe Distanz zweier Streifen.

Die Grössenunterschiede zwischen den Maximis und Minimis werden um so bedeutender, je grösser $\mathrm{Sin}\frac{2\pi\theta}{\tau}$ und je näher a und c einander liegen, sie werden am bedeutendsten für $a = c$ und $\mathrm{Sin}\frac{2\pi\theta}{\tau} = \pm 1$, also für circular polarisirtes Licht. Für diesen Fall wird

$$J = 4a^2\left(1 \mp \mathrm{Sin}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right),$$

worin das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem das Licht rechts- oder linkscircular polarisirt ist. Die Minima der Intensität sind $J = 0$, die entsprechenden Interferenzlinien ganz schwarz.

Ganz dieselben Verhältnisse wie an der soeben betrachteten Stelle des Spectrums, finden sich an jener, für welche $2\varphi = 630°$, also ebenfalls $\mathrm{Cos}\, 2\varphi = 0$ und $\mathrm{Sin}\, 2\varphi = -1$ ist. Diese Stelle liegt unmittelbar vor der Linie *G*.

Endlich verhält sich noch jene Stelle zwischen *E* und *F*, für welche $2\varphi = 450°$, $\mathrm{Cos}\, 2\varphi$ ebenfalls $= 0$, $\mathrm{Sin}\, 2\varphi$ aber $= +1$ ist, in ähnlicher Weise. Es vertauschen nur hier im Gegenhalt zu den zwei andern Stellen rechts- und linkselliptisch polarisirte Strahlen ihre Rolle.

Zur Darstellung der Vorgänge in den übrigen Theilen des Spectrums soll die Formel (8) benützt werden. Um die Orte zu erfahren, für welche

$$J=2\left(1+\operatorname{Cos} 2\varphi \operatorname{Cos}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}-\operatorname{Sin} 2\alpha \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Sin}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right)$$

ein Maximum oder Minimum wird, hat man diese Gleichung nach λ zu differenziren. Dabei können φ und Δ, weil sie sich nur sehr wenig von einem bis zum nächsten Interferenzstreifen ändern, als constant betrachtet werden. Es wird nach Weglassung des Factors $\frac{2\pi\Delta}{\lambda^2}$

$$\frac{dJ}{d\lambda}=-\operatorname{Cos} 2\varphi \operatorname{Sin}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}-\operatorname{Sin} 2\alpha \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Cos}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}$$

und die Werthe von $\frac{2\pi\Delta}{\lambda}$, für welche J grösste und kleinste Werthe hat, sind die Wurzeln der Gleichung

$$\operatorname{Sin}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\operatorname{Cos} 2\varphi+\operatorname{Cos}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\operatorname{Sin} 2\alpha \operatorname{Sin} 2\varphi=0$$

oder auch der Gleichung

$$\operatorname{Tang}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}=-\operatorname{Tang} 2\varphi \operatorname{Sin} 2\alpha\,. \qquad (10)$$

Da

$$\frac{d^2J}{d\lambda^2}=-\operatorname{Cos} 2\varphi \operatorname{Cos}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}+\operatorname{Sin} 2\alpha \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Sin}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}$$

mit Hilfe der vorhergehenden Gleichung auf die Form

$$-(\operatorname{Cos}^2 2\varphi+\operatorname{Sin}^2 2\alpha \operatorname{Sin}^2 2\varphi)\frac{\operatorname{Cos}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}}{\operatorname{Cos} 2\varphi}$$

gebracht werden kann, so entsprechen die Maxima von J jenen Wurzeln der Gleichung (10), für welche $\operatorname{Cos}\frac{2\pi\Delta}{\lambda}$ und $\operatorname{Cos} 2\varphi$

gleiche Zeichen, und die Minima jenen Wurzeln, für welche diese zwei Cosinus ungleiche Zeichen haben.

Ist das Licht geradlinig polarisirt, also $\alpha=0$, so geht die Gleichung (10) über in

$$\text{Tang}\,\frac{2\pi\Delta}{\lambda}=0 \tag{11}$$

und diese hat alle ganzen Vielfachen von π zu Wurzeln. Es soll die Discussion zunächst beschränkt werden auf den rothen Theil des Spectrums. In diesem ist Cos 2φ negativ, es entsprechen also den geraden Vielfachen von π die Minima der Intensität, den ungeraden die Maxima.

Geht man zu rechtselliptisch polarisirtem Lichte über, nimmt also α negativ, jedoch zunächst sehr klein, so werden auch die Wurzeln der Gleichung (10) nur wenig von den Vielfachen von π sich unterscheiden und zwar, da für den rothen Theil des Spectrums Tang 2φ positiv ist, also an die Stelle der Null in der Gleichung (11) eine kleine positive Zahl tritt, grösser sein als die Vielfachen von π. Demgemäss werden auch die Maxima und Minima sich verschieben und zwar, da wachsenden Werthen von $\frac{2\pi\Delta}{\lambda}$ abnehmende von λ entsprechen, gegen das violette Ende des Spectrums. Diese Verschiebung wird immer grösser mit den wachsenden absoluten Werthen von α, sie erreicht ihren grössten Werth, wenn $\alpha=-45^\circ$, Sin $2\alpha=-1$ wird, das Licht also circular polarisirtes ist. Die Gleichung (10) wird dann

$$\text{Tang}\,\frac{2\pi\Delta}{\lambda}=\text{Tang}\,2\varphi\,. \tag{12}$$

Nach dem unmittelbaren Anblicke dieser Gleichung könnte man meinen, die Wurzeln der Gleichung (10) seien beim Übergange von der Gleichung (11) zur Gleichung (12) sämmtlich um 2φ gewachsen. Nach der soeben geführten Betrachtung über das successive Anwachsen der Wurzeln darf jedoch nicht 2φ, sondern muss jener Bogen im ersten Quadranten, der mit 2φ die gleiche Tangente hat, als Zuwachs der Wurzeln genommen werden, also, da 2φ in diesem Theile des Spectrums zwischen 180° und

270° liegt, der Bogen $2\varphi - 180°$ oder $2\varphi - \pi$. Ist z. B. $2\varphi = 225°$ oder $= \frac{5\pi}{4}$, so beträgt der Zuwachs der Wurzeln nicht $\frac{5\pi}{4}$, sondern nur $\frac{\pi}{4}$ und dem entsprechend beträgt die Verschiebung der Interferenzstreifen beim Übergange von linearpolarisirtem zu rechtscircularpolarisirtem Licht

$$\frac{\pi}{4} : 2\pi = \frac{1}{8}$$

der Streifendistanz.

Geht der Winkel α über $-45°$ hinaus, so wird Sin 2α wieder kleiner, die Wurzeln der Gleichung (10) nehmen ab und dem entsprechend rücken auch die Interferenzlinien gegen ihre ursprüngliche Lage zurück, welche sie wieder erreichen, wenn $\alpha = -90°$, Sin $2\alpha = 0$ geworden ist.

Lässt man den Winkel α noch weiter im negativen Sinne wachsen, so wird Sin 2α positiv und es nehmen jetzt die Wurzelwerthe der Gleichung (10) successive ab, bis Sin $2\alpha = +1$ wird. Dem entsprechend gehen auch die Interferenzlinien aus ihrer ursprünglichen Lage gegen das rothe Ende, und zwar an der oben zum Beispiel gewählten Stelle um $^1/_8$ der Streifendistanz. Beim Übergange von rechts- zu linkscircularem Licht tritt also an dieser Stelle eine Verschiebung um $^1/_4$ Streifendistanz ein.

Allgemein beträgt die Verschiebung der Interferenzlinien beim Übergange von linear- zu rechtscircularpolarisirtem Licht

$$\frac{2\varphi - \pi}{2\pi}$$

Theile einer Streifendistanz gegen das violette, beim Übergange von linear- zu linkscircularpolarisirtem Licht eben so viel gegen das rothe Ende des Spectrums. Im Ganzen also tritt beim Übergange von rechts- zu linkscircularem Lichte eine Verschiebung um

$$\frac{4\varphi}{2\pi} - 1$$

Theile einer Streifendistanz gegen das rothe Ende des Spectrums ein.

Diese Verschiebung wird für die weiter gegen das rothe Ende zu liegenden Theile des Spectrums immer kleiner, für die weiter gegen die Linie *C* hin gelegenen Theile des Spectrums immer grösser, bis sie hinter dieser Linie, wo $2\varphi = \frac{3\pi}{2}$, $4\varphi = 3\pi$ ist, den Werth einer halben Streifendistanz erreicht.

Auch die Geschwindigkeit, mit der sich die Interferenzstreifen bei einer successiven Änderung des Winkels α verschieben, ist vom Anfang des Roth bis zur Linie *C* sehr verschieden, sie wächst mit der Grösse des Werthes von Tang 2φ, also vom Anfang des Roth bis zu *C* hin und wird hinter dieser Linie mit Tang 2φ zugleich unendlich, die Verschiebung verwandelt sich in den plötzlichen Sprung.

In der folgenden Partie des Spectrums, für welche die Werthe von 2φ zwischen 270° und 360° liegen, ist der Verhalt der Erscheinungen ein ganz anderer, als in der soeben betrachteten ersten Abtheilung des Spectrums. Zuerst entsprechen für den Fall des geradlinig polarisirten Lichtes, entgegengesetzt gegen früher, jenen Wurzeln der Gleichung (11), welche gerade Vielfache von π sind, die Maxima, und den ungeraden Vielfachen die Minima, weil jetzt Cos 2φ positiv ist.

Ferner ist in dieser zweiten Partie Tang 2φ negativ. Demnach wechselt die mit den Änderungen von α verbundene Änderung der Wurzeln der Gleichung (10) ihren Sinn. Es verschieben sich daher auch die Interferenzlinien beim Übergange von linear- zu rechtselliptisch polarisirtem Lichte nicht gegen das violette sondern gegen das rothe Ende, also beim Übergange von rechts- zu linkscircular polarisirtem Lichte gegen das violettte Ende des Spectrums.

Was die Zu- oder die Abnahme der Wurzeln der Gleichung (10) beim Übergange von der Form (11) bis zur Form (12) anbelangt, so ist selbe gleich dem Winkel im ersten Quadranten, der mit 2φ die gleiche Tangente hat, er ist $360°—2\varphi$ oder $2\pi—2\varphi$. Die Verschiebung der Interferenzstreifen beträgt beim Übergange von linear- zu circularpolarisirtem Lichte

$$1 - \frac{2\varphi}{2\pi}$$

Theile einer Streifendistanz, und beim Übergange von rechts- zu linkscircularpolarisirtem Lichte

$$2 - \frac{4\varphi}{2\pi}$$

Theile einer Streifendistanz gegen das violette Ende des Spectrums.

Die Verschiebungen und die Geschwindigkeiten, mit denen sie stattfinden, nehmen vom Anfang dieser Abtheilung bis gegen ihr Ende, für welches $2\varphi = 360°$ ist, successive ab.

Die Erscheinungen in der dritten Abtheilung, in welcher die Werthe von 2φ zwischen 360° und 450° liegen, bilden gewissermassen das Spiegelbild zu den Erscheinungen in der zweiten Abtheilung, die Grenze zwischen beiden Abtheilungen stellt den Spiegel vor. Wie in der zweiten Abtheilung, bestimmen für den Fall des linearpolarisirten Lichtes von den Wurzeln der Gleichung (11) die geraden Vielfachen von π die Maxima, die ungeraden die Minima der Intensität. Die Verschiebungen der Interferenzstreifen beim Übergange zu elliptischpolarisirtem Lichte sind aber jetzt wegen des positiven Zeichens von Tang 2φ gegen die der zweiten Abtheilung die verkehrten.

Wie sich die Erscheinungen in den weiter gegen das violette Ende liegenden Partien des Spectrums gestalten, ist nach den bisher gegebenen Erläuterungen leicht zu übersehen.

Für den Fall, dass das auf die Doppelplatte fallende Licht circularpolarisirtes ist, nimmt die Intensitätsformel eine sehr einfache und leicht discutirbare Gestalt an. Setzt man in (7)

$$a = c, \ \text{Sin}\,\frac{2\pi\theta}{\tau} = \pm 1$$

so wird

$$J = 4a^2\left[1 + \text{Cos}\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda} \pm 2\varphi\right)\right] \tag{13}$$

und gilt das obere Zeichen für rechts-, das untere für linkscircularpolarisirtes Licht.

Für die Maxima und Minima liefert diese Formel sehr einfache und zwar für alle Theile des Spectrums zugleich geltende Bedingungsgleichungen. So ist die Bedingung für die Minima

$$\frac{2\pi\Delta}{\lambda} \mp 2\varphi = (2n+1)\,\pi$$

oder

(14) $$\frac{2\pi\Delta}{\lambda} = (2n+1)\,\pi \pm 2\varphi\,.$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass durch diese Gleichung für die Minima dieselben Orte im Spectrum bestimmt sind, welche früher durch eine umständlichere Discussion gefunden worden sind.

Was jedoch die absolute Grösse und die Richtung der Verschiebungen, welche in den Interferenzlinien beim Übergange von rechts- zu linkscircularem Lichte eintreten, anbetrifft, so legt diese Formel ein ganz anderes Resultat an die Hand, als das vorhin gefundene. Da sich der Quotient $\frac{2\pi\Delta}{\lambda}$ bei Vertauschung der zwei bezeichneten Lichtarten von $(2n+1)\pi+2\varphi$ zu $(2n+1)\pi-2\varphi$, also um 4φ verkleinert, so muss man daraus auf eine, in allen Theilen des Spectrums gleichsinnige Verschiebung der Interferenzlinien gegen das rothe Ende und zwar um

$$\frac{4\varphi}{2\pi}$$

Theile einer Streifendistanz schliessen, umsomehr, als 4φ zufolge der Formel (1) gerade den beim Wechsel der zwei bezeichneten Lichtarten eintretenden Zuwachs der Verzögerung zwischen den durch die beiden Hälften der Doppelplatte gehenden Strahlen bedeutet. Der Unterschied zwischen den durch diese und den durch die früheren Betrachtungen gefundenen Verschiebungen beträgt jedoch immer eine ganze Anzahl von Streifendistanzen.

Wenn man also auch von dieser Anschauung ausgeht, wie ich es in früheren Mittheilungen über diese Versuche gethan, so findet man doch keinen Widerspruch zwischen ihr und der

Beobachtung, wenn man nur die Lagen der Interferenzlinien vor und nach der Verschiebung misst und die gefundenen Differenzen um eine ganze Anzahl von Streifendistanzen ergänzt.

III. Versuch mit zwei Spalten.

AB stelle den Querschnitt einer Spalte in einem undurchsichtigen Schirme *OO′* dar. Die Summe aller Bewegungen, welche durch die in *AB* unter dem Winkel β gebeugten Strahlen gleichzeitig in den zu diesen Strahlen normalen Schnitt *O′N* gelangen, ist proportional dem Ausdrucke

O A M B O
N

$$\int dx \operatorname{Sin} \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{MN}{v}\right),$$

wenn, $OM = x$ gesetzt, dx ein Element der Spaltenbreite bedeutet. Die Grenzen, innerhalb welcher das Integral zu nehmen ist, sind $x = OA = p$ und $x = OB = p + b$. b ist die Breite der Spalte. Setzt man noch $BO' = q$, so ist

$$MN = MO' \operatorname{Sin} \beta = (p + b + q - x) \operatorname{Sin} \beta$$

und der Werth des Integrals wird

$$\frac{\lambda}{\pi \operatorname{Sin} \beta} \operatorname{Sin} \frac{\pi b \operatorname{Sin} \beta}{\lambda} \operatorname{Sin} \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{q \operatorname{Sin} \beta}{v} - \frac{b \operatorname{Sin} \beta}{2v}\right)$$

worin λ die Wellenlänge bedeutet.

Ist noch eine Spalte von derselben Breite b in der Distanz e von der ersten vorhanden, so ist der Ausdruck für die Summe der von ihr unter dem Winkel β ausgehenden und gleichzeitig in *O′N* anlangenden Bewegungen analog dem soeben abgeleiteten, es ist nur q um $(b + e)$ Sin β kleiner zu nehmen.

Das aus der ersten Spalte kommende Licht verhält sich also zu dem aus der zweiten Spalte kommenden, als hätte es einen um $(b + e)$ Sin β längeren Weg zurückgelegt, als das letztere.

Die oben abgeleiteten Intensitätsformeln, z. B. die Formeln (5), (7), (8) gelten daher auch für diesen Fall, wenn man in dem

Ausdrucke für $\psi'-\psi$

$$\delta=(b+e)\,\mathrm{Sin}\,\beta\,,\ \delta'=0$$

setzt und ausserdem jeder der Amplituden a und c den Factor

$$\frac{\lambda}{\pi\,\mathrm{Sin}\,\beta}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi b\,\mathrm{Sin}\,\beta}{\lambda}$$

hinzufügt.

Den grössten und kleinsten Werthen dieses Factors entsprechen die Maxima und Minima der Lichtintensität erster Classe, den grössten und kleinsten Werthen des andern durch die Formeln (5, 7, 8) ausgedrückten Factors, die Maxima und Minima zweiter Classe. Die letzteren bilden die hellen und dunklen Streifen im Mittelfelde der Erscheinung.

Den folgenden Betrachtungen soll die Formel (8) zu Grunde gelegt werden, der Ausdruck für die Intensität wird

$$J=\frac{2\lambda^2}{\pi^2\,\mathrm{Sin}^2\,\beta}\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{\pi b\,\mathrm{Sin}\,\beta}{\lambda}\Big(1+\mathrm{Cos}\,2\varphi\,\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi\Delta}{\lambda}$$
$$-\,\mathrm{Sin}\,2\alpha\,\mathrm{Sin}\,2\varphi\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\Big).$$

Ist das Licht linearpolarisirt, $\alpha=0$, so ist

$$J=\frac{2\lambda^2}{\pi^2\,\mathrm{Sin}\,\beta}\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{\pi b\,\mathrm{Sin}\,\beta}{\lambda}\Big(1+\mathrm{Cos}\,2\varphi\,\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\Big).$$

Es wird für $\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi\Delta}{\lambda}=+1$ also für $\Delta=0$ die Intensität ein Maximum oder Minimum, je nachdem $\mathrm{Cos}\,2\varphi$ positiv oder negativ ist.

Nimmt man z. B. rothes Licht, für welches $\mathrm{Cos}\,2\varphi$ negativ ist, so erscheint die Mitte des Interferenzfeldes dunkel, wählt man gelbes Licht, für welches $\mathrm{Cos}\,2\varphi$ negativ ist, so ist die Mitte hell. In beiden Fällen ist auch die Vertheilung der Interferenzlinien bezüglich der Mitte symmetrisch. Man kann daraus schliessen, dass für $\beta=0$ auch $\Delta=0$ also $\psi'-\psi=0$ ist.

Nun war allgemein

$$\psi'-\psi=\frac{\pi d}{\tau}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{l}\right)+\frac{2\pi\delta}{v\tau}-\frac{\pi d'}{\tau}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{l'}\right)-\frac{2\pi\delta'}{v'\tau}.$$

In unserem Falle ist $d=d'$ und $\delta'=0$ und für $\beta=0$ auch $\delta=0$, also bleibt

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{l}-\frac{1}{r'}-\frac{1}{l'}=0.$$

Da beide Platten die Polarisationsebene um gleiche Winkel, aber entgegengssetzt drehen, also $\varphi'=-\varphi$ ist, so folgt aus den Formeln (1) und (3)

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{l}=-\frac{1}{r'}+\frac{1}{l'}$$

und aus dieser und der vorhergehenden Gleichung ergibt sich

$$r=l', \quad l=r'$$

d. h. die rechts- und linkscircularen Strahlen vertauschen in den zwei entgegengesetzt drehenden Arten des Quarzes vollständig ihre Rollen, in beiden Arten kommen dieselben absoluten Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit vor. Es bedeutet daher Δ nur den durch die Beugung in den zwei Öffnungen veranlassten Gangunterschied, es ist

$$\Delta=(b+e)\,\mathrm{Sin}\,\beta.$$

Die weitere Discussion der Intensitätsformel ist auch für diesen Versuch in analoger Weise zu führen wie für den vorhergehenden. Nur ist jetzt Δ die Variable, nach der die Formel für J differenzirt werden muss, um die Bedingungsgleichung für die Maxima und Minima von J zu erhalten. Diese Bedingungsgleichung ist jedoch wieder die Gleichung (10), durch ihre Wurzeln sind auch jetzt die Orte der Maxima und Minima bestimmt.

Im rothen Lichte liegen für linearpolarisirtes Licht die Minima in jenen Theilen des Gesichtsfeldes, welche durch

$$\Delta=0, \ \pm\lambda, \ \pm 2\lambda, \ldots$$

bestimmt sind.

Beim Ubergange zu rechtselliptischem Lichte wachsen die Wurzelwerthe, so dass die Minima an die Stellen rücken, für welche, unter ε den Wurzelzuwachs verstanden,

$$\Delta = \varepsilon, \ \pm\lambda + \varepsilon, \ \pm 2\lambda + \varepsilon, \ldots .$$

Es rückt also das Interferenzphänomen gegen die Seite der positiven Δ vor. Das Umgekehrte tritt bei Anwendung von linkselliptischem Lichte ein. Die grösste Verschiebung nach der Seite der positiven Δ tritt bei rechtscircularem Lichte ein und sie beträgt

$$\frac{2\varphi - \pi}{2\pi}$$

Theile der Distanz zweier Streifen. Die Verschiebung im entgegengesetzten Sinne beim Übergange vom rechts- zu linkscircularem Lichte ist doppelt so gross, beträgt also

$$\frac{4\varphi}{2\pi} - 1$$

Theile einer Streifendistanz, nach dieser Betrachtung also wieder um eine Streifendistanz weniger als sich nach der Formel (9) ergibt.

Für Licht, dessen Drehungswinkel 2φ zwischen 270° und 360° liegt, fallen, falls es linearpolarisirt ist, die Minima an die Orte, für welche

$$\Delta = \pm\frac{\lambda}{2}, \ \pm\frac{3\lambda}{2}, \ldots .$$

beim Übergange zu rechtselliptischem Lichte gehen die Minima an Orte, für welche

$$\Delta = \pm\frac{\lambda}{2} - \varepsilon, \ \pm\frac{3\lambda}{2} - \varepsilon, \ldots .$$

Es rückt also das Interferenzphänomen gegen die Seite der negativen Δ vor, der Verschiebung grösster Werth ist

$$\frac{2\pi - 2\varphi}{2\pi}$$

Theile einer Streifendistanz. Beim Übergange von rechts- zu linkscircularem Lichte beträgt die Verschiebung

$$2-\frac{4\varphi}{2\pi}$$

Theile der Streifendistanz nach der Seite der positiven Δ.

Zur Erklärung der Erscheinungen, welche bei Anwendung eines aus verschiedenen Farben gemischten, namentlich also des weissen Lichtes sich zeigen, ist es nothwendig, die Orte für die Maxima und Minima für verschiedene Farben numerisch zu berechnen.

Nimmt man für die Wellenlängen der den Fraunhofer'schen Linien entsprechenden Strahlen die genäherten Werthe

B	*C*	*D*	*E*	*F*
0·00069	66	59	53	49

so erhält man unter der Voraussetzung linearpolarisirten Lichtes folgende den Minimis entsprechende Werthe von Δ und zwar mit Weglassung des Factors 10^{-4} für

B	0,	69,	138,	206,	. . . .
C	0,	66,	131,	197,	. . . .
D	29,	88,	147,	207,	. . . .
E	26,	79,	132,	185,	. . . .
F	0,	49,	97,	146,	. . . .

und eine ebensolche Reihe negativer Δ. In die Mitte dieser Werthe fallen die den Maximis entsprechenden Δ.

Wird dieser Versuch mit den zwei Spalten ohne die drehende Platte gemacht, so haben alle Strahlen für Δ=0 ihr Maximum, die Mitte des Gesichtsfeldes ist weiss. Rechts und links von der Mitte erscheinen fast ganz schwarze Linien, da die Orte der Minima für die verschiedenen Farben zwar nicht zusammen, aber doch nahe an einander fallen.

Bei Anwendung der Doppelplatte aber haben in der Mitte des Gesichtsfeldes die rothen und blauen Strahlen das Minimum, die gelben und grünen, auch die violetten hingegen das Maximum der Intensität. Es erscheint demnach bei Anwendung

weissen Lichtes die Mitte des Gesichtsfeldes grünlich-weiss. Rechts und links von der Mitte fallen an die Stellen der Maxima der rothen und blauen Strahlen die Minima der gelben und grünen, es entstehen hier bläulich-rothe Streifen, an Stelle der dunklen beim Versuche ohne die Doppelplatte.

Licht, welches aus rothem und gelbem gemischt ist, wird gelbe und rothe Streifen liefern, derart dass in der Mitte des Gesichtsfeldes ein gelber Streifen sich befindet.

Für rechtscircularpolarisirtes Licht ergeben sich mit Rücksicht darauf, das für die Linien

$$\begin{array}{lccccc} & B & C & D & E & F \\ 2\varphi = & 1\cdot295\pi, & 1\cdot433\pi, & 1\cdot806\pi, & 2\cdot289\pi, & 2\cdot722\pi \end{array}$$

ist, nach der Formel (14) folgende den Minimis entsprechende Werthe

B	—197,	—128,	—59,	+10,	+79,	+148,	+218
C	184,	118,	52,	14,	80,	145,	211
D	154,	95,	36,	23,	82,	141,	200
E	126,	73,	20,	33,	86,	139,	192
F	106,	57,	8,	41,	90,	139,	188.

Man sieht, dass auf der Seite der positiven Δ in der zweiten und dritten Verticalreihe die Werthe von Δ für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien sehr nahe zusammenfallen, während sie in den übrigen Reihen viel weiter auseinander gehen. Deutlich zeigt dies die graphische Darstellung der Minima durch Punkte in der beistehenden Figur.

$\Delta = 0$ 50 100 150 200

An den Orten, welche durch $\Delta = 83$ und $\Delta = 142$ bestimmt sind, werden daher bei weissem und auch bei anders gemischtem Lichte immer dunkle Streifen auftreten, sobald das Licht rechtscircular polarisirt ist. Die Interferenzerscheinung ist um den Ort, für welchen $\Delta = 112$, nahe symmetrisch.

Ebenso verhält es sich bei linkscircularem Lichte an den Orten, für welche $\Delta = -83$, $\Delta = -142$ und $\Delta = -112$. Beim

Übergange von rechts zu linkscircularem Lichte verschiebt sich also die Symmetrielinie des Interferenzphänomens von $\Delta = +112$ auf $\Delta = -112$, also im Ganzen um 224. Auf die Linie *D* berechnet, gibt dies eine Verschiebung äquivalent einem eingetretenen Gangunterschiede von $224 : 59 = 3{\cdot}8$ Wellenlängen, also mehr als das Doppelte von dem Gangunterschiede, der beim Wechsel der zwei Lichtarten durch die Doppelplatte erzeugt wird.

Über die Monochloritamalsäure.

Von **T. Morawski,**

Assistent an der technischen Hochschule zu Graz.

Durch Behandlung von citraconsaurem Baryum mit Unterchlorigsäurehydrat in verdünnter Lösung erhielt Carius (Annalen der Chemie u. Pharmacie, Bd. 126, S. 205 u. f.) ein Salz, dessen Säure er als Monochlorcitramalsäure beschrieb.

Späterhin studirte Wilm (Annalen der Chemie u. Pharmacie, Bd. 141, S. 28 u. f.) das Verhalten der Itaconsäure bei genannter Reaction; es gelang ihm jedoch nicht ein entsprechendes Additionsproduct mit Unterchlorigsäurehydrat zu erhalten; dass dieses sich aber vorübergehend gebildet hatte, geht unzweifelhaft hervor aus der von Wilm beobachteten Entstehung einer Säure, welche mit Citraweinsäure die gleiche Zusammensetzung hat, aber der Verschiedenheit der Eigenschaften wegen von Wilm als Itaweinsäure bezeichnet wurde.

Herr Professor Gottlieb forderte mich nun auf, das Verhalten von Itaconsäure zu untersuchen, wenn sie nach jener Methode behandelt wird, welche ihn von der Citraconsäure ebenfalls zur Monochlorcitramalsäure führte; im Verlaufe dieser Untersuchung erfreute ich mich vieler Rathschläge, welche mir Herr Professor Gottlieb gütigst ertheilte, wofür ihm zu danken ich angenehm verpflichtet bin.

Eine grössere Menge von Itaconsäure konnte leicht gewonnen werden nach der von Wilm benützten Methode unter Anwendung verschlossener Gefässe, in welchen eine wässrige Lösung von Citraconsäure anhaltend über 110° erhitzt wurde.

Durch mehrmaliges Umkrystallisiren war es möglich, die Itaconsäure von unverändert gebliebener Citraconsäure zu trennen und vollkommen rein zu erhalten. Diese Itaconsäure wurde mit kohlensaurem Natron abgesättigt und anhaltend der Einwirkung des Chlors ausgesetzt; die Lösung des itaconsauren Natrons nahm reichlich davon auf und es wurde mit dem Einleiten des Chlors solange fortgefahren, bis die Flüssigkeit von einem Überschuss desselben grünlichgelb gefärbt war.

Hierauf wurde Salzsäure zugesetzt und in einer Retorte im Wasserbad erhitzt; dabei destillirte mit viel Wasser eine kleine Menge eines Öles über, dessen Dampf auf die heftigste Weise auf die Nasenschleimhäute einwirkt; ich musste die Untersuchung dieses Öles verschieben bis ich, nach vielfach wiederholter Vornahme obiger Operationen, über eine hinreichende Menge dieses Nebenproductes verfüge.

Der Inhalt der Retorte wurde nun zur Trockne eingedampft und dann mit Äther extrahirt. Beim Abdestilliren des Äthers blieb eine braune syrupöse Flüssigkeit zurück, welche stark sauer reagirte; selbst nach mehreren Wochen erfolgte aber noch immer keine Krystallisation.

Eine kleine Menge dieser zähen Flüssigkeit wurde nochmals in Äther gelöst und der Äther bei gewöhnlicher Temperatur verdunsten gelassen; dabei traten nach kurzer Zeit Krystalle auf.

Wurden nun diese mit dem oben erhaltenen Syrup zusammengebracht, so erstarrte dieser fast augenblicklich zu einer Krystallmasse, welche dann abgepresst werden konnte.

Durch häufig wiederholtes Umkrystallisiren aus Wasser erhielt ich schliesslich farblose Krystalle, welche in Wasser sehr leicht löslich sind, stark sauren Geschmak zeigen und ein, von dem der Monochlorcitramalsäure ganz verschiedenes Äussere darbieten. Während die Monochlorcitramalsäure leicht in grossen Prismen erhalten werden kann, bildet diese Säure, wie ich sie erhielt, stets nur kleine Krystalle, welche wegen ihrer Undeutlichkeit für krystallographische Beschreibung nicht geeignet sind.

Überdies zeigt diese Säure ein anderes Verhalten als die Monochlorcitramalsäure gegen essigsauren Baryt, mit welchem

Reagens in ganz concentrirter Lösung kein krystallinischer Niederschlag entsteht, während er sich bei Monochlorcitramalsäure sehr leicht bildet und durch Schwerlöslichkeit in Wasser auszeichnet.

Diese Säure muss deshalb von der Monochlorcitramalsäure unterschieden werden und kann, um an ihre Entstehung zu erinnern, als Monochloritamalsäure bezeichnet werden.

Ihre Zusammensetzung geht aus den folgenden analytischen Daten hervor:

I. 0·5495 Grm. Substanz gaben mit chromsaurem Bleioxyd im Sauerstoffstrome verbrannt: 0·6600 Grm. Kohlensäure und 0·1960 Grm. Wasser.

II. 0·4025 Grm. gaben nach dem Glühen mit Kalk: 0·3210 Grm. Chlorsilber und 0·0015 Grm. Silber.

100 Theile enthalten somit:

Procente	I	II	Berechnet nach der Formel $C_5H_7ClO_5$
Kohlenstoff	32·76	—	32·87
Wasserstoff	3·94	—	3·84
Chlor	—	19·52	19·45
Sauerstoff	—	—	43·84
			100·00

Mit dieser reinen Säure versuchte ich nun Salze zu bereiten; hiebei stellte sich als Hinderniss die bedeutende Zerleglichkeit der Säure heraus. Wenn dieselbe mit kohlensaurem Baryt gesättigt wurde, konnte man genau den Neutralisationspunkt erreichen; wurde aber diese neutrale Flüssigkeit zum Krystallisiren gestellt, so trat bald wieder saure Reaction ein, welche vom Zerfall der Monochloritamalsäure im Salze herrühren musste; dabei konnte in der Lösung auch Chlor nachgewiesen werden, was früher nicht der Fall war.

Die Leichtigkeit, mit welcher sich diese Säure bei Gegenwart von Basen zerlegt, war auch Ursache, dass Wilm dieselbe nicht rein erhielt. Beim Eindampfen der von Quecksilber durch Schwefelwasserstoff befreiten Lösung des sauren Natronsalzes

erfolgte die Bildung von Itaweinsäure, welche durch einen Zusatz von überschüssiger Salzsäure hätte verhindert werden können, wie es thatsächlich geschah in dem von mir angewendeten Darstellungsverfahren.

Da von der Benützung von Salzen, um sich Aufklärung zu verschaffen über Moleculargewicht und Basicität, nicht die Rede sein kann, versuchte ich, über Vorschlag des Herrn Professor Gottlieb, durch ein Titrirverfahren, bei welchem sehr verdünnte Maassflüssigkeiten benützt wurden, zu denselben zu gelangen.

Von der Verlässlichkeit so erhaltener Resultate versicherte ich mich durch die genaue Beobachtung der mit kohlensaurem Baryt neutralisirten Lösung von Monochloritamalsäure; es zeigte sich, dass die Zersetzung überhaupt erst nach längerer Zeit warnehmbar wird und dass sie um so rascher erfolgt, je concentrirter die Lösung ist. In so verdünnten Lösungen, wie sie zu den Titrirungen verwendet wurden, konnte selbst einen Tag nach Beendigung des Versuches keine Zersetzung wahrgenommen werden.

Ausgegangen wurde bei diesen Versuchen von $^1/_{100}$ Normaloxalsäure; mit dieser Maassflüssigkeit wurde der Titre eines sehr verdünnten Barytwassers bestimmt, wobei Lacmustinctur als Indicator diente, welche nach Professor Gottlieb's Vorschrift angefertigt war.

Es wurden 0·202 Grm. reine Monochloritamalsäure in 100 CC. Wasser gelöst und von dieser Lösung immer weniger verwendet, als nothwendig war, um 20 CC. Barytwasser abzusättigen.

20 CC. Barytwasser brauchten dann, im Mittel dreier Versuche:

einerseits 43·36 CC. $^1/_{100}$ Oxalsäure, welche 0·059403 Grm. Baryum sättigen und andrerseits 30 CC. der Monochloritamalsäurelösung mehr 10·90 CC. der $^1/_{100}$ Oxalsäure.

30 CC. der Säurelösung entsprechen somit 0·04447 Grm. Baryum; daraus berechnet sich das Moleculargewicht der Monochloritamalsäure zu 186·5, während es theoretisch 182·5 beträgt.

Als neutrales Baryumsalz würde die im Versuch benützte Menge von Monochloritamalsäure 0·04548 Grm. Baryum erfordern, was mit der gefundenen Menge, 0·04447 Grm. Baryum ganz wohl übereinstimmt.

Ein Mittel, mit noch grösserer Sicherheit über die Basicität der Säure Aufschluss zu erhalten, dürfte in der Darstellung eines Äthyläthers der Monochloritamalsäure geboten sein, welche wahrscheinlich ausführbar ist; über einen diesbezüglichen Versuch hoffe ich demnächst Mittheilung machen zu können.

Zur Kenntniss der kleinsten sichtbaren Mondphasen.

Von dem w. M. **Karl v. Littrow.**

Man hat sich in neuester Zeit von mehreren Seiten mit der Frage beschäftigt, wie bald nach dem Neumonde die Sichel dem freien Auge wahrnehmbar werde. Es überraschte mich, von einer merkwürdigen Vorarbeit, die der grosse jüdische Philosoph Maimonides überliefert, nirgends Notiz genommen zu sehen, und ich veranlasste deshalb Herrn Rabbinats-Candidaten A. Kurrein zu einer genauen Übersetzung des hebräischen Originales, die ich nun im Folgenden gebe. Herr Kurrein hat sich die Mühe genommen, die von mir ihm unmittelbar zur Verfügung gestellte Ausgabe von „Maimonidis Constitutiones de Sanctificatione Novilunii“ in „Blasius Ugolinus, Thesaurus Antiquitatum Sacrarum, Vol. XVII.“ nicht einfach zu übertragen, sondern mit sonst gangbaren Lesarten der fraglichen Abhandlung zu vergleichen, so dass der nachstehende Text in Bezug auf treues Wiedergeben des Originales wohl kaum etwas zu wünschen übrig lassen wird. Ich gebe übrigens von dem in neunzehn Abschnitte getheilten Originale hier nur die Capitel XII—XVII, da die anderen Abschnitte Allotria enthalten, die uns nicht interessiren. Aus der ersten Reihe weggelassener Capitel will ich nur kurz erwähnen, dass mehrere derselben sich mit den Regeln befassen, nach welchen Zeugnisse darüber, dass man die Mondsichel wahrgenommen habe, zu prüfen seien. Die rituelle Bedeutung, welche das Erscheinen des neuen Mondes für die Juden durch den davon abhängenden kirchlichen Anfang ihrer Monate von jeher hatte, bewog sie nämlich von den frühesten Zeiten an und bis sie Ver-

trauen in eigentlich astronomische Berechnungen fassten[1] zu forschen, wie bald nach dem Neumonde man mit Sicherheit auf die Wahrnehmbarkeit der Sichel zählen könne. Die Aufstellung der aus solchen offenbar mehrhundertjährigen Beobachtungen abgeleiteten Formel, wohl eines der ältesten Beispiele inductiver Methode, war das lang verfolgte Ziel der Bemühungen jüdischer Schriftgelehrter, deren Ergebnisse Maimonides zusammenfasste. Ich überlasse es denjenigen, welche die Sichtbarkeit der kleinsten Mondphasen zum Gegenstande ihrer Untersuchungen gemacht, die aufgestellte, für Palästina geltende Regel zu prüfen, sowie in heutige Ausdrucksweise umzusetzen[2] und begnüge mich, nur solche Erläuterungen, welche sich bei der Revision des Ganzen von selbst ergaben, den betreffenden Stellen beizufügen. Diese Zusätze sind durch Cursivschrift vom übrigen Texte abgehoben.

Capitel XII.

Der mittlere Weg der Sonne *(mittlere tropische Bewegung)* während eines Tages — in 24 Stunden nämlich — beträgt: 59′ 8″, also beträgt der mittlere Weg in 10 Tagen 9° 51′ 23″, in 100 Tagen 98° 33′ 53″, in 1000 Tagen — nach Weglassung der jeweiligen 360°—265° 38′ 50″ und der Überschuss in 10000 Tagen 136° 28′ 20″. Auf diese Weise kann man den mittleren Weg für jede beliebige Anzahl Tage berechnen. Ebenso kann man sich bestimmte Zahlen für den mittleren Weg für 2, 3, 4—10 Tage berechnen, ebenso für 20, 30, 40—100 Tage; das ist offen und klar, sobald man den mittleren Weg für einen Tag weiss, und dann muss man bestimmt und genau wissen auch den mittleren Weg der Sonne für 29 Tage und für 354 Tage, welche ein Mondjahr ausmachen, wenn die Monate regelmässig

---

[1] Siehe die treffliche Schrift von Dr. A. Schwarz: „Der jüdische Kalender, historisch und astronomisch untersucht. Breslau 1872."

[2] Ich erlaube mir für solche Zwecke auf ein meines Wissens viel zu wenig bekanntes Werk: „J. Narrien, Historical account of the origin and progress of Astronomy. London 1833" aufmerksam zu machen.

sind, welches Jahr ein geregeltes heisst. Hat man diese mittleren Wege immer zur Hand, so ist die Berechnung für die Erscheinung des Neumondes leicht; denn volle 29 Tage verfliessen von der Nacht der Erscheinung des Neumondes bis zur Nacht seiner nächsten Erscheinung, ebenso viele in jeglichem Monate, nicht mehr und nicht weniger als 29 Tage — und hier will man blos diese Erscheinung erfahren. — Ebenso verfliesst von der Nacht der Erscheinung des Neumondes dieses Jahres bis zu der Zeit der Erscheinungsnacht desselben Neumondes des nächsten Jahres ein geregeltes Jahr, oder 1 Jahr und 1 Tag und so ist's jedes Jahr.

Der mittlere Weg der Sonne für 29 Tage beträgt 28° 35′ 1″ und für ein geregeltes Jahr 348° 55′ 15″.

Ein gewisser Punkt existirt in der Sonnenbahn und auch in den Bahnen der übrigen Planeten; befindet sich ein Planet in demselben, so ist sein ganzes Licht hoch über der Erde. Dieser Punkt der Sonnenbahn und der Planetenbahnen, mit Ausnahme des Mondes, circulirt gleichmässig und sein Weg macht in je 70 Jahren nahezu 1 Grad *(Präcession)*; dieser Punkt heisst Sonnenhöhe.

Sein Weg in je 10 Tagen beträgt 1″ und $^1/_2$=30‴, also in
100 „ 15″,
1000 „ 2′ 30″,
10000 „ 25′,
29 „ 4″ und etwas darüber,
in einem geregelten Jahr 53″.

Der Ausgang — wie früher gesagt — woher der Beginn dieser Berechnung stammt, ist der Anfang der Nacht auf Donnerstag den 3. Nissan des Jahres 4938 der Schöpfung *(23. März 1178 a. St.)*, und der Stand der Sonne im mittleren Wege betrug an diesem Ausgange 7° 3′ 32″ im Bild des Widders und der Stand der Sonnenhöhe betrug an diesem Ausgange 26° 45′ 8″ des Sternbildes der Zwillinge.

Will man den Stand der Sonne im mittleren Wege in jeder beliebigen Zeit wissen, so nimmt man die Anzahl der Tage, welche vom Tage des Ausganges bis zum gewünschten Tag verstrichen sind, berechnet den mittleren Weg dieser Tage nach dem angegebenen Verfahren, addirt zum Ausgang die gleich-

namigen Theile und das Resultat ist der Stand *(mittlere Länge)*, den die Sonne inne hat in dem mittleren Wege für diesen Tag. Wollte man z. B. den Stand der Sonne im mittleren Wege berechnen für den Anfang der Nacht auf Samstag den 14. Tamus des Ausgangsjahres, so würde sich ergeben die Anzahl der Tage vom Ausgangstage bis zu dem Tage, von welchem man den Stand der Sonne erfahren will, als 100; der mittlere Weg für 100 Tage macht 98° 33′ 53″; addirt man sie zum Ausgang, der 7° 3′ 32″ des Widders macht, so ist die Summe 105° 37′ 25″ und ihr Stand im mittleren Weg für den Anfang dieser Nacht 15° 37′ im Sternbild des Krebses. Der mittlere Weg, der aus dieser Berechnung sich ergibt, fällt manchmal genau mit dem Anfang der Nacht zusammen, zuweilen 1 Stunde vor, zuweilen ebenso viel nach Sonnenuntergang, was aber für die Berechnung der Erscheinung des Mondes nicht schadet, weil wir diese annähernde Zahl bei Berechnung des mittleren Mondweges ergänzen. So verfährt man immer für jede beliebige Zeit, selbst für 1000 Jahre; wenn man nun alle Überschüsse zum Ausgang addirt, erhält man den Ort des mittleren Weges. So geschieht's beim mittleren Mondweg und beim mittleren Weg jedes Planeten: wenn man die Grösse des Weges an einem Tage und den Ausgang, von dem man zu zählen beginnt, weiss und den Weg für die gewünschten Jahre und Tage addirt zum Ausgang, so erhält man den Stand für den mittleren Weg. In gleicher Weise verfährt man bei der Sonnenhöhe: Man addirt den Weg in diesen Tagen oder Jahren zum Ausgang, so erhält man die Sonnenhöhe für den gewünschten Tag. Auch steht es frei, einen andern Ausgang zu wählen als den hier angenommenen, um vielleicht den Ausgang vom ersten Jahre eines bekannten Cyclus oder eines Jahrhunderts zu nehmen. Will man den Ausgang einige Jahre früher oder später als den erwähnten, so ist die Weise klar. Der Weg der Sonne für ein geregeltes Jahr ist bekannt, ebenso für 29 Tage und für 1 Tag; bekannt ist, dass das Jahr, dessen Monate ergänzt sind, um 1 Tag mehr als das geregelte zählt, und dass das Jahr, dessen Monate geringer sind, um 1 Tag weniger als das geregelte zählt; dass ferner das Schaltjahr mit geregelten Monaten 30 Tage, mit ergänzten 31 Tage, mit geringeren 29 Tage mehr als ein geregeltes Jahr

zählt. Mit diesen Daten berechnet man den mittleren Weg der Sonne für die gewünschte Anzahl von Jahren und Tagen, addirt sie zu dem angegebenen Ausgang und erhält den mittleren Weg für den gewünschten Tag der späteren Jahre und kann diesen zum Ausgang nehmen; oder man subtrahirt den herausgebrachten mittleren Weg vom angegebenen Ausgang und erhält einen früheren Ausgang für den gewünschten Tag und kann diesen zum Ausgang machen.

So verfährt man auch beim mittleren Mondweg und dem der übrigen Planeten. Auch erhellt aus dem Gesagten, dass man den mittleren Weg der Sonne für jeden beliebigen vergangenen wie zukünftigen Tag berechnen kann.

Capitel XIII.

1. Will man den wahren Stand der Sonne für jeden beliebigen Tag wissen, muss man zuerst den mittleren Weg für diesen Tag nach der angegebenen Methode und dann die Sonnenhöhe berechnen und subtrahirt den Stand der Sonnenhöhe von dem mittleren Weg der Sonne, der Rest heisst **wahre Sonnenbahn** *(mittlere Anomalie, bezogen auf das Aphelium)*.

2. Ferner muss man sehen, wie viel Grade die wahre Sonnenbahn hat. Hat sie weniger als 180°, zieht man den Theil der Bahn von dem mittleren Weg der Sonne ab; hat sie aber mehr als 180—360°, so zählt man den Theil der Bahn zu dem mittleren Weg der Sonne hinzu und das Resultat nach Addition oder Subtraction ist der wahre *(so zu sagen: elliptische)* Stand.

3. Ist die Bahn genau 180° oder genau 360°, so ist ihr Theil = 0 und der Stand des mittleren Weges und der wahre fallen zusammen.

4. So viel beträgt der Theil der Bahn *(Gleichung des Mittelpunktes der Sonne)*.

Hat	die	Bahn	10°,	beträgt	ihr	Theil		20′
„	„	„	20°	„	„	„		40′
„	„	„	30°	„	„	„		58′
„	„	„	40°	„	„	„	1°	15′
								30*

Hat die Bahn 50°,	beträgt ihr Theil	1° 29′
„ „ „ 60°	„ „ „	1° 41′
„ „ „ 70°	„ „ „	1° 51′
„ „ „ 80°	„ „ „	1° 57′
„ „ „ 90°	„ „ „	1° 59′
„ „ „ 100°	„ „ „	1° 58′
„ „ „ 110°	„ „ „	1° 53′
„ „ „ 120°	„ „ „	1° 45′
„ „ „ 130°	„ „ „	1° 33′
„ „ „ 140°	„ „ „	1° 19′
„ „ „ 150°	„ „ „	1° 1′
„ „ „ 160°	„ „ „	42
„ „ „ 170°	„ „ „	21
„ „ „ 180° genau	„ „	0° 0′

und der mittlere und wahre Stand fallen zusammen.

5. Übersteigt die Bahn 180°, so braucht man sie nur von 360° abzuziehen um ihren Theil zu wissen; wäre z. B. die Bahn 200°, so gibt das von 360° subtrahirt 160°, und für 160° ist der Theil 42′, so beträgt auch für 200° der Theil 42′.

6. Ist die Bahn 300°, so zieht man das von 360° ab, bleiben 60° und für 60° beträgt der Theil 1° 41′ und eben so viel für 300° u. s. f.

7. Hätte die Bahn 65°, so ist bekannt der Theil für 60° als 1° 41′ und für 70° beträgt der Theil 1° 51′, also macht die Differenz für 10° nur 10′ und auf jeden Grad entfällt 1′, somit ist der Theil der Bahn für 65° = 1° 46′.

8. Hätte die Bahn 67°, so beträgt ihr Theil 1° 48′. So berechnet man bei jeder Bahn, sowohl bei der Sonnen- als bei der Mondberechnung die Einheit, die mit den Zehnern verbunden ist.

9. Wollte man z. B. den wahren Stand der Sonne erfahren für den Anfang der Nacht auf den Sabbat des 14. Tamus des angegebenen Jahres, so berechnet man zuerst den mittleren Weg der Sonne für diese Zeit und der beträgt 105° 37′ 25″, berechnet die Sonnenhöhe für diese Zeit, sie beträgt 86° 45′ 23″, subtrahirt die Sonnenhöhe von dem mittleren Weg und erhält die Bahn 18° 52′ 2″. Sind die Minuten weniger als 30′, so braucht man sie nicht zu berücksichtigen, sind sie aber 30 oder mehr, so

nimmt man dafür 1° und addirt ihn zu den Graden der Bahn; daher beträgt diese Bahn 19° und ihr Theil nach dem angegebenen Verfahren 38′.

10. Weil diese Bahn aber kleiner als 180° ist, so subtrahirt man den Theil, der 38′ beträgt, von dem mittleren Weg der Sonne und es bleiben dann 104° 59′ 25″ und der wahre Stand der Sonne am Anfang dieser Nacht ist im Bilde des Krebses 15° weniger 35″, die man sowohl beim Stand der Sonne als des Mondes und den übrigen Erscheinungsberechnungen vernachlässigen kann; nur die Minuten sind zu berücksichtigen, und machen die Sekunden gegen 30″, kann man 1′ annehmen und sie zu den Minuten zählen.

11. Durch die Kenntniss des Standes der Sonne für jede beliebige Zeit kann man auch jeden beliebigen Tag früherer oder späterer Jahre statt des angenommenen Ausgangs zu Grunde legen.

Capitel XIV.

1. Der Mond hat zwei mittlere Wege. Der Mond kreist nämlich in einer kleinen Sphäre, die die ganze Welt nicht umkreist, und sein mittlerer Weg in dieser kleinen Sphäre heisst die mittlere Bahn. Die kleinere Sphäre kreist selbst wieder in einer grossen Sphäre, die die Welt umkreist, und der mittlere Weg dieser kleinen Sphäre in der grossen weltumkreisenden Sphäre heisst der mittlere Mondweg *(mittlere tropische Bewegung)* und macht in einem Tage 13° 10′ 35″.

2. Also macht der Weg in 10 Tagen ..... 131° 45′ 50″
der Überschuss des Weges in 100 „ ..... 237° 38′ 23″
„ „ „ „ „ 1000 „ ..... 216° 23′ 50″
„ „ „ „ „ 10000 „ ..... 3° 53′ 20″
„ „ „ „ „ 29 „ ..... 22° 6′ 56″
„ „ im geregelten Jahre .... 344° 26′ 43″.
So lässt sich jede beliebige Anzahl Tage und Jahre berechnen.

3. Der Weg der mittleren Bahn *(mittlere anomalistische Bewegung des Mondes)* macht

in ... 1 Tage ..... 13° 3′ 54″
„ .. 10 Tagen ..... 130° 39′ 0″

der Überschuss in	100	Tagen	.....	226° 29′ 53″
„ „ „	1000	„	.....	104° 58′ 50″
„ „ „	10000	„	.....	329° 48′ 20″
„ „ „	29	„	.....	18° 53′ 4″.

4. Für ein geregeltes Jahr hat man 305° 0′ 13″. Der Stand des mittleren Mondweges im Anfange der Nacht auf den Donnerstag des Ausganges war im Bilde des Stieres 1° 14′ 43″ und die mittlere Bahn war in diesem Ausgang 84° 28′ 42″. Weiss man nun den mittleren Mondweg und den, der als Ausgang gilt, so addirt man beide und weiss den Stand des mittleren Mondweges für jeden beliebigen Tag, wie es geschah beim mittleren Weg der Sonne. Nach Berechnung des mittleren Mondweges für den Anfang dieser Nacht, sucht man das Sternbild, in dem die Sonne sich befindet, zu erfahren.

5. Befindet sich die Sonne zwischen der Hälfte des Bildes der Fische und der Hälfte des Widders, bleibt der mittlere Mondweg unverändert; befindet sie sich zwischen der Hälfte des Widders und dem Anfang der Zwillinge, addirt man zum mittleren Mondweg 15′ *(Reduction auf Sonnenuntergang)*; befindet sie sich zwischen dem Anfange der Zwillinge und dem Anfange des Löwen, addirt man zum mittleren Mondweg 15′ *(rectius 30′?)*; befindet sie sich zwischen dem Anfange des Löwen und der Hälfte der Jungfrau, addirt man 15′; befindet sie sich zwischen der Hälfte der Jungfrau und der Hälfte der Wage, bleibt der mittlere Mondweg unverändert; befindet sie sich zwischen der Hälfte der Wage und dem Anfange des Schützen, subtrahirt man vom mittleren Mondweg 15′; befindet sie sich zwischen dem Anfange des Schützen und dem Anfange des Wassermannes, subtrahirt man 30′; befindet sie sich zwischen dem Anfange des Wassermannes und der Hälfte der Fische, werden 15′ abgezogen.

6. Das Resultat, nach der Addition oder Subtraction oder nach ungeändertem Werthe ist für die berechnete Zeit der mittlere Mondweg nach Verlauf nahezu $^1/_3$ Stunde nach Sonnenuntergang und heisst: mittlerer Mondweg für die Zeit der Erscheinung.

Capitel XV.

1. Will man also den wahren Ort des Mondes für jeden beliebigen Tag wissen, berechnet man zuerst den mittleren Mondweg für die Zeit der Erscheinung in der Nacht, die gewünscht wird, dann die mittlere Bahn des Mondes und den mittlern Weg der Sonne für diese Zeit, subtrahirt den mittleren Weg der Sonne von dem mittleren Mondweg, verdoppelt den Rest und dieser heisst: die doppelte Entfernung *(doppelte Differenz der Längen)*.

2. Diese Berechnungen sollen, wie schon früher bemerkt, nur zur Kenntniss der Erscheinung des Mondes dienen, und da kann diese doppelte Entfernung in der Nacht der Erscheinung, da der Mond sichtbar wird, nur zwischen 5° und 62°, nicht weniger als die erste und nicht mehr als die letzte betragen.

3. Demnach ist Folgendes zu beachten: Ist die doppelte Entfernung 5° oder etwas darüber, wird das Mehr *(Grösse χ bei Delambre, Hist. de l'Astron. ancienne Tome II. p. 204)* nicht berücksichtigt und nichts dazu addirt.

Ist die doppelte Entfernung zwischen	addirt man zur mittleren Bahn
6° und 11°	1°
12° „ 18°	2°
19° „ 24°	3°
25° „ 31°	4°
32° „ 38°	5°
39° „ 45°	6°
46° „ 51°	7°
52° „ 59°	8°
60° „ 63°	9°

Nach der Addition dieser Grade heisst die mittlere Bahn die rectificirte Bahn.

4. Nachher betrachtet man die Anzahl der Grade der rectificirten Bahn. Beträgt sie weniger als 180°, so subtrahirt man den Theil der rectificirten Bahn von dem mittleren Mondweg für die Zeit der Erscheinung. Ist die rectificirte Bahn grösser als 180—360°, addirt man diesen Theil der rectificirten Bahn

zum mittleren Mondweg für die Zeit der Erscheinung. Wie sich nun der mittlere Mondweg nach der Addition oder Subtraction ergibt, so ist der wahre Ort des Mondes für die Zeit der Erscheinung.

5. Beträgt die rectificirte Bahn genau 180° oder genau 360°, ist der Theil gleich 0 und für die Zeit der Erscheinung ist der Ort des mittleren Mondweges auch der wahre Ort.

6. Folgende Grösse erreichen die Theile der Bahn *(Gleichung des Mittelpunktes für den Mond)*.

Hat die	rectificirte	Bahn		10°,	macht	ihr Theil		50′
„	„	„	„	20°	„	„	„	1° 38′
„	„	„	„	30°	„	„	„	2° 24′
„	„	„	„	40°	„	„	„	3° 6′
„	„	„	„	50°	„	„	„	3° 44′
„	„	„	„	60°	„	„	„	4° 16′
„	„	„	„	70°	„	„	„	4° 41′
„	„	„	„	80°	„	„	„	5° —
„	„	„	„	90°	„	„	„	5° 5′
„	„	„	„	100°	„	„	„	5° 8′
„	„	„	„	110°	„	„	„	4° 59′
„	„	„	„	120°	„	„	„	4° 40′
„	„	„	„	130°	„	„	„	4° 11′
„	„	„	„	140°	„	„	„	3° 33′
„	„	„	„	150°	„	„	„	2° 48′
„	„	„	„	160°	„	„	„	1° 56′
„	„	„	„	170°	„	„	„	— 59′
„	„	„	„	180°	„	„	„	0° 0′

d. h. der Ort des mittleren Mondweges und der wahre Ort fallen zusammen.

7. Ist die rectificirte Bahn grösser als 180°, zieht man sie von 360° ab und erhält den Theil, wie bei der Sonnenbahn; sind bei Zehnern noch Einheiten, berechnet man sie aus der Differenz der beiden Theile nach dem bei der Sonnenbahn angegebenen Verfahren.

8. Wollten wir z. B. den wahren Ort des Mondes für den Anfang der Nacht auf Freitag den 2. Ijar des Ausgangsjahres erfahren, so beträgt die Anzahl der von dieser Ausgangsnacht

bis zu der verlangten Nacht verflossenen Tage 29, berechnet man den mittleren Weg der Sonne für den Anfang dieser Nacht, erhält man 35° 38′ 33″; berechnet man ferner den mittleren Mondweg für diese Erscheinungszeit, so erhält man 53° 36′ 39″ und die mittlere Bahn für diese Zeit macht 103° 21′ 46″. Subtrahirt man den mittleren Weg der Sonne von dem mittleren Mondweg, bleiben 17° 58′ 6″. Verdoppelt man diese Entfernung, erhält man als doppelte Entfernung 35° 56′ 12″; demnach muss man, wie bekannt, 5° zur mittleren Bahn addiren und erhält die rectificirte Bahn 108° 21′, wobei man die Minuten, wie bei der Sonne erörtert wurde, vernachlässigen kann.

9. Will man nun den Theil dieser rectificirten Bahn, die 108° beträgt, berechnen, so macht der Theil 5° 1′ und da die rectificirte Bahn weniger als 180°, so subtrahirt man den Theil 5° 1′ von dem mittleren Mondesweg und es bleiben 48° 35′ 39″; die Sekunden als 1 Minute gerechnet und zu den Minuten addirt, erhält man den wahren Ort des Mondes für diese Zeit gleich 18° und 36′ des 19.° im Bilde des Stieres. So berechnet man den wahren Ort *(so zu sagen: elliptische Länge)* des Mondes für jede beliebige Zeit vom Ausgangsjahr bis ans Ende der Welt.

Capitel XVI.

1. Der Kreis, in dem der Mond sich immer bewegt, weicht von dem Kreise, in dem die Sonne sich immer bewegt, ab und zwar die eine Hälfte nach Norden, die andere nach Süden; in zwei gegenüberliegenden Punkten aber treffen sich die beiden Kreise, weshalb der Mond, wenn er sich in einem dieser Punkte befindet, in dem Kreise der Sonne genau der Sonne gegenüber kreist; verlässt er aber einen dieser Punkte, so geht sein Weg nördlich oder südlich von der Sonne. Der Punkt, von dem der Mond nach Norden abzuweichen beginnt, heisst Kopf *(aufsteigender Knoten)*, und der, von dem der Mond nach Süden abzuweichen beginnt, heisst Schweif *(niedersteigender Knoten)*. Der Kopf hat einen regelmässigen Gang, bei dem weder Zunahme noch Abnahme stattfindet, er kreist immer in den Sternbildern rückwärts vom Widder zu den Fischen und von den Fischen zum Wassermann und so immer fort.

2. Der mittlereWeg des Kopfes *(Bewegung der Mondknoten)*

für	1	Tag	beträgt	3′ 11″
„	10	Tage	„	31′ 47″
„	100	„	„	5° 17′ 43″
„	1000	„	„	52° 57′ 10″
der Überschuss ..	10000	„	„	169° 31′ 40″
der mittlere Weg für	29	„	„	1° 32′ 9″
für ein geregeltes Jahr			„	18° 44′ 42″

Der mittlere Weg des Kopfes war am Anfange der Nacht auf den Donnerstag des Ausganges 180° 57′ 28″.

3. Will man den Stand des Kopfes für jede beliebige Zeit berechnen, so berechnet man seinen mittleren Weg für diese Zeit, wie man den mittleren Weg der Sonne und den mittleren Mondweg berechnete, subtrahirt den mittleren Weg von 360°; der Rest ist der Stand des Kopfes für diese Zeit; gegenüber der Stand des Schweifes.

4. Wollte man z. B. den Stand des Kopfes wissen für den Anfang der Nacht auf Freitag den 2. Ijar des Ausgangsjahres, so macht die Anzahl der von dieser bis zur verlangten Nacht verflossenen Tage 29.

5. Berechnet man ferner den mittleren Weg des Kopfes für diese Zeit in der bekannten Weise, indem man den Weg für 29 Tage zu dem Ausgang addirt, so erhält man den mittleren Weg des Kopfes 182° 29′ 37″, subtrahirt ihn von 360°, bleiben 177° 30′ 23″ und man hat den Stand des Kopfes mit Vernachlässigung der Sekunden im Bilde der Jungfrau 27° 30′; gegenüber den Stand des Schweifes 27° 30′ im Bild der Fische.

6. Zwischen Kopf und Schweif liegt immer genau ein halber Kreis; daher findet man den Schweif immer im siebenten Bilde, vom Bilde des Kopfes gezählt genau nach Graden und Minuten, so dass der Schweif, wäre der Kopf in irgend einem Bilde 10°, im siebenten Bilde davon ab 10° sich befände.

7. Weiss man nun den Stand des Kopfes und des Schweifes und den wahren Ort des Mondes, so betrachtet man diese drei Zahlen. Hat der Mond mit dem Kopfe oder Schweife denselben Grad und dieselbe Minute, dann weicht der Mond weder nach Norden noch nach Süden; sieht man aber den Mond vor dem Kopfe und als ob er sich gegen den Schweif bewegte, so weicht

der Mond nördlich von der Sonne ab; ist er aber vor dem Schweif und als ob er gegen den Kopf ginge, so weicht er südlich ab.

8. Die nördliche oder südliche Abweichung des Mondes heisst Breite des Mondes und zwar heisst die nördliche Abweichung nördliche Breite und die südliche, südliche Breite; befindet sich der Mond in einem der beiden Punkte, ist die Breite = 0.

9. Nie übersteigt die Breite des Mondes weder im Norden, noch im Süden 5°. In folgender Weise beschreibt er seinen Weg: er beginnt vom Kopf, entfernt sich allmählich, die Entfernung nimmt immer zu bis 5°, dann nähert er sich allmählich, so dass seine Breite, wenn er zum Schweif kommt, 0° ist, dann entfernt er sich wieder und die Entfernung nimmt zu bis 5° und nähert sich wieder, bis die Breite = 0° wird.

10. Will man die Breite des Mondes für jede beliebige Zeit berechnen und ob's nördliche oder südliche sei, berechnet man den Stand des Kopfes und den wahren Ort des Mondes für diese Zeit, subtrahirt den Stand des Kopfes vom wahren Ort des Mondes, der Rest heisst die breite Bahn *(Argument der Breite)*; beträgt die breite Bahn 1—180°, so ist die Breite des Mondes eine nördliche, beträgt sie mehr als 180°, ist die Breite eine südliche; ist sie genau 180° oder genau 360°, ist die Breite = 0. Dann muss man ferner sehen, wie gross der Theil der breiten Bahn ist, denn so gross ist seine Abweichung nach Norden oder Süden oder seine nördliche oder südliche Breite.

11. Die Grösse der Theile der breiten Bahn ist folgende:

Macht die breite Bahn *(Argument der Breite)*	beträgt ihr Theil *(Breite)*
10°	52′
20°	1° 43′
30°	2° 30′
40°	3° 13′
50°	3° 50′
60°	4° 20′
70°	4° 42′
80°	4° 55′
90°	5°

12. Sind Einheiten bei den Zehnern, so berechnet man sie verhältnissmässig aus der Differenz der zwei Theile, zwischen welchen sie liegen, wie das bei der Sonnen- und Mondbahn geschehen. Wäre z. B. die breite Bahn 53°, so beträgt der Theil für 50° nach Obigem 3° 50′, für 60° beträgt der Theil 4° 20′. Die Differenz zwischen beiden beträgt 30′, also für je 1° kommen 3′ und für 53° macht es dann 3° 59′. Dasselbe gilt für alle Zahlen.

13. Kennt man nach obigen Angaben den Theil der breiten Bahn bis 90°, so kann man Theile jeglicher Grösse berechnen, denn ist die Bahn grösser als 90°, aber kleiner als 180°, so subtrahirt man die Grösse von 180° und erhält damit den Theil.

14. Ist die Bahn grösser als 180°, so ist die Breite des Mondes im Anfang dieser Nacht eine südliche; ist sie grösser als 180°, aber kleiner als 270°, so subtrahirt man davon 180°, der Rest gibt den Theil.

15. Ist die Bahn grösser als 270°, aber kleiner als 360°, so subtrahirt man sie von 360°, der Rest lässt den Theil erkennen.

16. Wäre z. B. die Bahn 150°, so subtrahirt man sie von 180°, erhält 30°; es entfällt aber auf 30° der Theil von 2° 30′ und ebensoviel auf 150°.

17. Wäre die Bahn 200°, subtrahirt man davon 180°, bleiben 20°, damit erhält man einen Theil von 1° 43′; ebenso viel entfällt auf 200°.

18. Wäre die Bahn 300°, subtrahirt man sie von 360°, bleiben 60°; für 60° erhält man den Theil von 4° 20′, ebenso viel für 300°.

19. Wollte man z. B. die Breite des Mondes berechnen und ob sie eine nördliche oder südliche war im Anfange der Nacht auf Freitag den 2. Ijar des Ausgangsjahres, so ist nach dem Früheren der wahre Ort des Mondes in dieser Nacht 18° 36′ im Bilde des Stieres, der Stand des Kopfes war um diese Zeit 27° 30′ im Bilde der Jungfrau; zieht man den Stand des Kopfes von dem wahren Ort des Mondes ab, erhält man die breite Bahn 231° 6′. Da die Minuten dabei vernachlässigt werden können, so erhält man, wie bekannt, den Theil der Bahn 3° 53′ und das ist die Breite des Mondes in dieser Nacht und zwar südlich, weil die Bahn 180° übersteigt.

Capitel XVII.

1. Das bisher Angegebene dient als Behelf zur Berechnung der Erscheinung des Mondes. Will man diese wissen, berechnet man zuerst den wahren Stand der Sonne und den wahren Ort des Mondes, den Stand des Kopfes für die Zeit der Erscheinung, subtrahirt den wahren Stand der Sonne vom wahren Ort des Mondes, der Rest ist die erste Länge.

2. Weiss man den Stand des Kopfes, den wahren Ort des Mondes, so weiss man auch die Breite des Mondes und ob sie eine nördliche oder südliche sei und das heisst die erste Breite. Diese erste Länge und erste Breite muss man sich sehr gut merken.

3. Nachher betrachtet man diese erste Länge und erste Breite. Erhält man jene genau 9° oder weniger, so war es unmöglich, dass der Mond in dieser Nacht irgendwo in Palästina erschien — eine andere Rechnung braucht man dazu nicht —; war aber die erste Länge grösser als 15°, so erschien gewiss, ohne dass eine andere Berechnung nöthig ist, in ganz Palästina der Mond; war aber der Mond zwischen 9° und 15°, muss man genau nach der Erscheinung forschen und rechnen, um zu wissen, ob er erschien oder nicht.

4. Das gilt aber nur, wenn der wahre Ort des Mondes zwischen dem Anfang des Steinbockes und dem Ende der Zwillinge war; lag er aber zwischen dem Anfang des Krebses und dem Ende des Schützen und die erste Länge betrug 10° oder weniger, so wurde der Mond in ganz Palästina nirgends gesehen; war aber die erste Länge grösser als 24°, wurde er in ganz Palästina gesehen; war sie aber zwischen 10° und 24°, muss man genau nachrechnen, ob er gesehen wurde oder nicht.

5. Die Berechnungen der Erscheinung sind folgende: Man beobachtet zuerst, in welchem Sternbilde der Mond steht. Steht er im Bilde des Widders, subtrahirt man von der ersten Länge 59′; steht er im Bilde des Stieres, subtrahirt man von der ersten Länge 1°, im Bilde der Zwillinge subtrahirt man 58′, im Bilde des Krebses 43′, im Bilde des Löwen 43′, im Bilde der Jungfrau 37′, der Wage 34′, im Bilde des Skorpions 34′, im Bilde des Schützen 36′, im Bilde des Steinbocks 44′, im Bilde des Wasser-



manns 53′, im Bilde der Fische 58′, und was nach der Subtraction von der ersten Länge bleibt, heisst die zweite Länge.

6. Deshalb aber werden diese Minuten abgezogen, weil der wahre Ort des Mondes nicht der ist, wo er gesehen wird, sondern ein Abstand liegt zwischen ihnen in der Länge und in der Breite und der heisst Gesichtsabstand, und die Grösse des Gesichtsabstandes der Länge *(Parallaxe in Länge)* zur Zeit der Erscheinung wird immer von der Länge abgezogen.

7. Bei dem Gesichtsabstand *(Parallaxe)* der Breite werden, wenn sie eine nördliche ist, die Minuten des Gesichtsabstandes der Breite von der ersten Breite subtrahirt; ist die Breite eine südliche, werden die Minuten des Gesichtsabstandes der Breite zu der ersten Breite addirt. Was man aus der ersten Breite nach Addition oder Subtraction dieser Minuten erhält, heisst zweite Breite.

8. Das sind die Minuten, die man addiren oder subtrahiren muss:

Befindet sich	der Mond	im Bilde	des	Widders,	macht es	9′
„	„	„	„	Stieres	„	10′
„	„	„	der	Zwillinge	„	16′
„	„	„	des	Krebses	„	27′
„	„	„	„	Löwen	„	38′
„	„	„	der	Jungfrau	„	44′
„	„	„	„	Wage	„	46′
„	„	„	des	Skorpions	„	45′
„	„	„	„	Schützen	„	44′
„	„	„	„	Steinbockes	„	36′
„	„	„	„	Wassermanns		24′
„	„	„	der	Fische	„	12′

9. Weiss man diese Minuten, so subtrahirt man sie von der ersten Breite oder addirt sie dazu und erhält die zweite Breite; auch ist bekannt, ob es eine nördliche oder südliche ist. Die Grade und Minuten der zweiten Breite sind wohl zu merken.

10. Nachher nimmt man nur von der zweiten Breite einen Bruchtheil noch, weil der Mond in seiner Bahn kleine Abweichungen macht.



Diese Bruchtheile sind zu rechnen:

Befindet sich der Mond zwischen dem Anfang des Widders und 20° desselben oder zwischen dem Anfang der Wage und 20° derselben,

werden von der zweiten Breite zwei Fünftheile ($^2/_5$) genommen.

Befindet sich der Mond zwischen 20° des Widders und 10° des Stieres oder zwischen 20° der Wage und 10° des Skorpions.

wird $^1/_3$ von der zweiten Breite genommen.

Befindet sich der Mond zwischen 10° des Stieres bis 20° desselben oder zwischen 10° des Skorpions bis 20° desselben,

wird $^1/_4$ von der zweiten Breite genommen.

Befindet sich der Mond zwischen 20° des Stieres und dem Ende desselben oder zwischen 20° des Skorpions und dem Ende desselben,

wird $^1/_5$ von der zweiten Breite genommen.

Befindet sich der Mond zwischen dem Anfang der Zwillinge und 10° derselben oder zwischen dem Anfang des Schützen und 10° desselben,

wird $^1/_6$ von der zweiten Breite genommen.

Befindet sich der Mond zwischen 10° der Zwillinge und 20° derselben oder zwischen 10° des Schützen und 20° desselben,

wird $^1/_{12}$ von der zweiten Breite genommen.

Befindet sich der Mond zwischen 20° der Zwillinge und 25° derselben oder zwischen 20° des Schützen und 25° desselben,

wird $^1/_{24}$ von der zweiten Breite genommen.

Befindet sich der Mond zwischen 25° der Zwillinge und 5° des Krebses oder zwischen 25° des Schützen und 5° des Steinbockes,

wird nichts genommen, da die Abweichung =0 ist.

Befindet sich der Mond zwischen 5° des Krebses und 10° des selben oder zwischen 5° des Steinbockes und 10° desselben

wird $^1/_{24}$ von der zweiten Breite genommen.

Befindet sich der Mond zwischen 10° des Krebses und 20° desselben oder zwischen 10° des Steinbockes und 20° desselben

wird $^1/_{12}$ von der zweiten Breite genommen.

Befindet sich der Mond zwischen 20° des Krebses und dem Ende desselben oder zwischen 20° des Steinbockes und dem Ende desselben,

wird $^1/_6$ von der zweiten Breite genommen.

Befindet sich der Mond zwischen dem Anfang des Löwen und 10° desselben oder zwischen dem Anfang des Wassermanns und 10° desselben,

wird $^1/_5$ von der zweiten Breite genommen.

Befindet sich der Mond zwischen 10° des Löwen und 20° desselben oder zwischen 10° des Wassermanns und 20° desselben,

wird $^1/_4$ von der zweiten Breite genommen.

Befindet sich der Mond zwischen 20° des Löwen und 10° der Jungfrau oder zwischen 20° des Wassermanns und 10° der Fische,

wird $^1/_3$ von der zweiten Breite genommen.

Befindet sich der Mond zwischen 10° der Jungfrau und dem Ende derselben oder zwischen 10° der Fische und dem Ende derselben,

werden $^2/_5$ von der zweiten Breite genommen.

Diese Bruchtheile, welche man von der zweiten Breite nimmt, heissen Mondkrümmung.

11. Hierauf muss man sehen, ob die Breite eine nördliche oder südliche ist. Ist sie eine nördliche, dann subtrahirt man diese Mondkrümmung von der zweiten Länge; bei südlicher Breite addirt man sie. So verfährt man aber nur, wenn der Mond zwischen dem Anfang des Steinbockes und dem Ende der Zwillinge sich befindet; befindet er sich aber zwischen dem Anfang des Krebses und Ende des Schützen, dann verhält sich's umgekehrt, dann wird bei nördlicher Breite die Mondkrümmung zur zweiten Länge addirt und bei südlicher Breite subtrahirt. Was man nun nach Addition oder Subtraction aus der zweiten Länge erhält, heisst dritte Länge. Findet aber keine Abweichung der

Bahn statt und ergibt sich aus der Rechnung nichts, was von der zweiten Breite abzuziehen wäre, so sind zweite und dritte Länge gleich gross.

12. Dann muss man beobachten, in welchem Sternbilde die dritte Länge — welche nur die Anzahl der Grade, welche zwischen Sonne und Mond sind, besagt — steht.

Befindet sie sich im Bilde der Fische oder des Widders, addirt man $^1/_6$ der dritten Länge zu derselben.

Befindet sie sich im Bilde des Wassermanns oder des Stieres, addirt man $^1/_5$ der dritten Länge zu derselben.

Befindet sie sich im Bilde des Steinbockes oder der Zwillinge, addirt man $^1/_6$ der dritten Länge zu derselben.

Befindet sie sich im Bilde des Schützen oder des Krebses, bleibt die dritte Länge unverändert.

Befindet sie sich im Bilde des Skorpions oder des Löwen, subtrahirt man $^1/_5$ der dritten Länge von derselben.

Befindet sie sich im Bilde der Wage oder der Jungfrau, subtrahirt man $^1/_3$ der dritten Länge von derselben.

Was sich aus der dritten Länge nach Addition oder Subtraction oder unverändertem Werthe ergibt, heisst vierte Länge. Hierauf nimmt man immer $^2/_3$ von der ersten Breite des Mondes und das heisst Ortshöhe. Bei nördlicher Breite wird die Ortshöhe zur vierten Länge addirt, bei südlicher Breite subtrahirt, und was sich aus der vierten Länge nach dieser Addition oder Subtraction ergibt, heisst Gesichtsbogen.

13. Wollte man z. B. berechnen, ob der Mond in der Nacht auf den Freitag des 2. Ijar des Ausgangsjahres gesehen wurde oder nicht, so berechnet man den wahren Stand der Sonne, den wahren Ort des Mondes und die Breite des Mondes für dieses Jahr in der angegebenen Weise. Man erhält den wahren Stand der Sonne 7°9′ im Bilde des Stieres, den wahren Ort des Mondes 18° 36′ im Bilde des Stieres, die Breite südlich 3° 53′ als erste Breite. Nun zieht man den Stand der Sonne vom Ort des Mondes ab und es bleiben 11° 27′ als erste Länge, und da der Mond im Bilde des Stieres ist, macht der Gesichtsabstand der Länge 1°, welcher von der ersten Länge abgezogen werden muss, und man erhält die zweite Länge 10° 27′; ebenso macht der Gesichtsabstand der Breite 10′, und weil

die Breite eine südliche ist, muss man den Gesichtsabstand der Breite, der 10′ ist, addiren und man erhält als zweite Breite 4° 3′; da aber der Mond im Bilde des Stieres 18° war, muss man von der zweiten Breite $^1/_4$ noch nehmen, was die Mondkrümmung ist und man erhält als Mondkrümmung 1° 1′ bei Vernachlässigung der Sekunden.

14. Weil aber die Breite des Mondes eine südliche und der wahre Ort des Mondes zwischen dem Anfang des Steinbockes und dem Anfang des Krebses, muss man die Mondkrümmung zur zweiten Länge addiren und erhält die dritte Länge 11° 28′. Diese Länge ist im Bilde des Stieres, weshalb $^1/_5$ zur dritten Länge addirt wird, nämlich 2° 18′ und man erhält die vierte Länge 13° 46′; nun nimmt man $^2/_3$ der ersten Breite und erhält die Ortshöhe 2° 35′, welche, da die Breite eine südliche ist, von der vierten Länge abgezogen wird, und es bleiben 11° 11′ und das ist der Gesichtsbogen für diese Nacht. In dieser Weise kann man den Gesichtsbogen in Graden und Minuten für jede Nacht der Erscheinung berechnen.

15. Hat man den Gesichtsbogen herausgebracht, beobachtet man die Grade des Bogens. Betragen sie 9° oder weniger, dann konnte der Mond in ganz Palästina nicht gesehen werden. Ist der Gesichtsbogen grösser als 14°, dann musste er in ganz Palästina gesehen worden sein.

16. Befindet sich der Gesichtsbogen zwischen dem Anfang des 10.° und dem Ende des 14.°, vergleicht man den Gesichtsbogen mit der ersten Länge und erkennt aus den Enden, ob er gesehen wurde oder nicht. Diese heissen Gesichtsenden.

17. Die Gesichtsenden verhalten sich folgendermassen: Ist der Gesichtsbogen grösser als 9° bis 10° oder etwas grösser als 10°, und die erste Länge macht 13° oder mehr, wurde der Mond gewiss gesehen. Ist aber entweder der Bogen von der angegebenen Grösse und die Länge kleiner oder umgekehrt, dann wurde er nicht gesehen.

18. Ist der Gesichtsbogen mehr als 10° bis zu Ende des 11°. oder etwas grösser als 11° und die erste Länge beträgt 12° oder mehr, wurde der Mond gesehen; ist der Bogen von der erwähnten Grösse und die Länge kleiner oder umgekehrt, wurde er nicht gesehen.

19. Ist der Gesichtsbogen grösser als 11° bis zu Ende des 12.° oder etwas grösser als 12° und die erste Länge beträgt 11° oder darüber, wurde der Mond gewiss gesehen; ist der Bogen wie oben gesagt und die Länge kleiner oder umgekehrt, wurde er nicht gesehen.

20. Ist der Gesichtsbogen grösser als 12° bis zu Ende des 13.° oder etwas über 13° und die erste Länge beträgt 10° oder mehr, wurde der Mond gewiss gesehen; ist aber der Bogen wie eben angegeben und die Länge kleiner oder umgekehrt, wurde er nicht gesehen.

21. Ist der Gesichtsbogen grösser als 13° bis zu Ende des 14.° oder etwas über 14° und beträgt die erste Länge 9° oder mehr, wurde der Mond gewiss gesehen; ist aber der Bogen von der erwähnten Grösse und die Länge kleiner oder umgekehrt, dann wurde er nicht gesehen. Und dies ist das ganze Verfahren.

22. Wollen wir z. B. beobachten den Gesichtsbogen der Nacht auf den Freitag des 2. Ijar des Ausgangsjahres, so erhielten wir durch Rechnung den Gesichtsbogen 11° 11′, wie bekannt; da also der Gesichtsbogen zwischen 10° und 14° lag, vergleichen wir ihn mit der ersten Länge und diese betrug damals 11° 27′; da also der Gesichtsbogen mehr als 11° und die erste Länge mehr als 11° betrug, wurde der Mond gewiss gesehen, wie aus der Bestimmung der Gesichtsenden erhellt. So vergleicht man jeden Bogen mit seiner ersten Länge.

23. Aus diesem Verfahren ersieht man, wie viel Rechnungen es da gibt, wie viel Additionen und Subtractionen, nachdem wir uns Mühe genommen bekannte Verfahren zu finden, deren Rechnung keine grosse Schwierigkeit macht; denn der Mond macht grosse Krümmungen in seinen Bahnen, weshalb die Weisen von ihm sagten: „Die Sonne trifft ihre Bahn, der Mond aber nicht.“

24. Auch sagten die Weisen: manchmal beschreibt er eine lange, manchmal eine kurze Bahn, wie man aus der Berechnung sieht, dass man manchmal addiren und manchmal subtrahiren muss, um den Gesichtsbogen, der bald grösser bald kleiner ist, zu erhalten.

25. Die Ursache, warum bei diesen Berechnungen dies addirt und jenes subtrahirt, und die Art, wie Alles berechnet wird und die Beweise gibt die Wissenschaft der Kalenderberechnung und der Geometrie, worüber die Griechen viele Bücher geschrieben, die viele unserer Gelehrten noch jetzt besitzen. Die Bücher nämlich, die von den Weisen Israels zur Zeit der Propheten im Stamme Isachar geschrieben wurden, haben sich bis auf unsere Zeit nicht erhalten. Diese Angaben sind aber durch sehr genaue Beweise erhärtet, auch ist kein Fehler darin und sie können von Niemand beanstandet werden, darum liegt gar nichts daran, ob sie Propheten oder Heiden geschrieben haben; denn bei einer jeden Sache, deren Grund offen liegt und deren Wahrheit durch Beweise gesichert ist, so dass kein Fehler darin sich findet, verlassen wir uns auf den Mann, der die Sache gesagt oder gelehrt, doch nur kraft des Beweises, der offenkundig, und kraft des Grundes, der bekannt ist.

Über die Axenbestimmung von Central-Projectionen der Flächen zweiten Grades.

Von **Carl Pelz,**

Assistenten der descriptiven u. neueren Geometrie am deutschen Polytechnicum in Prag.

(Mit 1 Tafel.)

1. Unter den mir bekannten Werken und Abhandlungen, die sich auf Central-Projection beziehen, ist es namentlich die Freie Perspective der Herren Peschka und Koutny, welche auch die Projectionen von Flächen zweiten Grades ausführlicher behandelt, und die Eigenschaft, dass die Contouren solcher Flächen Curven zweiten Grades sind, benützend, die Bestimmungsstücke der letzteren durch einfache Constructionen zu erreichen sucht. Es werden in dem erwähnten Werke namentlich für den am meisten Anwendung findenden Fall, dass die Rotationsaxe der bezüglichen Fläche zur Bildebene parallel ist, immer conjugirte Diameter der entsprechenden Contourcurve ermittelt [1], und aus denselben letztere selbst construirt. Senkrechte Axen lassen sich bekanntlich aus conjugirten Diametern leicht bestimmen, und ist auch die Construction der zuletzt genannten Diameter einfach genug, so kann die Aufgabe, senkrechte Axen der Central-Projection einer Fläche zweiten Grades zu construiren, als gelöst betrachtet werden, was für praktische Zwecke auch hinreichend sein mag. Vom theoretischen Standpunkte jedoch betrachtet, scheint mir eine Construction senk-

---

[1] Auch in der Abhandlung des Herrn Prof. Niemtschik: Directe Constructionen der Contouren von Rotationsflächen etc. (siehe Sitzungsb. der mathem.-naturw. Cl. der kais. Akad. d. Wissensch. LII. Bd.) werden die Flächen zweiten Grades separat behandelt, aber die dort gelieferte Construction der conjugirten Diameter (siehe Fig. 25, 25 *b*) ist complicirt und unserer Ansicht nach nicht allgemein durchführbar.

rechter Axen von Central-Projectionen der Flächen zweiten Grades, die von einer Bestimmung zweier conjugirten Diameter unabhängig wäre, wichtig genug, um auf eine Lösung dieser Aufgabe hinzuweisen, welche, da sie einfacher sein dürfte als jene, welche bisher blos für conjugirte Diameter geliefert wurde, der letzteren vorzuziehen wäre, und daher auch dort nützlich verwendbar ist, wo es sich um die Central-Projection einer Fläche zweiten Grades selbst handelt.

Nebenbei erlaube ich mir die Bemerkung, dass die Lösung derselben Aufgabe speciell für die Central-Projection der Kegelschnittslinien [1] und namentlich des Kreises [2] bereits gegeben wurde, für die Central-Projection der Flächen zweiten Grades aber hat man eine solche bisher weder geführt noch versucht.

2. Je zwei conjugirte Geraden in Bezug auf eine Schaar confocaler Kegelschnitte stehen wie bekannt auf einander senkrecht, und construirt man von irgend einem Punkte p die Polarcurve (umhüllende Curve aller Polaren von p) in Bezug auf die Schaar, so ist diese, weil sie die unendlich ferne Gerade (als Seite des gemeinschaftlichen Tripels) berühren muss, eine Parabel [3] Π, welche auch die Axen A und B der Schaar (als die übrigen zwei Seiten des gemeinschaftlichen Tripels) und die beiden durch p gehenden in Bezug auf die Schaar conjugirten Geraden H und H' berührt. Zu dieser Parabel können wir auch auf folgende Art gelangen.

Dreht sich nämlich (siehe Fig. 1) die Gerade (G) um den festen Punkt p, und construiren wir den Pol (g) von (G) in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt Σ der Schaar, deren Brennpunkte f und f' und deren Mittelpunkt m ist, so beschreibt bekanntlich (g) die gerade Polare P von p und die von (g) zu der entsprechenden (G) gefällten Perpendikel (G') hüllen ebenfalls unsere Parabel Π ein. In der That sind (G) und (G') con-

---

[1] Siehe Peschka, Koutny, Freie Perspective, p. 231.

[2] Poudra, Nouvelles Annales. 1855. — Schlömilch: Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik u. Physik. 1856. — Morstadt: Über die directe Bestimmung der Axen von Kreisbildern. Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. II. Abth. LVI. Bd.

[3] Siehe z. B. Staudigl's Lehrbuch d. neueren Geometrie, p. 211.

jugirte Geraden in Bezug auf Σ, und da diese Geraden auf einander senkrecht stehen, so sind sie nach dem zuerst angeführten Satze in Bezug auf die ganze Schaar conjugirt. Wie schon erwähnt, werden auch die Axen A und B von Σ, und die durch p gehenden conjugirten Geraden H und H' [1] der Schaar von Π berührt, und da die Axen A und B und die Geraden H, H' auf einander respective senkrecht stehen, so erkennt man sofort, dass die Gerade mp die Leitlinie von Π ist, und dass wir, um den Brennpunkt π von Π zu erhalten, nur den Pol von mp in Bezug auf Π zu ermitteln haben, der sich als derjenige Diagonalpunkt des der Parabel umgeschriebenen vollständigen Vierseits A, B, H, H' ergibt, welcher der Diagonale mp gegenüber liegt.

Nicht nur jeder beliebige Kegelschnitt Σ der Schaar liefert uns für den Punkt p auf die eben angeführte Art dieselbe Parabel Π, sondern diese bleibt ungeändert für alle Kegelschnitte Σ', welche irgend einen der Schaar derart doppelt berühren, dass die Berührungssehne die Polare des Punktes p ist. Denn es bleiben erstens die Winkelhalbirenden H und H' dieselben, und nebstdem auch die Normalen N und N' in den Berührungspunkten β und β', welche der angeführten Erzeugungsart zufolge Tangenten von Π sind, und eine Parabel ist durch vier Tangenten vollkommen bestimmt. Ein solcher Kegelschnitt Σ', welcher einen bestimmten Kegelschnitt Σ der Schaar derart doppelt berührt, dass die Berührungssehne Polare von p ist, wird aber vollständig bestimmt sein, sobald wir seinen auf mp liegenden Mittelpunkt m' angeben. Die Axen von Σ' müssen nach dem Angeführten Tangenten von Π sein, und da m' auf der Directrix liegt, so ergeben sich dieselben als die Halbirenden des Winkels $pm'\pi$. Um die Brennpunkte von Σ' zu erhalten, brauchen wir nur zu erwägen, dass der dem, von den Geraden B, H, H' gebildeten Dreiseit umgeschriebene Kreis K auch durch die Brennpunkte f, f' von Σ und nebenbei, da H, H' und B Tangenten von Π sind, auch durch den Brennpunkt π gehen muss, und dass diese Eigenschaft für alle Kegelschnitte, welche auf die angegebene Art mit p dieselbe Parabel Π

[1] Die sich als Halbirende des Winkels fpf' ergeben.

bestimmen, ebenfalls seine Geltung hat. Um z. B. daher die Brennpunkte von Σ' (siehe Fig. 1) zu erhalten, legen wir durch p und π einen Kreis K' derart, dass sein Mittelpunkt μ auf der Nebenaxe von Σ' liegt, während er die Hauptaxe in den Brennpunkten F und F' schneidet. Daraus ergibt sich nebenbei bemerkt der Satz: Concentrische Kegelschnitte, welche eine Schaar confocaler Kegelschnitte derart doppelt berühren, dass die Berührungssehnen Polaren eines festen Punktes p sind, haben dieselben Axen und sind ebenfalls confocal, und das namentlich für unsere Untersuchung wichtige Resultat: Die Axen von Kegelschnitten, welche einen gemeinschaftlichen doppelten Contact haben, hüllen eine Parabel Π ein.

3. Wir wollen nun im Nachfolgenden die gewonnenen Ergebnisse zur Lösung unserer Aufgabe verwerthen.

Es seien (siehe Fig. 2) aa, bb die Axen, f und f' die Brennpunkte einer in der Bildebene liegenden Ellipse Σ, es soll die Central-Projection Σ' des durch die Rotation von Σ um aa als Axe entstandenen Ellipsoids, und zwar durch directe Bestimmung der Arten von Σ' construirt werden, wenn in C' der Hauptpunkt und durch $C'\left(\frac{C}{2}\right)$ die halbe Distanz gegeben ist.

Wenn wir beachten, dass die gesuchte Contourcurve Σ' von Σ doppelt berührt wird, und zwar derart, dass die Berührungssehne die Polare des Punktes C' ist, so sehen wir, dass uns dadurch unmittelbar vier Bestimmungsstücke von Σ' gegeben sind, und dass die Axen von Σ' nach dem früher Entwickelten Tangenten einer Parabel Π sind, welche die Axen aa, bb von Σ und die Halbirenden H, H' des Winkels $fC'f'$ zu Tangenten hat. Unsere Contourcurve Σ' ist also vollkommen bestimmt, sobald wir ihren Mittelpunkt angeben. Dieser ist aber die Central-Projection des Poles der Fläche für die Verschwindungs-Ebene [1] als Polar-Ebene, und wir finden denselben, indem wir die Endpunkte c, c' des zur Bildebene senkrechten Durchmessers der Fläche central projiciren, und

[1] Die Verschwindungs-Ebene, von einigen Autoren auch Central-Distanz- oder Grenz-Ebene genannt, ist die durch das Projections-Centrum C parallel der Bildebene gelegte Ebene.

die von den Central-Projectionen γ, γ' begrenzte Strecke in m' [1] halbiren. Die von m' an die Parabel Π gezogenen Tangenten, welche, da m' aus bekannten Gründen auf der Leitlinie von Π liegt, auf einander senkrecht stehen, sind die Axen von Σ'. Um diese einfach zu ermitteln, construiren wir zunächst den Brennpunkt π von Π. Wir finden denselben als Schnittpunkt der beiden nebst mC' vorhandenen Diagonalen des vollständigen Vierseits aa, bb, H, H'. Weil jedoch in unserer Figur der Schnittpunkt von aa und H' ausserhalb der Figurgrenze fällt, so wollen wir von dem Umstande Gebrauch machen, dass wegen der Rechtwinkligkeit der Geraden aa, bb und H, H' auch die zwei erwähnten Diagonalen des Vierseits aa, bb und H, H' auf einander senkrecht stehen, und fällen, um π zu erhalten, vom Schnittpunkt der Geraden H und bb auf die Diagonale, welche die Punkte (H', bb) und (H, aa) verbindet, eine Senkrechte. Nebenbei erwähnt, sind, wie aus harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits hinlänglich bekannt ist, die Strahlen pm, $p\pi$, H und H' (siehe Fig. 1) vier harmonische Strahlen, und da H senkrecht steht auf H', so müssen letztere die von pm und $p\pi$ respective gebildeten Winkel halbiren. Aus demselben Grunde ist auch der Winkel $pmf' =$ dem Winkel $f'm\pi$. Diese Relationen kann man ebenfalls zur Bestimmung von π benützen.

Die Halbirenden des Winkels $\pi m'C'$ (siehe Fig. 2) geben uns die Axen von Σ'. Um die Brennpunkte des Contourkegelschnittes zu erhalten, beschreiben wir einen Kreis K, der durch C' und π geht, dessen Mittelpunkt μ auf der einen Axe von Σ' liegt, während er die andere in den gesuchten Brennpunkten F, F' schneidet. Berühren sich Σ und Σ' in reellen Punkten β, β', d. h. lassen sich von C' zwei reelle Tangenten T und T' an Σ ziehen, so sind diese und ihre Berührungspunkte β β' zugleich Tangenten und Berührungspunkte von Σ' und dadurch ist also Σ' mehr als vollständig bestimmt.

---

[1] Im Texte bezeichnen wir immer den Mittelpunkt der Fläche mit m, und jenen der Contour Σ' mit m'; in der Figurentafel haben wir aber diese Buchstaben zu den Punkten nicht gestellt, um die Figuren nicht undeutlich zu machen.

Wenn jedoch die beiden von C' gehenden Tangenten imaginär sind, so können wir die Endpunkte eines, und zwar am einfachsten des mit $m'C'$ zusammenfallenden Diameters von Σ' bestimmen. Denken wir uns den Schnittpunkt von $m'C'$ und der Polaren P[1] von C' (in Bezug auf Σ) mit q, und die beiden gesuchten Endpunkte mit p, p' bezeichnet, so sind bekanntlich p, p', q, C' vier harmonische Punkte, und daher: $m'q . m'C' = m'p^2$, was uns die bekannte in der Figur durchgeführte Construction von $m'p$ liefert. Die Tangente im Punkte p ist parallel zu P, und der Fusspunkt n, der z. B. von F zu dieser Tangente gefällten Senkrechten, mit m' verbunden, gibt uns die Länge der grossen Axe von Σ'.

4. In Fig. 3 ist durch die Asymptoten A, A' und die Brennpunkte f, f' eine in der Tafel liegende Hyperbel Σ bestimmt, man soll die Central-Projection des durch Rotation von Σ um die imaginäre Axe entstandene einfache Hyperboloids, und zwar durch directe Bestimmung der Axen construiren, wenn durch C' der Hauptpunkt und durch $C'\left(\frac{C}{2}\right)$ die halbe Distanz gegeben ist. Die Construction ist von der vorhergehenden fast gar nicht verschieden. Mit Benützung der Winkelhalbirenden H, H' und der beiden Axen von Σ wurde auch hier der Parabel-Brennpunkt π in bekannter Weise ermittelt, dieser mit dem Mittelpunkt m', der sich wieder als der Halbirungspunkt der Central-Projectionen γ, γ', der Endpunkte des zur Tafel senkrechten Durchmessers ergab, verbunden, die Halbirungslinien des Winkels $\pi m'C'$ construirt, welche uns die Axen von Σ' geben. Legen wir weiter durch π und C' einen Kreis K, dessen Mittelpunkt μ auf der imaginären Axe von Σ' liegt, so schneidet dieser die reelle Axe in den Brennpunkten F und F' von Σ'. Um die Endpunkte der reellen Axe von Σ' zu bestimmen, können wir ebenso verfahren wie in Fig. 2, nämlich mit Hilfe der Polaren P die Endpunkte des mit $m'C'$ zusammenfallenden Diameters von Σ' bestimmen. Da

---

[1] Diese Polare kann, wie bekannt, selbst dann einfach construirt werden, wenn Σ nicht gezeichnet vorliegt; denken wir uns z. B. von C' eine Normale zu bb gezogen, so bestimmt deren Fusspunkt mit dem Schnittpunkt von P mit bb und den Punkten b, b vier harmonische Punkte. Dasselbe gilt von aa und dem Fusspunkt des von C' etc.

aber die vorliegende Fläche eine Regelfläche ist, und die Central-Projection einer jeden Mantellinie Tangente von Σ' sein muss, so können wir hier von dieser Eigenschaft Gebrauch machen.

Unter den Erzeugenden der Fläche lassen sich namentlich die Central-Projectionen derjenigen einfach construiren, welche durch die Endpunkte cc' des zur Bildebene senkrechten Durchmessers der Fläche gehen. Denn diese sind bekanntlich zur Bildebene und zu den Asymptoten von Σ parallel. Daraus ergibt sich aber sofort, dass, wenn wir z. B. durch γ eine Parallele zu A' ziehen, diese eine Tangente von Σ' sein muss. Fällen wir daher von F eine Normale auf diese Tangente, so gibt uns der Fusspunkt dieser Normalen mit m' verbunden eine Gerade, die der reellen Axe von Σ' gleich ist. Dadurch ist also Σ' ebenfalls vollständig bestimmt.

In unserer Figur haben wir die Fläche durch zwei vom Mittelpunkte m des Hyperboloids gleich weit entfernte Parallelkreise K_1, K_2 begrenzt, deren Mittelpunkte o und o' sind. Da die Meridian-Hyperbel Σ nicht gezeichnet vorliegt, so wurde zuerst der Radius dieser Kreise bestimmt, in dem wir die Schnittpunkte der z. B. durch o parallel zur reellen Axe von Σ gezogenen Geraden mit Σ auf die bekannte Art construirt haben [1]. Die Bestimmung der Central-Projection der beiden Kreise K_1 und K_2 unterliegt weiter keiner Schwierigkeit.

Wir wollen nur noch kurz der Construction Erwähnung thun, welche uns zur Bestimmung der Contactpunkte dieser Centralprojectionen mit Σ' führt. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass dies die Perspectiven derjenigen zwei Punkte des bezüglichen Kreises sind, in welchen derselbe von der Polarebene S des Projections-Centrums C in Bezug auf die Fläche geschnitten wird. Um diese Punkte einfach zu bestimmen, wollen wir darauf hinweisen, dass die Schnittlinie der Ebene S mit irgend einer horizontalen Ebene senkrecht steht auf der Schnittlinie derselben horizontalen Ebene und der Ebene E, welche man durch

[1] Siehe z. B. Herrn Prof. Niemtschik's Neue Constructionen der auf ebenen und krummen Flächen erscheinenden Reflexe. Sitzungsb. d. kais. Akad. d. Wissensch. mathem.-naturw. Cl. Bd. LIII, Fig. 62.

die Rotations-Axe der Fläche und das Projections-Centrum C legen kann. Die Richtung der letzteren Schnittlinie können wir aber einfach bestimmen. Wir brauchen blos, wenn z. B. mit der halben Distanz gearbeitet wird, die Entfernung des Hauptpunktes C' von der Rotationsaxe der Fläche in h zu halbiren, und h mit $\left(\frac{C}{2}\right)$ zu verbinden. Da wir aber die Bildflächen-Trace der Ebene S kennen, denn diese ist die Polare P des Punktes C' in Bezug auf Σ, so fällen wir, um z. B. die beiden im Kreise K_2 liegenden Punkte von S zu bestimmen, vom Punkte q', in welchem der zur Bildebene parallele Durchmesser des Kreises K_2 von P geschnitten wird, eine Normale zu $h\left(\frac{C}{2}\right)$, welche K_2 in den Punkten III und IV schneidet, deren Central-Projectionen III', IV' uns die gesuchten Contactpunkte liefern. Die Tangenten in den Punkten III', IV' sind Projectionen von Tangenten des Kreises K_2 in den entsprechenden Punkten III und IV [1]. Ebenso erhalten wir die beiden Punkte I', II', in denen die Central-Projection von K_1 Σ' berührt. Dass die Geraden I', II' und III', IV' die Horizontlinie in demselben Punkte treffen müssen, in dem letztere von der Fluchtlinie der Ebene S geschnitten wird, ist bekannt.

5. In Fig. 4 haben wir schliesslich eine vollständige Darstellung der Central-Projection eines zweifachen Hyperboloids, nach der auseinandergesetzten Methode gegeben, und zwar hauptsächlich aus dem Grunde, weil dieselbe gewöhnlich in den diesen Gegenstand betreffenden Arbeiten übergangen wird. Die in der Bildebene liegende Meridian-Hyperbel Σ ist durch die Asymptoten A, A' und die Brennpunkte f, f' bestimmt; in C' ist der Hauptpunkt und durch $C'\left(\frac{C}{2}\right)$ die halbe Distanz gegeben. Die Construction unterscheidet sich von den vorhergehenden nur durch die Bestimmung des Mittelpunktes m' der Contourcurve Σ'. Wir haben bereits früher gesagt, dass

---

[1] Dadurch haben wir zugleich eine Construction von Σ' aus Punkten und Tangenten kennen gelernt, welche einfacher sein dürfte, als alle für diesen Zweck bisher gelieferten.

dieser Mittelpunkt die Central-Projection des Poles der Fläche in Bezug auf die Verschwindungsebene als Polarebene ist. Denken wir uns daher durch die Rotationsaxe der Fläche eine senkrechte Ebene zur Bildebene gelegt, so schneidet diese unsere Fläche nach einer Meridian-Hyperbel H, und construiren wir in einem der beiden Punkte, in welchen H von der Verschwindungsebene V geschnitten wird, eine Tangente an H, so trifft diese den zur Bildebene senkrechten Durchmesser D der Fläche im Punkte v, dessen Central-Projection der Mittelpunkt m' ist. Bezeichnen wir den Schnittpunkt von D und V mit d, und ist m der Mittelpunkt von Σ, so gilt bekanntlich die Relation $-md.mv=D^2$, und wenn wir die Strecke mv um ihre eigene Länge über m aus bis mv' verlängern, so wird: $md.mv'=D^2$, d. h. d, v' und die beiden Endpunkte des imaginären Durchmessers D sind vier harmonische Punkte. Projiciren wir daher die Endpunkte von D central nach γ und γ', so gibt uns der Halbirungspunkt dieser Strecke die Projection von v', und der ihm zugeordnete harmonische Punkt in Bezug auf m, C' muss offenbar die Central-Projection von v, d. h. der gesuchte Mittelpunkt m' von Σ' sein. Wird der Punkt m' mit dem in bekannter Weise construirten Parabelbrennpunkt π verbunden und die Halbirungslinien des Winkels $\pi m'C'$ gezeichnet, so sind diese die Axen von Σ' während der durch π und C' gehende Kreis K, dessen Mittelpunkt auf der imaginären Axe von Σ' liegt, die reelle Axe in den Brennpunkten F, F' schneidet. Lassen sich von C' keine reellen Tangenten an Σ ziehen, so construiren wir auf folgende Art die imaginäre Axe von Σ'. Bezeichnet q den Schnittpunkt der Geraden $m'C'$ mit der Polaren P von C' in Bezug auf Σ, so kann die absolute Länge des mit $m'C'$ zusammenfallenden imaginären Diameters pp' von Σ' aus der Relation $m'q.m'C'=m'p^2$ bestimmt werden. Die durch p und p' parallel zu P gezogenen Geraden sind Tangenten der zu Σ' conjugirten Hyperbel [1]. Diese hat bekanntlich die reelle (imaginäre) Axe von Σ' beziehungsweise zur imaginären (reellen) Axe, und wir erhalten daher ihre Brennpunkte φ, φ', wenn wir auf die imaginäre Axe von Σ' die Excentricität $m'F=m'\varphi$ abtragen. Fällen wir weiter von φ eine Senk-

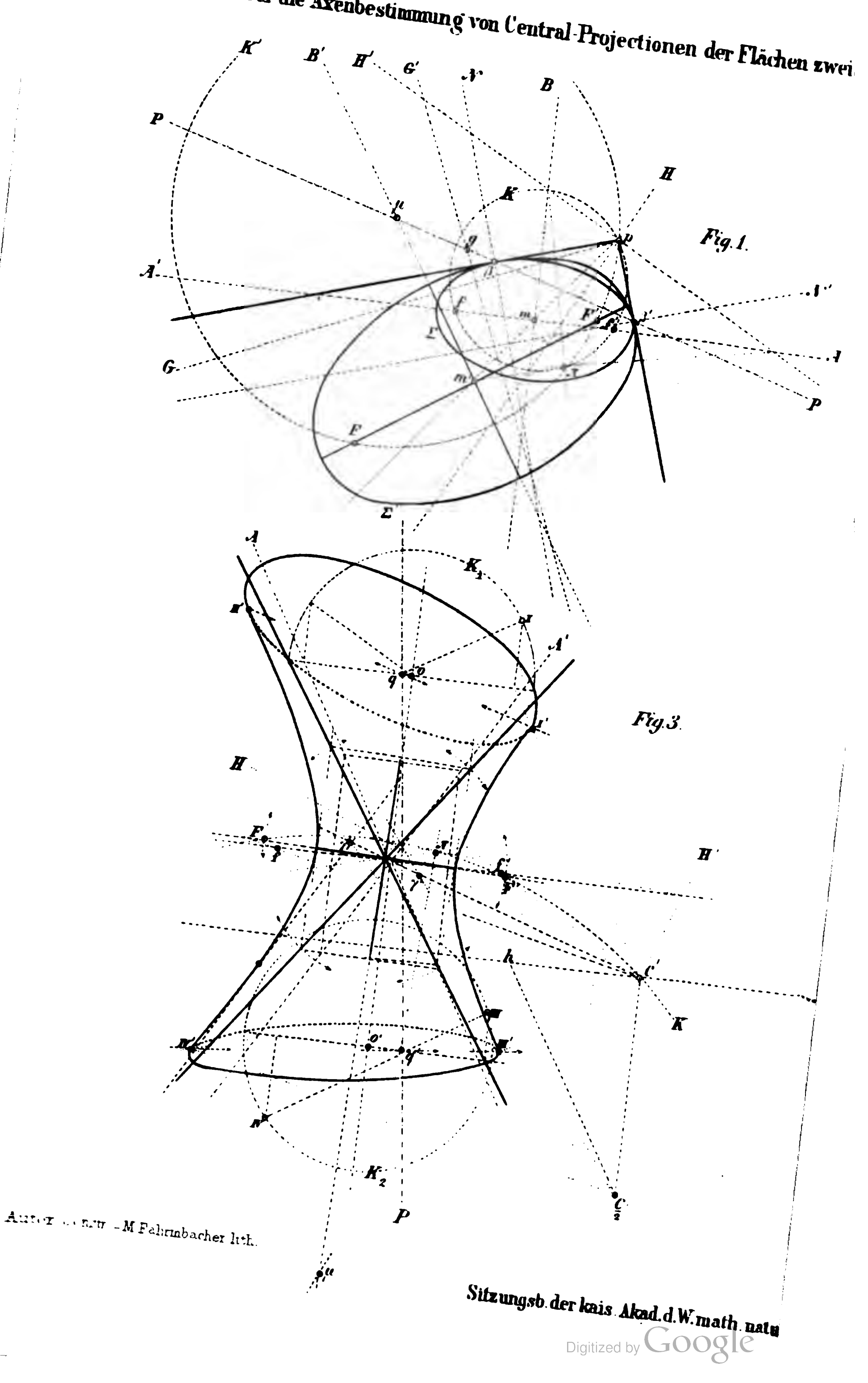
[1] Staudigl's Neuere Geometrie, p. 170.

rechte auf die durch p parallel zu P gezogene Gerade, so gibt uns der Fusspunkt der letzteren mit m' verbunden die Länge der reellen Axe der conjugirten Hyperbel, daher die imaginäre Axe von Σ'.

6. Dass man die Idee, welche dieser kleinen Mittheilung zu Grunde liegt, auch anderweitig sehr vortheilhaft, z. B. zur Bestimmung senkrechter Axen von Central-Projectionen der Kegelschnittslinien, selbst wenn nur ein aliquoter Theil der Distanz zu Gebote steht, verwerthen kann, wird jeder Sachkundige sofort erkennen. Ich bemerke nur noch, dass die Constructionen der Axen von Central-Projectionen beliebiger Flächen zweiten Grades bei beliebiger Neigung ihrer Axen zur Bildebene beinahe dieselben sind, wie die hier durchgeführten: Ist Σ der Diametralschnitt, in welchem die Fläche von der Bildebene geschnitten wird [1], so unterscheiden sich die Constructionen nur dadurch, dass jetzt an die Stelle des Hauptpunktes C' der Fluchtpunkt desjenigen Diameters der Fläche eintritt, welcher der Bildebene conjugirt ist.

---

[1] Den Mittelpunkt der Fläche kann man bekanntlich immer in der Bildebene liegend annehmen.


Fig. 1.
Fig. 3.
Autor ... M. Fahrnbacher lith.





